ряет условию (1) и диагональ матрицы A не содержит бесконечное число одинаковых элементов справедливо:

$$\sigma_{ab}(A)=\{\lambda\in\Re : |\lambda-1/(2-\delta)|=(1-\delta)/(2-\delta)\},$$

$$\sigma_{db}(A)=\sigma_{eb}(A)=\{\lambda\in\Re : |\lambda-1/(2-\delta)|\le(1-\delta)/(2-\delta)\}.$$

Автором были рассмотрены и другие случаи, связанные с изменением условий, накладываемых на оператор, а также другие существенные спектры, связанные с этими операторами.

Литература

1. Harte R. // Invertibility and Singularity for Bounded Linear Operators. Marsel Dekker, New York, 1988. 590P.
2. Rakoevi V. Semi-Browder operators and perturbations // Studia mathematica. 1997. Vol.122. №2. P.131-137.
3. Еровенко В.А. О теореме Вейля для существенных спектров Като и Фредгольма замкнутых операторов в банаховом пространстве // Весці НАН Беларусі. Сер. физ.-мат. навук. 1998. №1. С.18-23.
4. Zemánek J. Compressions and the Weyl-Browder spectra // Proceedings of the Royal Irish Academy. 1986. Vol.86A. №1. P.57-62.

СТАТИСТИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ, ОПИСЫВАЕМЫХ AFRIMA- МОДЕЛЬЮ В ПРОСТРАНСТВЕ СОСТОЯНИЙ

Лобач И.В.

Белорусский государственный университет

г. Минск

This paper develops a state space modeling for long-range dependent data. It is shown that by using the Kalman filter, the exact likelihood function can be computed recursively in a finite number of steps.

Ключевые слова: временные ряды, фильтр Калмана-Бьюси, ARFIMA-модель.

Эмпирический анализ эволюции финансовых, экономических, социологических и многих других индексов обычно начинается с построения вероятностно-статистической модели. В общей теории временных рядов имеется целый арсенал разнообразных "стандартных" линейных моделей, среди которых в первую очередь необходимо назвать[1] такие, как MA(q), AR(p), ARMA(p, q), ARFIMA(p, q, d). Данные модели широко используются, особенно в предположении их стационарности. Причины популярности этих моделей кроются, с одной стороны в их простоте, с другой стороны, в том, что уже с небольшим числом параметров ими можно хорошо аппроксимировать весьма широкий класс стационарных последовательностей. Динамика ряда экономических показателей может быть описана процессами, имеющими "долгую" память. Так, например, в [2] исследованы результаты ежемесячной работы шведской биржи в период 1919-1995 гг. и еженедельной в период 1980-1990 гг. и было показано, что процессы, описывающие состояния биржи, имеют долгую память.

Одной из удобных моделей для описания таких процессов является ARFIMA (fractionally integrated autoregressive moving average)-модель[3], которая имеет вид:

$$\Phi(B)(1-B)^d y_t = \Theta(B)\varepsilon_t \qquad (1)$$

где $|d|<1/2$, $\{\varepsilon_t\}$-гауссовская последовательность белого шума, B-оператор сдвига влево $By_t=y_{t-1}$; $\Phi(B)=1-\phi_1B-\phi_2B^2-\ldots\phi_pB^p$ AR-оператор, $\Theta(B)=1-\theta_1B-\theta_2B^2-\ldots-\theta_qB^q$ MA-оператор. Заметим, что при d=0 получим ARMA-модель.

В экономике отклонения от положения равновесия обычно описываются ARIMA(p, q, d)-моделью при d=1. Однако данное предположение является весьма обременительным. Можно описать динамику этих отклонений ARIMA(p, q, d)-моделью при d<1. Таким образом, получим ARFIMA(p, q, d)-модель. В работе [4] с помощью ARFIMA -модели была исследована средняя температура в Европе за 1944-1988 года и получены интересные результаты моделирования и прогнозирования.

В данной работе исследуются методы оценивания параметров ARFIMA-модели. Существует несколько методов оценивания. Это- R/S-алгоритм [1], байесовский метод оценивания и другие.

Известно, что метод максимального правдоподобия является одним из самых эффективных. Он обладает свойствами асимптотической нормальности, несмещенности и эффективности. Однако существуют проблемы, в частности связанные с вычислением функции правдоподобия. Логарифмическая функция правдоподобия в случае гауссовости имеет вид:

$$l_n(\theta) = -\frac{1}{2}\log\det T_n(\theta) - \frac{1}{2}Y_n'T_n^{-1}(\theta)Y_n, \qquad (2)$$

где $[T_n(\theta)]_{r,s=1\ldots n}$ - ковариационная матрица вектора $Y_n=(y_1,\ldots y_n)'$, $\theta=(\phi_1,\ldots\phi_p,\theta_1,\ldots\theta_q,d,\sigma_\varepsilon)'$ вектор неизвестных параметров. Как видно из формулы (2), для вычисления функции правдоподобия при 100 наблюдениях необходимо вычислять определитель и обращать матрицу размерности 100x100, нелинейно зависящую от вектора параметров. Данные вычисления приводят к большим трудностям.

В данной работе анализируется возможность применения к оцениванию параметров ARFIMA-модели подхода, основанного на использовании описания модели в пространстве состояний и применении фильтра Калмана-Бьюси[5]. Этот подход позволяет упростить функцию правдоподобия и построить достаточно эффективный алгоритм оценивания параметров модели.

Представим ARFIMA-модель в пространстве состояний. Стандартная модель в пространстве состояний имеет вид:

$$X_{t+1}=FX_t+H\varepsilon_t, \qquad (3)$$

$$y_t=GX_t+\eta_t,$$

где y_t –наблюдаемая реализация, $\{\varepsilon_t\},\{\eta_t\}$-последовательности независимых одинаково распределенных случайных величин с нулевым математическим ожиданием и единичной дисперсией.

Непосредственной проверкой можно убедиться, что ARFIMA-модель (1) имеет вид (3), если

$$X_t=\begin{bmatrix} y(t|t-1) \\ y(t+1|t-1) \\ y(t+2|t-1) \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}, \quad y(t|t_j)=E(y_t|y_j,y_{j-1}\ldots),$$

$$F=\begin{bmatrix} 010\ldots\ldots0\ldots \\ 0010\ldots0\ldots \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \end{bmatrix}; \quad H=[\varphi_1;\varphi_2\ldots]; \quad G=[1,0,0,0\ldots].$$

Теорема. Если последовательность наблюдений y_t, $t=1\ldots n$, порождается процессом, описываемым системой (3),то функция правдоподобия может быть представлена в виде:

$$l_n=-\frac{1}{2}\left\{n\log 2\pi+\sum_{t=1}^{n}\log\Delta_t+n\log\sigma_\varepsilon^2+\frac{1}{\sigma_\varepsilon^2}\sum_{t=1}^{n}\frac{(y_t-y_t)^2}{\Delta_t}\right\}, \qquad (4)$$

где для Δ_t, y_t, σ_ε^2 получено представление, которое является очень громоздким и поэтому не приводится.

Для вычисления функции правдоподобия необходимо задать начальные данные: $X_1=0$, θ_0, $E[X_1X_1'] = (\omega_{ij}^1(\theta))_{i,j=1,2,\ldots,K}, \omega_{ij}^1(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty}\varphi_{i+k}(\theta)\varphi_{j+k}(\theta)$

Таким образом, получены рекуррентные соотношения для вычисления логарифмической функции правдоподобия.

Проведен численный анализ логарифмической функции правдоподобия при $y_t = (1-B)^{-d}\varepsilon_t$, $\sigma_\varepsilon=0.9$, n=50 и получены следующие результаты:

$$d = 0.1, \hat{d} = 0.092, d = 0.2, \hat{d} = 0.208, d = 0.3, \hat{d} = 0.308, d = 0.4, \hat{d} = 0.407.$$

d- истинное значение параметра, $\hat{d}$ -оценка.

Результаты моделирования показывают достаточно высокую степень точности оценивания неизвестного параметра d, при увеличении объема выборки точность оценивания увеличивается.

Применение фильтра Калмана-Бьюси для анализа процессов с "долгой " памятью позволяет существенным образом упростить вид функции правдоподобия, с помощью которой проводится оценивание неизвестных параметров. Результаты статистического моделирования иллюстрируют эффективность данного подхода.

Литература

1. Ширяев А. Н. Основы стохастической финансовой математики. М.: Фазис, 1998
2. Lennart Berg, Johan Lyhagen. Short and long-run dependence in Swedish stock returns // Applied Financial Economics, Vol. 08,435-443
3. Ngai Hang Chang, Wilfredo Palma. State space modeling of long-memory processes // The Annals of Statistics 1998, Vol. 26, No 2, 719-740
4. Bloutsos A. A., Rossidis Z. V., Sahsamanoglou H. S. Arfima Modelig of Mean Temperature at the 1000/500 hPa Layer over Europe // SSE/EFI Working Paper Series in Economics and Finance, 1998
5. Браммер К., Зиффлинг Г. Фильтр Калмана-Бьюси. М.:Наука, 1982