В завершение приведём итоговые диаграммы распределения среднего балла в зависимости от признак-фактора.

Авторы надеются, что дальнейшее более детальное изучение этих вопросов даст ощутимые результаты для практического воплощения их.

О РАДИУСЕ УСТОЙЧИВОСТИ ЭФФЕКТИВНОГО РЕШЕНИЯ ВЕКТОРНОЙ ЗАДАЧИ ЦЕЛОЧИСЛЕННОГО ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Никулин Ю.В.

Белорусский государственный университет

220050 Минск, пр. Ф. Скорины, 4, e-mail: eva@mmf.bsu.unibel.by

Аннотация: получена формула радиуса устойчивости эффективного решения векторной задачи целочисленного линейного программирования.

Ключевые слова: задача ЦЛП, устойчивость, радиус устойчивости, эффективное решение.

Рассмотрим n-критериальную задачу целочисленного линейного программирования (ЦЛП) с m переменными в следующей постановке:

$$C_i x \to \min_{X}, \; i \in N_n := \{1, 2, \ldots, n\},$$

где $C = [c_{ij}]_{n \times m} \in \boldsymbol{R}^{nm}$, $m, n \in N$, X – конечное множество (допустимых) решений в Z^m, причем $|X| > 1$.

Здесь и далее нижний индекс матрицы (так же как вектора) указывает на соответствующую строку этой матрицы (соответствующую компоненту вектора).

При такой постановке традиционные (см., например, [1]) определения множества Смейла (множества строго эффективных решений), множества Парето (множества истинно эффективных решений) и множества Слейтера (множества слабо эффективных решений) имеют соответственно вид:

$$Q_r(C) = \{x \in X : q_r(x, C) = \varnothing\}, \; r = 1, 2, 3,$$

где

$$q_1(x, C) = \{x' \in X \backslash \{x\} : Cx \geq Cx'\},$$

$$q_2(x, C) = \{x' \in X : Cx \geq Cx', \; Cx \neq Cx'\},$$

$$q_3(x, C) = \{x' \in X : \forall i \in N_n \; (C_i x > C_i x')\}.$$

Непосредственно из этих определений вытекают включения

$$Q_1(C) \subseteq Q_2(C) \subseteq Q_3(C) \tag{1}$$

Заметим, что множество $Q_1(C)$ может быть пустым.

Для всякого числа $r\in N_3$ задачу поиска множества эффективных решений $Q_r(C)$ будем называть векторной (n-критериальной) задачей ЦЛП и обозначать через $Z^n_r(C)$, $n\geq 1$.

Для всякого числа $k\in N$ в k-мерном действительном пространстве R^k зададим чебышевскую норму $\| z \|=\max\{| z_i |: i\in N_k\}$, а в пространстве, сопряженном с R^k, – норму $\| z\|^* = \sum\limits_{i\in N_k} |z_i|$.

При этом под нормой матрицы $B=[b_{ij}]_{n\times m}\in R^{nm}$, будем понимать норму вектора $(b_{11},b_{12},\ldots,b_{nm})$.

Для всякого фиксированного числа $r\in N_3$ решение $x\in Q_r(C)$ назовем устойчивым, если

$$\exists\varepsilon>0\ \forall B\in\mathfrak{R}(\varepsilon)\ \ (x\in Q_r(C+B)),$$

где множество возмущающих матриц задается формулой

$$\mathfrak{R}(\varepsilon)=\{B\in R^{nm}: ||B||<\varepsilon\}.$$

Другими словами, решение $x\in Q_r(C)$ устойчиво, если найдется такое число $\varepsilon > 0$, что x остается эффективным решением соответствующего вида в любой возмущенной задаче $Z^n_r(C+B)$, $B\in\mathfrak{R}(\varepsilon)$

Радиусом устойчивости решения $x\in Q_r(C)$ назовем число

$$\rho^n_r(x,C)=\begin{cases}\sup\ \Omega_r(x,C), & \text{если } \Omega_r(x,C)\neq\varnothing,\\ 0 & \text{в противном случае,}\end{cases}$$

где $\Omega_r(x,C)=\{\varepsilon>0:\ \forall B\in\mathfrak{R}(\varepsilon)\ (x\in Q_r(C+B))\}.$

В силу включения (1) очевидны неравенства

$$\forall n\in N\ \ \forall x\in Q_1(C)\ \ (\rho^n_1(x,C)\leq\rho^n_2(x,C)\leq\rho^n_3(x,C)),$$

$$\forall n\in N\ \ \forall x\in Q_2(C)\ \ (\rho^n_2(x,C)\leq\rho^n_3(x,C)).$$

Для того, чтобы вывести формулу радиуса устойчивости эффективного решения, нам понадобится следующая известная

Лемма [2]. Пусть векторы $x,x'\in X$ таковы, что для некоторого индекса $i\in N_n$ справедливо неравенство $C_i(x'-x)>0$. Тогда для всякого вектора $b\in R^m$ такого, что $||b||\cdot||x'-x||^*<C_i(x'-x)$, имеет место неравенство

$$(C_i+b)(x'-x)>0.$$

Введем обозначение

$$\varphi^n(x,C) := \min_{x' \in X\setminus\{x\}} \max_{i \in N_n} \frac{C_i(x'-x)}{\|x'-x\|^*}.$$

Очевидны утверждения:

$$\forall x \in Q_3(C) \ \ \forall C \in R^{nm} \ \ (\varphi^n(x,C) \geq 0), \ x \in Q_1(C) \ \ \Leftrightarrow \ \varphi^n(x,C) > 0. \qquad (2)$$

Теорема. При любых числах $r \in N_3$, $n \in N$ и любой матрице $C \in R^{nm}$ для радиуса устойчивости всякого решения $x \in Q_r(C)$ векторной задачи ЦЛП $Z^n_r(C)$ справедлива формула

$$\rho^n_r(x,C) = \varphi^n(x,C).$$

Доказательство. Пусть $C \in R^{nm}$, r – фиксированное число из множества N_3, $x \in Q_r(C)$, $\varphi := \varphi^n_r(x,C)$.

Сначала докажем неравенство $\rho^n_r(x,C) \geq \varphi$.

Если $\varphi = 0$, то это неравенство очевидно. Пусть $\varphi > 0$. Тогда в силу (2) $x \in Q_1(C)$. Пусть возмущающая матрица $B \in \mathfrak{R}(\varphi)$. Согласно определению числа φ для любого решения $x' \in X\setminus\{x\}$ существует такой индекс $i \in N_n$, что выполняются неравенства

$$\frac{C_i(x'-x)}{\|x'-x\|^*} \geq \varphi > \| B_i \|.$$

Отсюда по лемме имеем

$$(C_i + B_i)(x'-x) > 0.$$

Поэтому с учетом определения множества Смейла находим $x \in Q_1(C+B)$. Следовательно (ввиду (1)), заключаем

$$\forall r \in N_3 \ \ \forall B \in \mathfrak{R}(\varphi) \ (x \in Q_r(C+B)).$$

Откуда и выводим неравенство $\rho^n_r(x,C) \geq \varphi$. Далее докажем неравенство $\rho^n_r(x,C) \leq \varphi$. Пусть $\varepsilon > \varphi$. Тогда согласно определению числа φ справедлива формула

$$\exists x' \in X\setminus\{x\} \ \ \forall i \in N_n \ \ (\varphi \geq \frac{C_i(x'-x)}{\|x'-x\|^*}) \qquad (3)$$

Рассмотрим возмущающую матриц $B = [b_{ij}]_{n \times m}$, элементы которой для любого индекса $i \in N_n$ задаются по формуле

$$b_{ij} = \begin{cases} \alpha \text{ при } x'_j \leq x_j, \\ -\alpha \text{ при } x'_j > x_j, \end{cases}$$

где $\varphi<\alpha<\varepsilon$. Очевидно, что $B\in\mathcal{M}(\varepsilon)$.

Далее с учетом неравенств (3) и строения матрицы B легко убедиться в справедливости для любого индекса $i\in N_n$ следующих соотношений

$$(C_i+B_i)(x'-x)=C_i(x'-x)+B_i(x'-x)=C_i(x'-x)-\alpha\,\|x'-x\|^*<$$
$$<C_i(x'-x)-\varphi\,\|x'-x\|^*<0.$$

Поэтому $x\notin Q_r(C+B)$.

Итак, для любого числа $\varepsilon>\varphi$ существует такая матрица $B\in\mathcal{M}(\varepsilon)$, что $x\notin Q_r(C+B)$. Поэтому для всякого числа $\varepsilon>\varphi$ выполняется неравенство $\rho_r^n(x,C)<\varepsilon$. Следовательно, справедливо неравенство $\rho_r^n(x,C)\leq\varphi$.

Собирая все сказанное, убеждаемся в справедливости теоремы.

Литература

1. Подиновский В.В., Ногин В.Д. Парето-оптимальные решения многокритериальных задпч. М.: Наука. 1982.
2. Емеличев В.А., Подкопаев Д.П. // Журнал вычислительной математики и математической физики. 1998. Т.38. № 11. С. 1801-1805.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ МОДЕЛИРОВАНИЕ НАПРЯЖЕННОГО СОСТОЯНИЯ В МАССИВЕ В ОКРЕСТНОСТИ ВЫРАБОТОК БОЛЬШИХ ПРОТЯЖЕННОСТЕЙ.

Лазуренко Ю. Н.

Белорусский государственный университет

Пр. Ф. Скорины 4, 220050 г. Минск, Беларусь.

В докладе описывается некоторый подход к моделированию геомеханических процессов в массиве, нарушенном проведением выработок больших протяженностей.

Ключевые слова: выработка, лава, «длинный очистной забой», целик.

При выполнении модельных исследований по изучению геомеханического состояния массива в окрестности выработанного пространства, представляющего собой результат использования технологических схем отработки “длинными очистными забоями”, одной из главнейших является проблема корректной формулировки модельных задач.

Формулировка модельной задачи включает в себя обоснование геомеханической схемы развития деформационных процессов в окрестности выработ-