Николай Мурашко
Брестский инженерно-
строительный институт

РАСЧЕТ УЗЛОВ СТАЛЬНЫХ ТРУБЧАТЫХ КОНСТРУКЦИЙ ПРИ ДЕЙСТВИИ НАГРУЗКИ НА ОБОЛОЧКУ ЧЕРЕЗ ПАРНЫЕ ПОПЕРЕЧНЫЕ ЭЛЕМЕНТЫ ВКЛЮЧЕНИЯ

В строительных металлических трубчатых конструкциях конструктивное решение большого числа узлов решается посредством поперечных элементов жесткости. Это Т-образные узлы примыкания трубчатых стоек, сплющенных из плоскости фермы и узлы крепления связей к трубчатым поясам ферм, опорные столики для опирания прогонов покрытия, узлы крепления подвесного транспортного оборудования, лацменные узлы крепления оттяжек и предварительно напряженных раскосов решетки мачтовых и башенных сооружений, узлы опирания трубопроводов и т.п.

В этом случае тонкостенные цилиндрические оболочки поясов стальных трубчатых конструкций испытывают локальное нагружение в месте контакта конструктивных элементов включения. Методика решения контактной задачи сопряжения цилиндрической упругой оболочки-трубы с кольцевым ребром изложена в статье [1]. В основу исследования напряженно-деформированного состояния (НДС) Т-образного узла трубчатой фермы положена разработанная авторами методика на базе моментной технической теории упругих тонких оболочек [2].

В данной статье приводятся результаты исследования НДС цилиндрической оболочки-трубы при разных геометрических параметрах конструктивных элементов прикрепления.

По прежнему в качестве расчетной схемы принимается шарнирно- опертая по торцам замкнутая круговая цилиндрическая оболочка длиной ℓ, радиусом кривизны r и толщиной стенки h (рис. 1). Толщина ребра считается пренебрежимо малой и поэтому передача нагрузки осуществляется через две боковые плоскости контакта по толщине оболочки на длине $2\varphi_0 r$.

Контактная нагрузка представляется в виде поперечных $Q_1(\varphi)$

и сдвигающих $S_1(\varphi)$ сил на единицу длины в функции центрального угла φ, положительные направления которых наряду с внутренними силовыми факторами показаны в продольном и кольцевом сечениях оболочки.

Неизвестные контактные нагрузки представлены в виде функциональных рядов при $|\varphi|\le\varphi_0$: $Q_1(\varphi)=\sum_{k=0,1,2}^{\infty} A_k q_k(\varphi)$ и $S_1(\varphi)=\sum_{k=0,1,2}^{\infty} B_k s_k(\varphi)$, где $q_k(\varphi)$ и $s_k(\varphi)$ - некоторые линейно независимые системы функций, принимающие нулевые значения при $|\varphi|>|\varphi_0|$. С учетом замкнутости оболочки, симметрии $Q_1(\varphi)$ и косой симметрии $S_1(\varphi)$ можно эти нагрузки представить в обобщенном виде для любого угла φ [I]:

$$Q_1(\varphi)=\sum_{n=0,1,2.}^{\infty} Q_{1n}\cos n\varphi;\quad S_1(\varphi)=\sum_{n=0,1,2.}^{\infty} S_{1n}\sin n\varphi, \qquad (I)$$

где $Q_{1n}=\sum_{k=0,1,2}^{\infty} A_k a_{kn}$; $S_{1n}=\sum_{k=0,1,2.}^{\infty} B_k b_{kn}$; $a_{kn}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi_0} q_k(\varphi)\cos n\varphi\, d\varphi$;

$$b_{kn}=\frac{2}{\pi}\int_0^{\varphi_0} s_k(\varphi)\sin n\varphi\, d\varphi$$

Проектируя с двух плоскостей контакта ребра с оболочкой усилия $Q_1(\varphi)$ и $S_1(\varphi)$ на ось z, найдем их равнодействующую радиальную силу:

$$P=2r\int_{-\pi}^{\pi}[Q_1(\varphi)\cos\varphi+S_1(\varphi)\sin\varphi]\,d\varphi=2\pi r(Q_{11}+S_{11}) \qquad (2)$$

Интегрируя выражения, определяющие эпюры поперечной и сдвигающей контактной нагрузки в кольцевом сечении, найдем составляющие равнодействующей радиальной силы $P^Q+P^S=P$.

$$Q_1(\varphi)=A_0+\sum_{k=1,3,5.}^{K} A_{\frac{k+1}{2}}\cos\frac{k\pi\varphi}{2\varphi_0};\quad S_1(\varphi)=B_0\frac{\varphi}{\varphi_0}+\sum_{k=2,4,6.}^{K} B_{\frac{k}{2}}\sin\frac{k\pi\varphi}{2\varphi_0} \qquad (3)$$

Тогда

$$P^Q=2r\Big[\sin\varphi_0+\sum_{k=1,3,5.}^{K} A_{\frac{k+1}{2}}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\frac{\frac{\pi k}{2}\varphi_0\cos\varphi_0}{(\pi k/2)^2-\varphi_0^2}\Big];$$

$$P^S=2r\Big[B_0\Big(\frac{\sin\varphi_0}{\varphi_0}-\cos\varphi_0\Big)+\sum_{k=2,4,6.}^{K} B_{\frac{k}{2}}(-1)^{\frac{k}{2}}\frac{\pi k/2\cdot\varphi_0\sin\varphi_0}{\varphi_0^2-(\pi k/2)^2}\Big] \qquad (4)$$

Итоговые результаты исследования напряженно-деформированного моментного состояния трубы пояса Ø 219х5 мм, нагруженной радиальной нагрузкой P при разных углах ее обхвата кольцевыми ребрами приведены в таблице I. Длина трубы принимается равной длине панели верхнего пояса трубчатой фермы ℓ =3000мм, что превышает длину $2r\gamma_2=4r\sqrt{r/h}$, при которой теоретическая предпосылка об отсутствии влияния торцов оболочки на решение контактной задачи оказывается справедливой. Изгиб трубы, как балки кольцевого сечения не рассматривается, то есть $W_* = 0$,

Таблица I

Угол обхвата	Нагрузка (кН)		Внутренние усилия										Коэффициент концентрации K_p	Прогиб W_i (см)	
			$M_i \cdot 10^{-2}$ (кН·м)				T_i (кН)				Q_i ; S_i (кН)				
$2\varphi_0$ рад	P^a P^s	P	M_1^a M_1^s	M_1	M_2^a M_2^s	M_2	T_1^a T_1^s	T_1	T_2^a T_2^s	T_2	Q_1	S_1		W^a W^s	W
I	2	3	4	5	6	7	8	9	I0	II	I2	I3	I4	I5	I6
0	46,25	46,25	I6,5	I6,5	I6,5	I6,5	–	–	–	–	–	–	–	0,5	0,5
$\frac{\pi}{3}$	62,32 -3,09 56,69	59,23 56,69	8,49 0,06 8,42	8,55 8,42	8,I8 0,02 8,I6	8,20 8,I6	-8,97 -0,I0 -8,87	-9,07 -8,87	-II,98 0,32 -II,74	-II,66 -II,74	89,89 89,54	0,222 –	I7,5 I8,2	0,4627 -0,0297 0,433	0,433
$\frac{\pi}{2}$	74,80 -8,66 64,77	66,I4 64,77	5,57 0,I0 5,45	5,67 5,45	5,I5 0,06 5,08	5,2I 5,08	-7,2I -0,I5 -6,95	-7,36 -6,95	-II,I9 I,06 -I0,45	-I0,I3 -I0,45	39,50 38,66	0,50I –	I0,3 I0,3	0,39I -0,0374 0,3536	0,3536
$\frac{2\pi}{3}$	80,49 -II,75 68,I5	68,74 68,I5	[illegible],I5 0,27 3,59	3,88 3,59	3,66 -0,I4 3,I8	3,52 3,I8	-5,73 0,II -4,72	-5,62 -4,72	-I0,47 2,44 -8,72	-8,03 -8,72	23,I9 20,86	-43,3 –	7,76 7,06	0,293I -0,043I 0,25	0,25
π $W_p=0$ $\ell/\ell_0=\infty$	I5,76 55,09	70,85	3,26 I,45	I,8I	2,86 -0,8	2,03	-5,09 -0,36	-5,45	-7,36 I,I2	-6,42	I0,I6	-44,2	4,96	0,0769 -0,0769	0,00
$W_p=0$ $\ell/\ell_0=\frac{5}{6}$	26,86 43,2I	70,07	I,63 –[illegible],4	I,27	I,39 -0,2	I,2I	-3,45 -I,83	-5,28	-4,66 -I,33	-5,99	4,994	-0,I3	2,46	0,03I7 -0,03I7	0,0

поскольку пояс трубчатой фермы, как правило, не работает на местный изгиб за счет уравновешивания нагрузки P диаметрально противоположным давлением.

Ниже приводится моментное напряженное состояние пояса, полученное с учетом действительного закона распределения контактных нагрузок, выявленных по изложенной методике в предположении вмятия трубчатой стойки на величину толщины оболочки поясной трубы (θ_1=I).

Следует отметить достаточно быструю сходимость решения в одинарных рядах для перемещений, когда оказалось достаточным не более I5 членов ряда. Сравнительно хорошая сходимость наблюдалась и при вычислении внутренних силовых факторов, так что при вычислении моментов удерживалось 50, а поперечных сил 25 членов ряда, в то время как решение задачи в двойных рядах даже при локальном нагружении оболочек требует значительно большего их числа.

На основе численных решений построены сравнительные эпюры контактных нагрузок Q_1 и S_1, перемещений W, внутренних моментов M_1 и M_2, а также цепных усилий T_1 и T_2 в кольцевом и продольном направлении оболочки при разных углах обхвата трубы кольцевыми ребрами ($\pi/3; \pi/2; 2\pi/3; \pi$). Некоторые из них представлены на рис.2. Причем, с целью сравнения решений приводятся эпюры, полученные без учета сдвигающей составляющей контактной нагрузки (штриховые линии).

Как видно из эпюр, в сечении трубы под концом ребра наблюдается неравномерное распределение усилий с быстрым затуханием их в продольном и кольцевом направлениях по мере удаления от места приложения нагрузки. Что касается деформированного состояния, то затухание перемещений стенки оболочки весьма медленное.

Данные приведены для одного и того же значения θ_1= I в предположении отсутствия сдвига в шве соединения ребра с трубой. В последней строке таблицы для угла обхвата $2\varphi_0=\pi$ приведены уточненные данные расчета.

Меридиональный и кольцевой изгибающие моменты оболочки при φ_0 =0 определены по асимптотическому решению для сосредоточенной силы

$$M_1 \approx M_2 = \frac{1+\mu}{4\pi} P_2 \ln \rho, \qquad (5)$$

где $\rho = \sqrt{\varphi^2 + \xi^2}$. Принимая при $\xi = 0$ $y = 0{,}68h$, находим $\rho = \frac{0.68h}{z} = 0{,}0318$ и затем величину усилий (табл. I).

Как видно из таблиц, жесткость соединения оболочка-ребро растет по мере увеличения угла обхвата. При этом закономерно уменьшаются максимальные изгибающие моменты в трубе под концом ребра, а следовательно и напряжения.

При исследовании рассматривался также частный случай приложения радиальной сосредоточенной силы в середине пролета оболочки через так называемое "точечное" кольцевое ребро. В этом случае радиальное перемещение оболочки для любого ее сечения (с силой в начале координат) будет иметь вид

$$W(\xi,\varphi) = P/\pi z \cdot \sum_{j=1,2} \sum_{n=1,2}^{\infty} y_n F_{jn}(\xi) \cos n\varphi \qquad (6)$$

Когда $\xi = \varphi = 0$ получаем максимальный прогиб оболочки в точке приложения сосредоточенной силы:

$$W_{max} = P/\pi z \cdot \sum_{n=1,2,\dots}^{\infty} y_n \qquad (7)$$

Реализовав решение на действие P = I кгс = 0,01кН, величина прогиба W = $1{,}08 \cdot 10^{-4}$ см.

Для сопоставления решений независимо от предыдущего, проведен расчет рассматриваемой трубы на действие сосредоточенной силы, приложенной через продольное "точечное" ребро. Максимальный прогиб в точке, определяемый по формуле $W_{max} = \frac{2P}{\ell} \sum_{n=1}^{\infty} y_n$ оказался также равным W = $1{,}08 \cdot 10^{-4}$ см. Следовательно, "совпадение" двух решений для сосредоточенной силы свидетельствует о правильности предлагаемого метода расчета. Что касается сходимости, то для определения радиальных перемещений по выше приведенным формулам достаточно удержать в решении не более 10 членов ряда.

При решении контактной задачи на действие продольного момента, передающегося через пару параллельных кольцевых ребер влиянием сдвигающих сил S при углах обхвата трубы $2\varphi_0 \leq 2\pi/3$ можно пренебречь. Поэтому в решении задачи условие контакта с учетом кососимметричной передачи нагрузки через кольцевые ребра может быть записано в следующем виде:

$$\sum_{j=1,2} \sum_{k=0,1,2,\dots}^{K} \sum_{n=0,1,2,\dots}^{\infty} A_k a_{kn} y_n \left[F_{jn}(0) - F_{jn}(2\xi_0)\right] \cos n\varphi + \sum_{k=0,1,2,\dots} A_k \omega_{1k}(\varphi), \qquad (8)$$

где $\omega_{1k}(\varphi)$ – прогиб кольцевых ребер, вычисленный для криволинейного консольного стержня длиной $\varphi_0 r$ при действии на него реактивных усилий контактной нагрузки $2\,Q_1(\varphi)$ и учитывающий их податливость. Из решения дифференциального уравнения кривого бруса постоянной жесткости найдены выражения прогибов от компонентов контактной нагрузки $q_k(\varphi)$:

$$\omega_{10}(\varphi)=r^4/EJ\cdot\left\{(1-\cos\varphi)+1/2\cdot\left[\varphi\sin(\varphi_0-\varphi)-\sin\varphi_0\sin\varphi\right]\right\};$$

$$\omega_{1k}(\varphi)=\frac{r^4}{EJ}\left\{\frac{\cos\frac{k\pi\varphi}{2\varphi_0}-\cos\varphi}{\left[\left(\frac{k\pi}{2\varphi_0}\right)^2-1\right]^2}+\frac{1}{2}\,\frac{\frac{k\pi}{2\varphi_0}}{\left[\left(\frac{k\pi}{2\varphi_0}\right)^2-1\right]}(-1)^{\frac{k-1}{2}}\left[\varphi\cos(\varphi_0-\varphi)-\sin\varphi\cdot\cos\varphi_0\right]\right\} \qquad (9)$$

Здесь, при определении жесткости сечения кольцевых ребер, их момент инерции принимался с учетом совместной работы с цилиндрической оболочкой в предположении недеформируемости сварного шва соединения, так что $J_p=\delta_2 h_\varphi/3$.

Решив контактную задачу методом коллокаций и вычислив коэффициенты A_k, определим НДС трубы от радиальной составляющей контактной нагрузки $Q_1(\varphi)$. В этом случае функции $F_{jn}(\xi)$; $F^*_{jn}(\xi)$; $F^{**}_{jn}(\xi)$; $M^*_{jn}(\xi)$; $M^{**}_{jn}(\xi)$; $T^*_{jn}(\xi)$; $T^{**}_{jn}(\xi)$ вычисляются для кососимметричной передачи нагрузки на оболочку через кольцевые парные элементы жесткости.

Численное исследование оболочки на кососимметричное нагружение при углах обхвата ее параллельными кольцевыми ребрами $2\varphi_0=\pi/2;\ 2\pi/3$ и относительном расстоянии между ними $2\xi_0=2{,}2;\ 6{,}6$ (рис. I), позволило определить несущую способность трубы и коэффициенты концентрации контактной нагрузки $K_p=\frac{2\varphi_0 r A_0}{p}$, как для абсолютно жесткого ребра, так и с учетом их податливости (табл. 2). При указанных параметрах варьировались также размеры кольцевых ребер постоянной жесткости, которые принимались h_φ =240; I20 мм, а толщина δ_2 = I2 мм.

Расчетом установлено, что несущая способность оболочки закономерно возрастает с увеличением относительного расстояния между ребрами $2\xi_0$ и с увеличением $2\varphi_0$. При этом пики контактных нагрузок резко затухают.

Анализ полученных результатов (табл. 2) показал, что влияние податливости кольцевых ребер постоянной жесткости при их высоте не менее радиуса оболочки незначительное, то есть ребро конечной жесткости при $h_\varphi \geq r$ можно принимать в решении

Таблица 2

Относительная длина между ребрами	Угол обхвата (рад)	Размеры кольцевых ребер (мм)		Коэффициенты контактной нагрузки					Нагрузка $P(кН); M(кН\,м)$		Коэффициент концентрац. K_σ	Прогиб под концом ребра
$2a/r$	$2\varphi_0$	h_φ	δ_2	A_0	A_1	A_2	A_3	A_4	P	M		W (см)
I	2	3		4	5	6	7	8	9	I0	II	I2
2,2	$\pi/2$	абсолютно жесткое		28973	-33623	I2936	-8579	4532	485,54	II7,5	I0,3	0,3536
	$2\pi/3$	абсолютно жесткое		I84I6	-2008I	6920	-4I76	2I32	59I,36	I43,II	7,I9	0,25
		240	I2	I8369	-I9965	6893	-4I52	2III	590,79	I42,97	7,I5	
		I20	I2	I8050	-I9576	6775	-4087	2072	588,8I	I42,49	7,07	
6,6	$\pi/2$	абсолютно жесткое		I2762	-I4964	5308	-3265	I608	2I6,57	I57,23	I0,2	0,3536
	$2\pi/3$	абсолютно жесткое		7637	-82I8	2960	-I796	9I8	252,65	I83,42	6,98	0,25
		240	I2	7627	-8205	2956	-I793	9I7	252,54	I83,34	6,96	
		I20	I2	7560	-8I22	2929	-I776	908	25I,8I	I82,8I	6,92	

контактной задачи абсолютно жестким. В этом случае погрешность по несущей способности узла составляет меньше I%.

Учет толщины ребра.

Так как толщина кольцевых ребер δ_2 в решении не учитывалась, то для уточнения несущей способности трубы проведен анализ эпюр напряжений в продольном направлении оболочки для случая передачи нагрузки через поперечные элементы с углами обхвата $2\varphi_0 = 2\pi/3$ и $2\varphi_0 = \pi$.

Исследование показало, что на расстоянии пяти толщин стенки трубы напряжения в ней незначительны. Обозначив это расстояние через $X_0 = 5h$, найдем коэффициент снижения концентрации напряжений при учете толщины кольцевого ребра:

$$\varkappa_K = (5h - 0{,}5\delta_2')/5h = 1 - \delta_2'/10h = 1 - \delta_2'/2X_0, \qquad (10)$$

где δ_2' – толщина ребра и двух сварных швов. При параметрах рассматриваемой трубы $\varnothing$ 219x5 мм и вводимых обозначений $r/h = 22$, выражение (10) можно записать в виде $\varkappa_K = 1 - 2{,}2\delta_2/r$. Следует отметить, что исследование затухания моментного состояния в виде краевого эффекта, который присущ локальным напряжениям, по С.П.Тимошенко [3] дало возможность определить нулевую точку. При этом $X_0 \approx 0{,}61\sqrt{rh}$. Покажем также на примере кольцевого ребра возможность перехода от базисной оболочки с учетом толщины ребер к произвольной оболочке. Если X_0 – нулевая моментная точка базисной оболочки, то для произвольной оболочки будем иметь:

$$X_0^* = \frac{1}{\Pi}\frac{r^*}{r}X_0 = \sqrt{r^*h^*}/\sqrt{rh}\cdot X_0 \qquad (11)$$

Тогда поправка на толщину ребра запишется:

$$\varkappa_K^* = 1 - \delta_2'/2X_0^* = 1 - \sqrt{rh/r^*h^*}\cdot\delta_2'/2X_0 = 1 - \delta_2'/10\Pi h^* \qquad (12)$$

Так как $\Pi = \sqrt{r^*/h^* \cdot 1/22} = 1/4{,}69\cdot\sqrt{r^*/h^*}$, то $\varkappa_K^* = 1 - \frac{\delta_2'}{2\sqrt{r^*h^*}} = 1 - \frac{\delta_2'}{2\omega^{1/2}h^*}$

Опуская звездочку, получим выражение поправки на толщину кольцевого элемента жесткости произвольной оболочки:

$$\varkappa_K = 1 - \delta_2'/2\omega^{1/2}h \qquad (13)$$

Разделив значения P (табл.I) на $\varkappa_K < 1$, найдем величину несущей способности трубы.

Следует отметить, что решение контактной задачи было выполнено с 5-ю коэффициентами нагрузки как радиального, так и тангенциального направлений (K =4), что предопределило выбор системы I0 линейных уравнений совместности перемещений

$$\sum_{j=1;2}\sum_{k=0,1,2,}^{k}\sum_{n=0,1,2,}^{\infty} A_k a_{en} a_{kn} \mathcal{F}_{jn}(0) + \sum_{j=1;2}\sum_{k=0,1,2,}^{k}\sum_{n=2,3,}^{\infty} B_k a_{en} b_{kn} \hat{\mathcal{F}}_{jn}(0) - \theta_1 h a_{e1} = 0;$$

$$\sum_{j=1;2}\sum_{k=0,1,2,}\sum_{n=0,1,2,} A_k a_{en} a_{kn} n \mathcal{F}_{jn}^{**}(0) + \sum_{j=1;2}\sum_{k=0,1,2,}^{k}\sum_{n=2,3,}^{\infty} B_k a_{en} b_{kn} n \hat{\mathcal{F}}_{jn}^{**}(0) + \theta_1 h a_{e1} = 0, \qquad (I4)$$

где a_{kn} принимается по формулам:

$$a_{kn} = \frac{2}{\pi n}\frac{(-1)^n \cos n\varphi}{\frac{\pi(2K-1)}{2n\varphi_0} - \frac{2n\varphi_0}{\pi(2K-1)}}; \quad b_{kn} = \frac{2}{\pi n}\frac{(-1)^K \sin n\varphi_0}{\frac{n\varphi_0}{\pi K} - \frac{\pi K}{n\varphi_0}} \qquad (I5)$$

Условие контакта решалось также методом коллокаций, выбирая точки контакта на длине дуги ребра $\pm\varphi_i r$ в соответствии с числом коэффициентов контактной нагрузки.

Таким образом порядок системы определяется количеством искомых A_K и B_K. Величины коэффициентов контактной нагрузки при разных углах обхвата оболочки кольцевыми ребрами приводятся в таблице 3.

Таблица 3

Угол обхвата $2\varphi_0$ рад.	Коэффициенты контактной нагрузки					Примечание
	A_0 / B_0	A_1 / B_1	A_2 / B_2	A_3 / B_3	A_4 / B_4	
I	2	3	4	5	6	7
0	–	–	–	–	–	
	0,00	0,00	0,00	0,00	0,00	-
$\pi/3$	8989	-III39	3962	-2547	I49I	с учетом S_1
	22,2	-83,6	38,4	-26,0	II,4	
	8954	-III35	3945	-25I3	I448	без уч. S_1
$\pi/2$	3956	-4560	I649	-I0I5	50I	с учетом S_1
	50,I	-I96,8	89,4	-62,8	29,3	
	3866	-454I	I6I0	-990	488	без уч. S_1
$2\pi/3$	23I9	-2477	880	-507,3	234	с учетом S_1
	-4327	2877	-I692	I346	-63I,7	
	2086	-225I	809	-49I	25I	без уч. S_1
π: $W_p=0$, $\frac{1}{G_W}=\infty$	I0I6	-I200	369,3	-I65,8	30,07	с учетом S_1
	-4420	3234	-I973	I652	-834,9	
π: $W_p\neq0$, $\frac{1}{G_W}=\frac{E}{6}$	499,4	-476	I28,6	-77,2	36,36	
	-I3,27	264,7	-88,22	47,63	-I7,59	

ЛИТЕРАТУРА

1. Ю.В.Соболев, Н.Н.Мурашко. Теоретическое исследование бесфасоночного Т-образного узла трубчатой фермы. Изв. вузов, "Строительство и архитектура", №2, 1976.

2. В.З.Власов. Общая теория оболочек. Гостехиздат,1949.

3. С.П.Тимошенко, С.Войновский-Кригер. Пластинки и оболочки. Госфизматиздат, М., 1963, 635 с.