Александр Хамутовский
Брестский инженерно-
строительный институт

ПРОЕКТИРОВАНИЕ СТАЛЬНЫХ КОЛОНН МИНИМАЛЬНОГО ОБЪЕМА

Рассматриваются колонны ступенчато-переменного сечения, для которых известны геометрия системы, форма поперечного сечения ($J_n = \kappa_n A_n^{m_n}$), механические свойства материала, величины осевых внешних сил, приложенных в местах изменения сечений. Отыскивается такое распределение материала вдоль оси стержня, при котором объем колонны минимален и выполняются условия устойчивости, прочности и конструктивные требования. Решается задача с помощью необходимых условий оптимальности дискретного принципа максимума [I,2], для которого уравнения преобразований записываются в виде

$$X_i^n = T_i^n \left(X^{n-1}; \theta_j^n \right) \qquad \begin{array}{l} i = 1,2,3,\ldots S \\ j = 1,2,3,\ldots t \end{array}$$

где X_i^n - вектор переменных состояния на n -ом этапе (фазовые координаты).

θ_j - вектор управляющих переменных.

Этому условию соответствуют уравнения упругой линии стержня, записанные в формуле метода начальных параметров (3), где за переменные состояния принимаются прогибы X_1^n, углы поворота X_2^n, изгибающие моменты X_3^n, недеформационная поперечная сила X_4^n. За управляющие переменные принимаются критические параметры ν_n и погонные жесткости стержней i_n. Для сжатого стержня эти уравнения после преобразований записываются в виде:

$$\begin{cases} X_1^n = X_1^{n-1} + X_2^{n-1} \dfrac{\ell_n}{\nu_n} \sin\nu_n - X_3^n \dfrac{\ell_n}{f_n}(1-\cos\nu_n) - X_4^n \dfrac{\ell_n^2}{f_n \nu_n}(\nu_n - \sin\nu_n) \\ X_2^n = X_2^{n-1}\cos\nu_n - X_3^{n-1} \dfrac{\nu_n}{f_n} \sin\nu_n - X_4^n \dfrac{\ell_n}{f}(1-\cos\nu_n) \\ X_3^n = X_2^{n-1} \dfrac{f_n}{\nu_n} \sin\nu_n + X_3^{n-1}\cos\nu_n + X_4^{n-1} \dfrac{\ell_n^n}{\nu_n} \sin\nu_n \\ X_4^n = X_4^{n-1} \end{cases} \qquad \text{(I)}$$

Если на участке продольная сила равна нулю, то уравнения будут иметь вид:

$$\begin{cases} X_1^n = X_1^{n-1} + X_2^{n-1}\ell_n - X_3^{n-1}\dfrac{\ell_n}{2 i_n} - X_4^{n-1}\dfrac{\ell_n^2}{6 i_n} \\ X_2^n = X_2^{n-1} - X_3^{n-1}\dfrac{\ell_n}{i_n} - X_4^{n-1}\dfrac{\ell_n}{2 i_n} \\ X_3^n = X_3^{n-1} + X_4^{n-1}\ell_n \\ X_4^n = X_4^{n-1} \end{cases} \qquad (2)$$

Здесь $i_n = E J_n/\ell_n$, $f_n = \ell_n N_n$, $\nu_n = (\ell_n f_n / E J_n)^{1/2}$

N_n – продольная сжимающая сила на n –ом участке; ℓ_n – длина участка.

Целевая функция $V = \sum \ell_n A_n$, приведенная к стандартному виду дискретного принципа максимума запишется в виде: для сжатых участков $X_5^n = X_5^{n-1} + \ell_n / \nu_n^{2/m_n}$; для участков, где $N = 0$ $X_5^n = X_5^{n-1} + a_n i_n^{2/m_n}$

Здесь $b_n = \ell_n (\ell_n f_n / K_n E)^{1/m_n}$, $a_n = \ell_n (\ell_n / K_n E)^{1/m_n}$

Для нахождения оптимального управления необходимо составить функцию Гамильтона H_n и ввести сопряженный вектор Z^n

$$H_n = \sum_{i=1}^{5} Z_i^n T_i^n (X^{n-1}; \theta_n) \ ; \ Z_i^{n-1} = \partial H_n / \partial X_i^{n-1} \qquad (3)$$

Оптимальное управление находится из условий:

$$\partial H_n / \partial \theta_n = 0 \qquad (4)$$

Используя граничные условия для фазовых координат, сопряженного вектора и исключив их из уравнений (I) – (4) придем к системе нелинейных трансцендентных уравнений, которая при наличии сжимающей продольной силы на последнем участке имеет вид:

$$A = 0$$

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A / \partial \nu_n}{\partial A / \partial \nu_s} = \dfrac{m_s b_n \nu_s^{2/m_{s+1}}}{m_n b_s \nu_n^{2/m_{n+1}}} \\ \dfrac{\partial A / \partial i_k}{\partial A / \partial \nu_s} = -\dfrac{m_s a_k}{2 b_s m_k} i^{1/m_{k-1}} \nu^{2/m_{s+1}} \end{cases} \qquad (5)$$

При отсутствии продольной силы на последнем участке система примет вид:

$$\begin{cases} \dfrac{\partial A/\partial \nu_n}{\partial A/\partial i_n} = -\dfrac{2m_s b_n}{m_n a_s i_s^{1/m_s-1} \nu_n^{2/m_n+1}} \\ \dfrac{\partial A/\partial i_k}{\partial A/\partial i_s} = \dfrac{m_s a_k i_k^{1/m_k-1}}{m_k a_s i_s^{1/m_s-1}} \end{cases} \qquad (6)$$

Здесь $A = f(\nu, i)$ – уравнение устойчивости.

Решив систему уравнений (5) или (6) находят оптимальные критические параметры и погонные жесткости, которые должны удовлетворять конструктивным ограничениям и условиям прочности

$$\nu_n \leqslant \left(\ell_n^{m_n+1} \sigma_0^{m_n} / K_n E f_n^{m_n-1} \right)^{1/2}$$

Если эти условия не выполняются на каких-то участках, то размеры поперечных сечений последних назначаются исходя из этих требований. Учитывая, что условия устойчивости будут заведомо выполняться, то управляющие переменные этих участков исключаются из числа варьируемых параметров, а оставшиеся находятся путем составления и решения новой системы нелинейных уравнений вида (5) или (6) .

В этом случае ν_s или i_s – управляющая переменная последнего участка с варьируемой переменной.

Часто в проектной практике необходимо для оценки эффективности принятого решения сравнить его с оптимальным. Получать и решать в этом случае систему уравнений (5) или (6) не рационально. Поэтому на основе численного эксперимента получены для колонн на жестких опорах простые выражения для определения минимального объема. При этом считается, что материал работает в упругой стадии и продольная сила по длине колонны постоянна:

$$V = \ell^2 (0,1F)^{1/2} V_0 f(n)$$

где F – продольная сжимающая сила в кН, ℓ – длина колонны; n – число участков постоянной жесткости равной длины; V_0 –

объем колонны длиной ℓ = I м и сжатой силой F = I кН при числе участков $n = 2$.

Функции $f(n)$ и V_0 для круглого поперечного сечения и модуле упругости материала $E = 2{,}1 \cdot 10^5$ мПа имеют вид для шарнирно-опертой колонны $f(n) = 1{,}014 - 0{,}05716\,(n - 1{,}94)^{1/2}$ $V_0 = 2{,}462 \cdot 10^{-4}$ м^3; консольной $V_0 = 4{,}5771 \cdot 10^{-4}$ м^3 $f(n) = 1 - 0{,}0271\,(n - 2)^{1/2}$; защемленной с двух концов $f(n) = 1{,}065 - 0{,}065\,(n - 1)^{1/2}$, $V_0 = 1{,}231 \cdot 10^{-4}$ м^3; шарнирно-опертой на одном конце и защемленной на другом
$f(n) = 1 - 0{,}008\,(n - 2)^2$. $V_0 = 1{,}6992 \cdot 10^{-4}$ м^3

Выбор структуры формул производился эвристическим методом а оценка параметров велась методом наименьший квадратов.

Изложенная выше методика позволяет найти оптимальные размеры по..еречных сечений, а следовательно минимальную массу конструкций при учете ограничений по устойчивости, прочности, конструктивных.

ЛИТЕРАТУРА

1. Болтянский В.Г. Оптимальное управление дискретными системами. – М.; Наука, 1973. – 408 с.
2. Фан Лянь-цень, Вань Чу-сен. Дискретный принцип максимума.– М.: Мир, 1967. – 215 с.
3. Снитко Н.К. Строительная механика, – М.: Высшая школа, 1980. – 482 с.