

К ВОПРОСУ РАЦИОНАЛЬНОГО ОЧЕРТАНИЯ ОСИ ТРЕХШАРНИРНОЙ АРКИ

Яромич Д.Н., Хамутовский А.С.

Вопросы оптимизации строительных конструкций, а также их синтез, т.е. выбор рациональных очертаний, являются одними из важнейших в строительной механике. В данной работе приводятся рациональные очертания осей трехшарнирных арок при различных нагрузках, так как в учебной и научно-технической литературе по строительной механике эти вопросы освещены недостаточно [1]÷[6].

Рациональным считается такое очертание оси арки, когда изгибающие моменты в любом сечении равны нулю. Алгоритм нахождения таких очертаний следующий: из уравнений статики находят опорные реакции, а затем составляют выражение для определения изгибающего момента в произвольном сечении арки. Приравняв это выражение к нулю, находят рациональный закон изменения ординат оси арки. По этому алгоритму получен ряд уравнений рационального очертания осей трехшарнирных арок, которые в литературе не встречаются.

1. Арка с опорами на разном уровне при действии трапециевидальной нагрузки и сосредоточенной силы (рис. 1 а,б).

Участок АС: $0 \leq x \leq \alpha l$

$$y = x \operatorname{tg} \theta + \frac{a [bl^2 x + 6d(1-\alpha) \cdot l^2 x - 3g_0 l x^2 - cx^3]}{\alpha \cdot l^3 A}$$

где $a = f - \alpha \cdot \operatorname{tg} \theta$; $b = g + 2g_0$; $c = g - g_0$; $d = \beta g - \beta_0 g_0$;

$$A = b + 6d(1-\alpha) - 3\alpha g_0 - c\alpha^2. \quad (1)$$

Участок СВ: $\alpha l \leq x \leq l$

$$y = x \operatorname{tg} \theta + \frac{a [bl^2 x + 6\alpha \cdot l^2 d(l-x) - 3g_0 l x^2 - cx^3]}{\alpha \cdot l^3 A}$$

Получим из этих уравнений ряд частных случаев.

1.1. $\beta = \beta_0$, т.е. $P=0$.

$$y = x \operatorname{tg} \theta + \frac{ax(bl^2 - 3g_0 l x - cx^2)}{\alpha \cdot l^3 (b - 3\alpha \cdot g_0 - c\alpha^2)}$$

Положение вершины арки ($y=y_{max}$) зависит от места расположения шарнира, отношения g/g_0 , угла θ и определяется по выражению

$$x_b = -\frac{g_0 l}{c} + l \left[\frac{g_0^2}{c^2} + \frac{\alpha \cdot \operatorname{tg} \theta (b - 3\alpha \cdot g_0 - c\alpha^2)}{3ac} + \frac{b}{3c} \right]^{1/2}$$

При некоторых значениях выше указанных величин вершины может и не быть, так как ординаты оси арки будут все время возрастать.

1.2. $\theta=0$, $P=0$

$$y = \frac{fx(bl^2 - 3g_0 l x - cx^2)}{\alpha \cdot l^3 (b - 3\alpha \cdot g_0 - c\alpha^2)}, \quad x_b = \frac{-g_0 l + l [(g^2 + gg_0 + g_0^2)/3]^{1/2}}{c}$$

Для этого частного случая положение вершины не зависит от расположения шарнира.

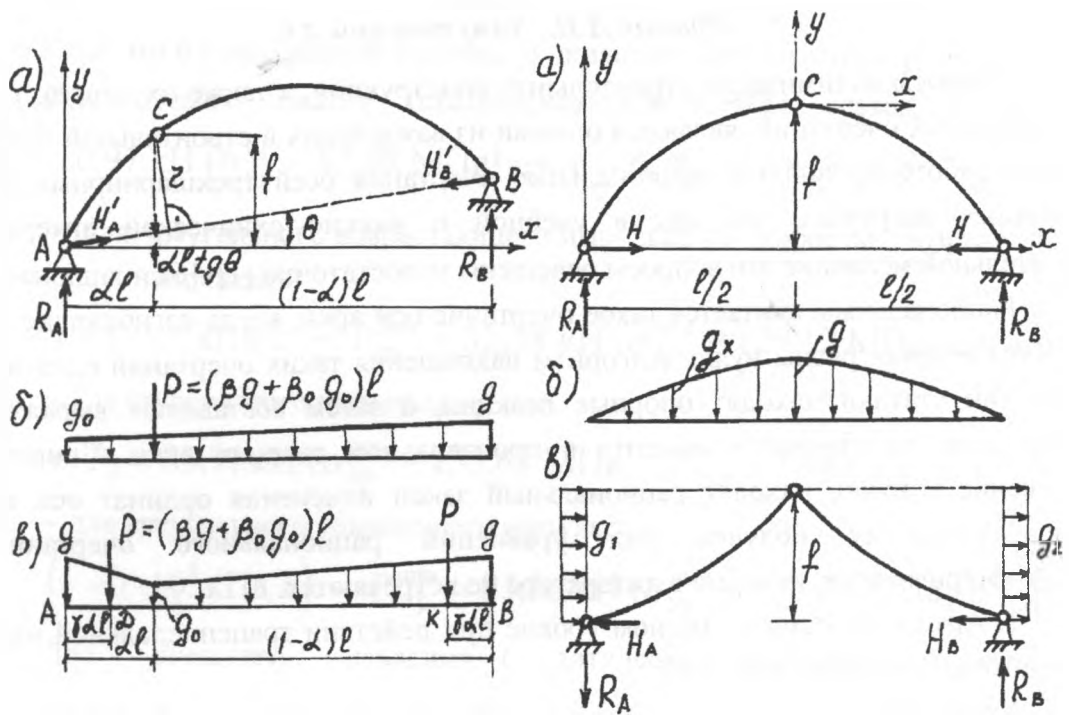


Рис.1 Схемы арок и нагрузок Рис.2.

1.3. $\theta=0, P=0, \alpha=0.5$

$$y = \frac{8fx(bl^2 - 3g_0lx - cx^2)}{3l^3(g + g_0)}$$

Положение вершины определяется также как и в пункте 1.2.

1.4. $\theta=0, P=0, g_0=0, \alpha=0.5$

$$y = \frac{8fx(l^2 - x^2)}{3l^3}, \quad x_h = \frac{l}{\sqrt{3}} = 0.5774l, \quad y_{max} = 1.0264f$$

1.5. $\theta=0, P=0, g=0, \alpha=0.5$

$$y = \frac{8fx}{3l^3}(2l^2 - 3lx + x^2), \quad x_b = 0.4226l, \quad y_{max} = 1.0264f$$

1.6. $\theta=0, P=0, g = g_0, \alpha=0.5$

$$y = \frac{4f}{l^2}x(l-x), \quad x_b = 0.5l, \quad y_{max} = f$$

2. Арка с опорами на разном уровне при действии двух трапециевидальных нагрузок и сосредоточенных сил (рис.1 а, в). $0 \leq \alpha \leq 0.5, 0 \leq \gamma \leq 1$.

Участок AD: $0 \leq x \leq \gamma \alpha l$

$$y = x \operatorname{tg} \theta + \frac{a[(b + \alpha \cdot c) \alpha \cdot l^2 x + 6\alpha \cdot dl^2 x - 3g\alpha \cdot lx^2 + cx^3]}{\alpha^2 l^3 B}$$

где $B = b(1-\alpha) + 6\gamma \cdot d$.

Участок DC: $\gamma\alpha l \leq x \leq \alpha l$

$$y = x \operatorname{tg} \theta + \frac{a[(b + \alpha \cdot c)\alpha \cdot l^2 x + 6\gamma\alpha^2 dl^3 - 3g\alpha \cdot lx^2 + cx^3]}{\alpha^2 l^3 B}$$

Участок СК: $\alpha l \leq x \leq (1 - \gamma\alpha)l$

$$y = x \operatorname{tg} \theta + \frac{a[(b - 2c\alpha) \cdot l^2 x + c\alpha^2 l^3 - 3g_o lx^2 + 6\gamma\alpha \cdot dl^3 - c(x - \alpha \cdot l)^3 / (1 - \alpha)]}{\alpha \cdot l^3 B}$$

Участок KB: $(1 - \gamma\alpha)l \leq x \leq l$

$$y = x \operatorname{tg} \theta + \frac{a[(b - 2c\alpha) \cdot l^2 x + c\alpha^2 l^3 - 3g_o lx^2 + 6dl^2(l - x) - c(x - \alpha \cdot l)^3 / (1 - \alpha)]}{\alpha \cdot l^3 B}$$

Точки D и K являются точками перегиба кривых так как в них $\operatorname{tg} \varphi_{лев} \neq \operatorname{tg} \varphi_{пр}$.
Некоторые частные случаи:

2.1. $\theta = 0, \alpha = 0.5, \gamma = 1$ — сила приложена в шарнире.

Для получения уравнений очертания оси арки необходимо в выше полученные выражения положить $\beta = 0.5\beta_0$; $\beta_o = 0.5\beta_o$, тогда получим для участка AC:

$$y = \frac{2fx[4cx^2 - 6glx + 3(g + g_o) \cdot l^2 + 6dl^2]}{l^3(b + 6d)} \quad (2)$$

Для участка CB уравнения получим, если в (2) заменим x на $(l - x)$. В шарнире C ордината будет максимальна и здесь происходит перегиб кривых $\operatorname{tg} \varphi_c^{лев} = -\operatorname{tg} \varphi_c^{пр} \neq 0$.

2.2. $\theta = 0, \alpha = 0.5, \beta = \beta_o = 0$.

Участок AC: $0 \leq x \leq l/2, \quad y = \frac{2fx[4cx^2 - 6glx + 3(g + g_o)l^2]}{bl^3}$

Для участка CB необходимо x заменить на $(l - x)$. В шарнире C расположена вершина $\operatorname{tg} \varphi_c = 0$.

2.3. $\theta = 0, \alpha = 0.5, \beta = \beta_o = 0, g_o = 0$.

Участок AC: $0 \leq x \leq l/2, \quad y = \frac{2fx(4x^2 - 6lx + 3l^2)}{l^3}$

2.4. $\theta = 0, \alpha = 0.5, \beta = \beta_o = 0, g = 0$.

Участок AC: $0 \leq x \leq l/2, \quad y = \frac{fx(3l^2 - 4x^2)}{l^3}$

Вершина в шарнире C.

3. Действие на горизонтальную арку вертикальной распределенной нагрузки (рис.2а,б) изменяющейся по различным законам:

3.1. Синусоиды $g_x = g \sin(\pi x / l)$

Рациональное очертание получено в виде синусоиды

$$y = f \sin(\pi x / l) \quad (3)$$

Продольная сила в любом сечении определяется по выражению:

$$N = \frac{-gl}{\pi(1 + \operatorname{tg}^2 \varphi)^{1/2}} \left(\frac{l}{\pi \cdot f} + \frac{\pi \cdot f}{l} \cos^2 \frac{\pi \cdot x}{l} \right), \text{ где } \operatorname{tg} \varphi = \frac{\pi \cdot f}{l} \cos \frac{\pi \cdot x}{l}$$

3.2. Квадратной параболы $g_x = -g x(l-x) / l^2$
 $y = 16fx[l^3 - x^2(2l-x)] / 5l^4$ (4)

$$N = \frac{-gl}{3(1+tg^2\varphi)^{1/2}} \left[\frac{5l}{16f} + \left(1 - \frac{2x^2(3l-x)}{l^3} \right) tg\varphi \right],$$

где $tg\varphi = \frac{16f}{5l^4} [l^3 - 2x^2(3l-2x)]$.

3.3. Окружности

При расположении начала координат в ключе арки и правосторонней системе координат (рис. 2 а,б), закон изменения интенсивности распределенной нагрузки имеет вид:

$$g_x = g(f - R + \sqrt{R^2 - x^2}) / f, \text{ где } R = (4f^2 + l^2) / 8f$$

Рациональное очертание оси арки получено в виде:

$$y = \frac{f \left[4R^2(2R - 3x \arcsin \frac{x}{R}) - 12bx^2 - 4(2R^2 + x^2)(R^2 - x^2)^{1/2} \right]}{3bl^2 + (3l + 8a)x^2 + 2R^2(3 \arcsin \frac{x}{R} - 4R)}$$

где $b = f - R$, $a = R^2 - l^2 / 4$, $c = l / 2R$.

4. Действие на арку равномерно распределенной горизонтальной нагрузки с интенсивностью напора g_1 и отсоса g_2 (рис. 2, в).

Для данного примера решение существует только для единственного случая, когда $g_1 = g_2$. Тогда для участка AC: $0 \leq x \leq l/2$,

$$y = f - f(1 - 2x/l)^{1/2}. \quad (5)$$

Уравнение для участка CB получается из (5) путем замены x на $l-x$. Максимальная ордината будет в ключе арки $y_{max} = f$. В этом же сечении происходит излом кривых, так как $tg\varphi_c^{леc} = \infty$, $tg\varphi_c^{пр} = -\infty$.

5. Действие равномерной радиальной нагрузки.

5.1. Равномерно распределенной (рис. 3).

Известно, что равнодействующая равномерно распределенной радиальной нагрузки, приложенная к дуге любого очертания, равна произведению интенсивности нагрузки на длину хорды, стягивающей эту дугу, перпендикулярна ей и проходит через ее середину.

$$\text{Поэтому } P = gl, P_1 = R_A = R_B = gl/2, H = g(l^2 - 4Rf) / 4f,$$

где $R = (4f^2 + l^2) / 8f$, $P_x = g(x^2 + y^2)^{1/2} = 2gR \sin(0.5\beta)$. Приравняв изгибающий момент в произвольном сечении, например D, к нулю, будем иметь:

$$y = \sqrt{R^2 - (0.5l - x)^2} - R + f, \quad N = -gR.$$

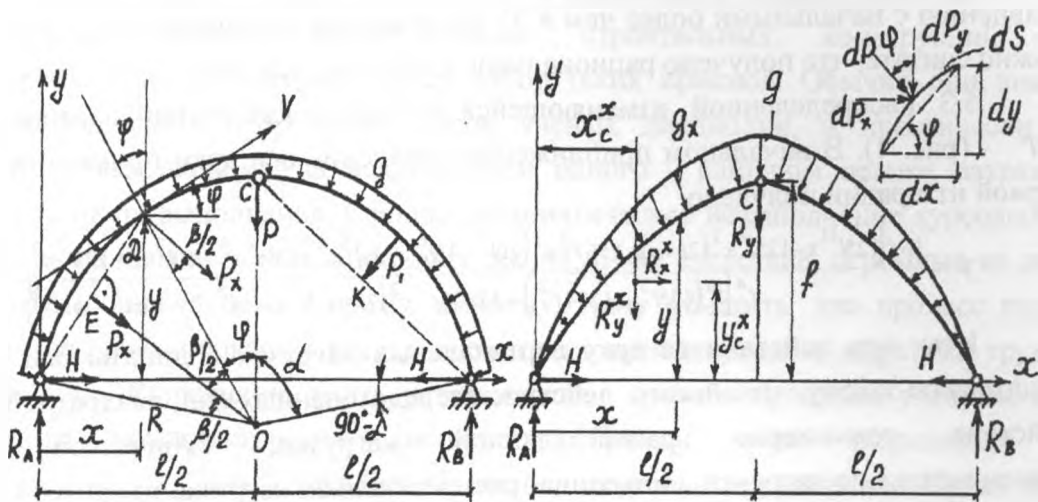


Рис.3 Схемы арок и радиальных нагрузок. Рис.4

5.2. Распределенной изменяющейся по закону синусоиды

$g_x = g \cdot \sin \pi x / l$. (рис. 4)

Равнодействующая и ее составляющие, действующие на участок длиной dS соответственно равны $dP = g_x dS$, $dP_x = g_x \sin \varphi \cdot dS = g_x dy$, $dP_y = g_x \cos \varphi \cdot dS = g_x dx$.

Вертикальная нагрузка, действующая на участок длиной x равна

$$R_v^x = A_y^x = \int_0^x dP_y = g \int_0^x \sin \frac{\pi x}{l} dx = gl \left(1 - \cos \frac{\pi x}{l} \right) \pi.$$

Тогда вертикальные опорные реакции, как и вертикальная нагрузка действующая на полуарку равны $R_A = R_B = R_v^l = gl \pi$. Точки приложения вертикальных нагрузок

находятся по выражению $x_c^x = S_y^x / A_y^x$, $S_y^x = \int_0^x x g_x dx = \frac{gl}{\pi} \left(\frac{l}{\pi} \sin \frac{\pi x}{l} - x \cos \frac{\pi x}{l} \right)$.

Горизонтальные составляющие радиальной нагрузки, а так же точки их приложения, находятся с помощью интегралов:

$$R_x^x = \int_0^x dP_x = \int_0^x g_x dy = g \int_0^x \sin \frac{\pi x}{l} dy; \quad S_x^x = \int_0^x y g_x dy = g \int_0^x y \sin \frac{\pi x}{l} dy.$$

Найти эти величины можно, если известен закон изменения ординат оси арки. За начальное приближение примем закон изменения ординат, соответствующий рациональному очертанию оси при действии вертикальной нагрузки изменяющейся по закону синусоиды т.е. (3). Прделав обычную процедуру вычислений, получим в первом приближении:

$$y = \frac{2f(3l^2 + \pi^2 f^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l}) \sin \frac{\pi x}{l}}{3(2l^2 + \pi^2 f^2 \sin^2 \frac{\pi x}{l} - \pi^2 f^2 \cdot 3)}$$

Изгибающие моменты в сечениях после первой итерации уменьшились по сравнению с начальными более чем в 31 раз и весьма незначительны, т.е. практически можно считать, что получено рациональное очертание оси арки.

5.3. Распределенной, изменяющейся по закону квадратной параболы $g_x=4gx(l-x)/l^2$ (рис. 4). В начальном приближении уравнение оси арки принято по (4). После первой итерации получено:

$$y = \frac{16f \left[125l^{11}x - 125l^8x^3(2l-x) + 256f^2x^3(20l^7 - 15l^6x - 96l^5x^2 + 130l^4x^3 + 60l^3x^4 - 195l^2x^5 + 120lx^6 - 24x^7) \right]}{l^4 \left[l^6(625l^2 - 1104f^2) + 12800f^2x^2(3l^4 - 2l^3x - 9l^2x^2 + 12lx^3 - 4x^4) \right]}$$

Итак при действии на арку вертикальных нагрузок ординаты оси арки будут меняться по закону: линейному- действие сосредоточенных сил; квадратной параболы- действие равномерно распределенной нагрузки; кубической параболы- трапециевидальные нагрузки; синусоида- распределенная нагрузка изменяемая по закону синуса; кривой четвертого порядка- действие распределенной нагрузки изменяется по закону квадратной параболы; кривой полученной путем сложения кубической параболы и арксинусоиды- распределенная нагрузка изменяется по закону окружности. При действии равномерно распределенной радиальной нагрузки рациональное очертание- окружность. Для остальных видов распределенных радиальных нагрузок получить решение в замкнутом виде невозможно, поэтому рациональное очертание оси арки получают приближенным способом.

Литература

1. Снитко Н.К. Строительная механика.- М.: Высш. шк., 1980.- 430с.
2. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика.- М.: Высш. шк., 1986.- 607с.
3. Киселев В.А. Строительная механика.- М.: Стройиздат, 1967.- 549с.
4. Справочник проектировщика промышленных, жилых и общественных зданий и сооружений. Расчетно- теоретический. Книга 2.- М.: Стройиздат, 1973.- 415с.
5. Избранные задачи по строительной механике и теории упругости / Н.П. Абовский, Л.В. Енджиевский, В.И. Савченков и др.- М.: Стройиздат, 1978 - 189с.
6. Строительная механика / А.В.Дарков, Г.К. Клейн, В.И. Кузнецов и др - М.: Высш. шк. 1976.- 596с.

КОМПЬЮТЕРНАЯ ТЕХНОЛОГИЯ ОБУЧЕНИЯ ПРОЕКТИРОВАНИЮ НА БАЗЕ КОМПЛЕКСНОГО КУРСОВОГО ПРОЕКТА

Уласевич В.П.

Обучение проектированию при подготовке инженера - сложнейший методико-педагогический процесс. Что касается специальности Т19.01.00 - *промышленное и гражданское строительство*, общепризнанно, что она стоит в ряду труднейших.