МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Введение в математический анализ

Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных

Методические рекомендации и варианты заданий аттестационных работ по курсу «Математика» для студентов специальности «Промышленное и гражданское строительство» дневной формы обучения

Брест 2018

УДК [512.64+514.12+517.1/.2](076)

В настоящей методической разработке приведены варианты заданий аттестационных работ по разделам «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии», «Введение в математический анализ», «Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных» дисциплины «Математика», изучаемых студентами специальности «Промышленное и гражданское строительство» дневной формы обучения в первом семестре. Приведено подробное решение типовых задач, даны некоторые методические рекомендации, полезные для успешного выполнения заданий.

Составители: Юхимук М.М., старший преподаватель,
Юхимук Т.Ю., старший преподаватель
Каримова Т.И., к.ф.-м.н., доцент
Коледа М.С., ассистент

Рецензент: Басик А.И., доцент кафедры математического анализа, дифференциальных уравнений и их приложений учреждения образования «Брестский государственный университет им. А.С. Пушкина», к.ф.-м.н.

I. Практические задания по теме «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии»

№1. Найти матрицу $B \cdot \left(B^T - 3A\right)$.

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 0 & 2 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}$

2. $A = \begin{bmatrix} 0 & 4 & -1 \\ 1 & 3 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & 1 \\ 5 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

3. $A = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -3 & -1 \\ 5 & 4 & 0 \end{bmatrix}$

4. $A = \begin{bmatrix} -4 & -3 & -1 \\ 1 & 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -5 & 1 \\ -4 & 0 \\ 2 & -1 \end{bmatrix}$

5. $A = \begin{bmatrix} -3 & 0 \\ -1 & 2 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -5 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \end{bmatrix}$

6. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 & 0 \\ 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 5 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

7. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 5 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

8. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 4 & -3 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 0 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

9. $A = \begin{bmatrix} 1 & -3 \\ -1 & 2 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -5 & 3 \\ -2 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

10. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ -2 & 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 2 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

11. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 4 \\ -3 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

12. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 5 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$

13. $A = \begin{bmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 4 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 1 & 5 & 0 \end{bmatrix}$

14. $A = \begin{bmatrix} -2 & 0 & 1 \\ 3 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} -2 & 0 \\ 1 & 5 \\ -3 & 5 \end{bmatrix}$

15. $A = \begin{bmatrix} -1 & 2 \\ 2 & -2 \\ 4 & 0 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 4 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & -5 \end{bmatrix}$

16. $A = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 5 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}$

17. $A = \begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -1 & 0 \\ -3 & 1 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 2 & 4 & -1 \end{bmatrix}$

18. $A = \begin{bmatrix} 3 & 1 & 0 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix}, B = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -1 \\ -3 & 4 \end{bmatrix}$

19. $A=\begin{bmatrix}0 & -2\\ -1 & 3\\ 2 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-5 & 2 & 0\\ 1 & 4 & 3\end{bmatrix}$

20. $A=\begin{bmatrix}2 & 3 & -1\\ -2 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}1 & -1\\ 4 & 0\\ 5 & 3\end{bmatrix}$

21. $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 2 & 0\\ -3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}-4 & -2 & -5\\ -3 & 5 & 0\end{bmatrix}$

22. $A=\begin{bmatrix}4 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}4 & 2\\ 1 & -1\\ 0 & 3\end{bmatrix}$

23. $A=\begin{bmatrix}4 & 1\\ 0 & -2\\ 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}5 & 3 & -1\\ 1 & 0 & 2\end{bmatrix}$

24. $A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -1\\ 0 & 2 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 3 & 0\\ 5 & 3\end{bmatrix}$

25. $A=\begin{bmatrix}-1 & 2\\ 3 & 0\\ -1 & 3\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5 & -1\\ 1 & -3 & 2\end{bmatrix}$

26. $A=\begin{bmatrix}-2 & 1 & -1\\ -3 & 2 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -1\\ 2 & -3\\ -4 & 1\end{bmatrix}$

27. $A=\begin{bmatrix}-1 & 0\\ 2 & 4\\ -3 & 2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -2 & -5\\ -3 & 5 & 2\end{bmatrix}$

28. $A=\begin{bmatrix}-2 & 4 & -1\\ 1 & -1 & 0\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 5\\ 4 & -2\\ 5 & 3\end{bmatrix}$

29. $A=\begin{bmatrix}0 & 1\\ 3 & 4\\ -1 & -2\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & 3 & -1\\ 1 & 5 & 2\end{bmatrix}$

30. $A=\begin{bmatrix}3 & 0 & -2\\ 1 & -1 & 4\end{bmatrix}$, $B=\begin{bmatrix}0 & -2\\ 4 & 1\\ -5 & 3\end{bmatrix}$

№2. Вычислить определитель.

1. $\begin{vmatrix}2 & 1 & 2 & 2\\ 2 & 0 & 1 & 4\\ -1 & 2 & 0 & -1\\ 4 & -5 & 1 & 3\end{vmatrix}$ 2. $\begin{vmatrix}4 & -2 & 1 & 0\\ 2 & 0 & 1 & 2\\ -1 & 1 & -2 & -3\\ 4 & -5 & 1 & -2\end{vmatrix}$ 3. $\begin{vmatrix}2 & 0 & -1 & -3\\ 5 & -4 & 1 & 1\\ -2 & 1 & 0 & 2\\ 1 & -5 & 4 & -1\end{vmatrix}$

4. $\begin{vmatrix}3 & -2 & 5 & 0\\ 0 & 4 & 1 & 2\\ 5 & 1 & -2 & -3\\ 1 & -5 & 1 & -2\end{vmatrix}$ 5. $\begin{vmatrix}4 & -2 & -1 & -1\\ 0 & 4 & 1 & 2\\ 3 & 5 & -2 & 1\\ 1 & -5 & 0 & -2\end{vmatrix}$ 6. $\begin{vmatrix}4 & 3 & -1 & -2\\ 5 & 1 & 4 & 1\\ -3 & -1 & 0 & 3\\ 1 & 0 & 2 & 2\end{vmatrix}$

7. $\begin{vmatrix}2 & 0 & -1 & -3\\ 5 & 4 & 1 & 2\\ 3 & 2 & 4 & 1\\ 1 & 3 & 0 & 5\end{vmatrix}$ 8. $\begin{vmatrix}1 & 2 & 3 & 0\\ 5 & -4 & 1 & 2\\ -2 & 1 & 0 & 1\\ 2 & 3 & 4 & -2\end{vmatrix}$ 9. $\begin{vmatrix}2 & 2 & 0 & 4\\ 5 & 1 & -4 & -1\\ 0 & -1 & 2 & 3\\ -3 & 4 & 1 & 2\end{vmatrix}$

10. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 4 & -2 \\ 1 & 4 & 2 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 1 \\ -2 & 0 & 1 & 3 \end{vmatrix}$ 11. $\begin{vmatrix} -3 & 1 & 4 & 2 \\ 5 & -4 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 3 \\ 2 & 0 & 2 & 4 \end{vmatrix}$ 12. $\begin{vmatrix} 2 & -1 & -4 & 5 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ 1 & 2 & 5 & -3 \\ 0 & 4 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

13. $\begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 & 0 \\ 5 & -4 & 1 & 5 \\ -2 & 1 & 3 & -1 \\ 0 & 3 & 4 & -2 \end{vmatrix}$ 14. $\begin{vmatrix} 2 & 3 & 1 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & 5 \\ 0 & 4 & 3 & -2 \\ -2 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 15. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ 5 & 1 & -4 & 5 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$

16. $\begin{vmatrix} 0 & 3 & 1 & 2 \\ -1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 4 & 3 & 0 \\ 5 & 1 & -4 & -1 \end{vmatrix}$ 17. $\begin{vmatrix} 1 & 3 & 0 & 2 \\ -2 & -3 & 1 & 1 \\ -4 & 1 & 5 & -1 \\ 3 & 4 & -2 & 0 \end{vmatrix}$ 18. $\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ -4 & -1 & 5 & 1 \\ 3 & 0 & -2 & 4 \end{vmatrix}$

19. $\begin{vmatrix} 5 & 1 & 1 & -3 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 0 & -3 & 3 & 2 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \end{vmatrix}$ 20. $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 5 & 3 \\ -2 & 5 & 3 & -1 \\ 3 & -3 & 0 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \end{vmatrix}$ 21. $\begin{vmatrix} 2 & -3 & 0 & 3 \\ 1 & 5 & 3 & -2 \\ -3 & 1 & 5 & 1 \\ 3 & 2 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

22. $\begin{vmatrix} 0 & -3 & 3 & -2 \\ 3 & 5 & -2 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & 1 \\ 5 & 1 & 1 & -5 \end{vmatrix}$ 23. $\begin{vmatrix} 3 & -3 & -2 & 0 \\ -2 & 5 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 2 & 1 & 1 \end{vmatrix}$ 24. $\begin{vmatrix} -4 & 3 & -2 & -1 \\ 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & 0 & 3 & -2 \\ -3 & 5 & -1 & 1 \end{vmatrix}$

25. $\begin{vmatrix} -1 & 5 & -3 & -1 \\ 0 & 2 & 1 & -3 \\ 3 & 0 & 1 & 2 \\ -2 & 3 & -4 & 1 \end{vmatrix}$ 26. $\begin{vmatrix} 5 & -1 & -3 & -1 \\ 2 & 0 & 1 & -3 \\ -3 & 2 & 4 & -1 \\ 0 & 3 & 1 & 2 \end{vmatrix}$ 27. $\begin{vmatrix} 0 & 2 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ -3 & -1 & 4 & 2 \\ -5 & 1 & 3 & 1 \end{vmatrix}$

28. $\begin{vmatrix} 5 & -4 & 1 & 3 \\ 2 & -3 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 & 2 \\ -5 & 3 & 2 & -1 \end{vmatrix}$ 29. $\begin{vmatrix} -3 & 2 & -5 & -1 \\ 1 & 5 & 2 & 0 \\ 3 & -1 & 0 & 4 \\ 1 & -4 & -1 & 2 \end{vmatrix}$ 30. $\begin{vmatrix} -5 & 2 & -3 & -1 \\ 1 & 4 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 3 & 4 \\ 2 & 5 & 1 & 0 \end{vmatrix}$

№3. Решить матричное уравнение.

1. $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & -3 \\ 2 & -4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 5 & -6 & -6 \\ 3 & -3 & -6 \\ -7 & 9 & 9 \end{bmatrix}$ 2. $\begin{bmatrix} 2 & 3 & 1 \\ 0 & -5 & 2 \\ -1 & -4 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -6 & 8 & 6 \\ 6 & 5 & -7 \\ 7 & -4 & -6 \end{bmatrix}$

3. $X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 5 & 4 & 1 \\ -2 & 0 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -7 & -7 & -5 \\ 1 & 6 & 9 \\ -6 & 1 & 8 \end{bmatrix}$

4. $\begin{bmatrix} 0 & 1 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ -1 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -4 & -2 & -2 \\ 6 & -4 & 2 \\ 4 & 7 & 1 \end{bmatrix}$

5. $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ -2 & 4 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -6 & 3 \\ -3 & 4 & -1 \\ -3 & 8 & -3 \end{bmatrix}$

6. $\begin{bmatrix} -4 & 4 & -2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 0 & -1 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -6 & -8 & -2 \\ 4 & 6 & 2 \\ -5 & -5 & -7 \end{bmatrix}$

7. $X \cdot \begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 3 & 0 & 3 \\ 5 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & 2 & 7 \\ 8 & -3 & 8 \\ 8 & 9 & 5 \end{bmatrix}$

8. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -4 \\ 0 & -2 & -5 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 7 & -3 & 2 \\ 2 & -2 & 9 \\ -8 & 5 & 3 \end{bmatrix}$

9. $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 & 3 \\ 2 & 4 & -1 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 6 & -4 \\ 7 & 7 & 9 \\ 4 & 9 & -4 \end{bmatrix}$

10. $\begin{bmatrix} -5 & -1 & 0 \\ 0 & -2 & 2 \\ 2 & 4 & -4 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -5 & 9 & -8 \\ 2 & -2 & -2 \\ -2 & 2 & 8 \end{bmatrix}$

11. $X \cdot \begin{bmatrix} 4 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 4 & -1 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & 4 & 4 \\ -4 & 2 & 3 \\ 4 & -9 & -8 \end{bmatrix}$

12. $\begin{bmatrix} -1 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 0 \\ 3 & 0 & -5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 7 & 6 & 2 \\ -5 & -4 & -2 \\ -8 & -7 & -4 \end{bmatrix}$

13. $X \cdot \begin{bmatrix} -3 & 5 & -5 \\ 0 & 3 & -3 \\ 4 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -8 & -4 & 2 \\ 2 & 3 & -4 \\ -3 & 7 & -4 \end{bmatrix}$

14. $\begin{bmatrix} 0 & -2 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 5 & -3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -2 & 2 & -4 \\ 2 & 1 & 2 \\ -7 & 1 & -9 \end{bmatrix}$

15. $X \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & 5 & -4 \\ 3 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -9 & 6 \\ -7 & -7 & 8 \\ 5 & 6 & -6 \end{bmatrix}$

16. $\begin{bmatrix} 4 & -1 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -8 & -8 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \\ -1 & -8 & -6 \end{bmatrix}$

17. $X \cdot \begin{bmatrix} -3 & -2 & 5 \\ 2 & 4 & 0 \\ 0 & 2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 5 \\ 1 & 4 & 2 \\ -5 & -8 & 4 \end{bmatrix}$

18. $\begin{bmatrix} 0 & -4 & -5 \\ 1 & -2 & 0 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -6 & 9 & -8 \\ -2 & 3 & -2 \\ 7 & -6 & 2 \end{bmatrix}$

19. $X \cdot \begin{bmatrix} -3 & -1 & 0 \\ 0 & 5 & -4 \\ -1 & 2 & -2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 & -9 & 6 \\ 1 & 3 & -2 \\ 7 & 8 & -4 \end{bmatrix}$

20. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & -2 \\ 0 & -2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -4 \\ -2 & -2 & 8 \\ 2 & -4 & -1 \end{bmatrix}$

21. $X \cdot \begin{bmatrix} -2 & -3 & -5 \\ 4 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 1 & -2 \\ 6 & 4 & 3 \\ -2 & -2 & -5 \end{bmatrix}$

22. $\begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & -2 & 4 \\ 0 & 3 & -5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 5 & -4 & 5 \\ -6 & 4 & 4 \\ -6 & 2 & -9 \end{bmatrix}$

23. $X \cdot \begin{bmatrix} 0 & 1 & -5 \\ -1 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 & -5 \\ -6 & 5 & -7 \\ 8 & -3 & 3 \end{bmatrix}$

24. $\begin{bmatrix} 4 & -2 & 2 \\ -1 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & 0 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} -2 & -6 & -4 \\ 1 & -6 & -3 \\ 6 & -1 & 1 \end{bmatrix}$

25. $X\cdot\begin{bmatrix}-1 & 2 & -4\\ 5 & 0 & 1\\ 0 & -2 & 3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-6 & 2 & -5\\ 7 & -4 & 5\\ 7 & 4 & -3\end{bmatrix}$ 26. $\begin{bmatrix}0 & 1 & 4\\ 2 & 1 & -5\\ -2 & -3 & 0\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}6 & 9 & 4\\ -1 & -3 & -2\\ -8 & -9 & -6\end{bmatrix}$

27. $X\cdot\begin{bmatrix}-1 & 0 & 3\\ -1 & 4 & 1\\ 0 & 3 & -2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}1 & 7 & -9\\ -3 & 2 & 9\\ 2 & 3 & -8\end{bmatrix}$ 28. $\begin{bmatrix}2 & 0 & -3\\ 2 & -5 & -1\\ 0 & 4 & -1\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}-2 & -3 & -3\\ -4 & -2 & 9\\ 4 & 1 & -9\end{bmatrix}$

29. $X\cdot\begin{bmatrix}4 & 0 & -5\\ -1 & 2 & 0\\ -2 & 3 & 1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2 & -4 & 5\\ 6 & -2 & -7\\ -2 & -9 & 7\end{bmatrix}$ 30. $\begin{bmatrix}-3 & 0 & 2\\ -1 & 4 & 0\\ 2 & 5 & -2\end{bmatrix}\cdot X=\begin{bmatrix}-2 & -3 & -3\\ 4 & 1 & -9\\ 8 & 5 & -8\end{bmatrix}$

№4. Решить систему линейных неоднородных уравнений.

1. $\begin{cases}x-4y-3z=-3\\ 2x-2y+z=9\\ 3x-y-4z=-5\end{cases}$ 2. $\begin{cases}3x-2y+4z=-1\\ x-2y+z=-5\\ 5x-y+2z=-4\end{cases}$ 3. $\begin{cases}2x-2y-5z=2\\ 3x+y-2z=-4\\ x-y-4z=4\end{cases}$

4. $\begin{cases}5x+y+4z=-7\\ 2x-4y-3z=7\\ x-5y-2z=-3\end{cases}$ 5. $\begin{cases}x+y+4z=9\\ 3x+5y+2z=1\\ 4x-2y+5z=-9\end{cases}$ 6. $\begin{cases}3x+y+2z=7\\ 4x-2y-5z=3\\ x+2y+5z=7\end{cases}$

7. $\begin{cases}2x+5y+2z=9\\ 4x-2y-5z=-6\\ 3x+y-z=4\end{cases}$ 8. $\begin{cases}5x-3y+4z=-5\\ x-2y+z=-6\\ 3x+y-z=-2\end{cases}$ 9. $\begin{cases}x-3y-2z=-3\\ 2x-2y+z=1\\ 4x-3y+5z=2\end{cases}$

10. $\begin{cases}4x+3y+z=-7\\ 5x+3y+4z=-5\\ x+2y-2z=-8\end{cases}$ 11. $\begin{cases}x+5y+3z=-5\\ 3x-4y-3z=7\\ 4x+y-z=7\end{cases}$ 12. $\begin{cases}3x+5y+4z=-7\\ 2x-2y+3z=-4\\ x-3y-z=-7\end{cases}$

13. $\begin{cases}3x-y+4z=8\\ 4x+5y+4z=7\\ 2x-2y+3z=6\end{cases}$ 14. $\begin{cases}2x-y-3z=-6\\ 5x+2y+4z=-4\\ x-2y-3z=-9\end{cases}$ 15. $\begin{cases}x+3y-2z=-9\\ 3x-5y+4z=9\\ 4x-2y+z=-5\end{cases}$

16. $\begin{cases}2x-y+4z=4\\ 5x-4y+z=-5\\ 2x-2y+3z=4\end{cases}$ 17. $\begin{cases}3x-y-4z=-4\\ x+5y+2z=-2\\ 4x-2y-3z=3\end{cases}$ 18. $\begin{cases}5x-y+4z=1\\ 4x-4y+z=6\\ x-2y-3z=-2\end{cases}$

19. $\begin{cases}x-y+3z=5\\ 5x+4y+4z=9\\ x-2y+3z=8\end{cases}$ 20. $\begin{cases}3x-y+3z=-1\\ 5x-3y+5z=5\\ 2x-2y-3z=1\end{cases}$ 21. $\begin{cases}2x-3y+z=2\\ x-4y-2z=-9\\ 3x-2y+z=-2\end{cases}$

22. $\begin{cases} 5x-2y-4z=-6 \\ x-4y-3z=8 \\ 2x-2y-3z=-2 \end{cases}$ 23. $\begin{cases} 2x-2y+3z=-7 \\ 3x-5y+2z=2 \\ x-2y-z=9 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} x+2y+5z=-1 \\ 2x+5y-2z=-5 \\ 4x+5y-4z=5 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 5x+2y-4z=7 \\ x+y-2z=5 \\ 4x-2y-5z=-7 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 3x-2y-5z=2 \\ 3x+y-2z=-1 \\ 2x-2y-z=-4 \end{cases}$ 27. $\begin{cases} x-3y-5z=7 \\ 2x+y-2z=-5 \\ 3x-2y-4z=8 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 4x-3y-5z=-7 \\ x-y-2z=-4 \\ 5x-2y-3z=-1 \end{cases}$ 29. $\begin{cases} 2x+5y-4z=3 \\ 4x+3y-2z=-9 \\ x-2y+5z=-5 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x+3y+4z=-8 \\ 4x-3y+5z=-3 \\ 2x-2y+z=4 \end{cases}$

№5. Решить систему линейных однородных уравнений.

1. $\begin{cases} x-y+2z=0 \\ 4x-3y+5z=0 \\ 2x-3y+7z=0 \end{cases}$ 2. $\begin{cases} 3x-y-5z=0 \\ 4x-5y-3z=0 \\ x-3y+z=0 \end{cases}$ 3. $\begin{cases} 4x+2y+5z=0 \\ x-y+2z=0 \\ 2x+4y+z=0 \end{cases}$

4. $\begin{cases} 4x-3y-2z=0 \\ 5x+y+7z=0 \\ x-y-z=0 \end{cases}$ 5. $\begin{cases} x+4y+z=0 \\ 2x+3y-3z=0 \\ 2x+5y-z=0 \end{cases}$ 6. $\begin{cases} 5x+2y+z=0 \\ 4x+y-z=0 \\ x-2y-7z=0 \end{cases}$

7. $\begin{cases} 5x-2y+3z=0 \\ 2x+y+3z=0 \\ x-3y-2z=0 \end{cases}$ 8. $\begin{cases} 3x+3y+4z=0 \\ x-y-2z=0 \\ 5x-2y-5z=0 \end{cases}$ 9. $\begin{cases} 2x+3y-z=0 \\ 3x+4y-3z=0 \\ x+y-2z=0 \end{cases}$

10. $\begin{cases} 5x+y+2z=0 \\ 2x+y+z=0 \\ 7x-4y+z=0 \end{cases}$ 11. $\begin{cases} 2x+5y-z=0 \\ 5x+8y+2z=0 \\ x-2y+4z=0 \end{cases}$ 12. $\begin{cases} 4x+y+8z=0 \\ x-2y-3z=0 \\ 5x-y+5z=0 \end{cases}$

13. $\begin{cases} 3x+y-4z=0 \\ 3x+4y+2z=0 \\ 4x+5y+2z=0 \end{cases}$ 14. $\begin{cases} x+3y+4z=0 \\ 3x+4y+2z=0 \\ 5x+2y-6z=0 \end{cases}$ 15. $\begin{cases} 3x-2y+2z=0 \\ x-4y-6z=0 \\ x+y+4z=0 \end{cases}$

16. $\begin{cases} 4x+y-z=0 \\ x-y-4z=0 \\ 3x+2y+3z=0 \end{cases}$ 17. $\begin{cases} 5x+2y-4z=0 \\ 4x+y-5z=0 \\ x-y-5z=0 \end{cases}$ 18. $\begin{cases} 2x+5y-4z=0 \\ x+4y-5z=0 \\ 3x+4y+z=0 \end{cases}$

19. $\begin{cases} x+2y-6z=0 \\ 5x+2y+2z=0 \\ 2x-y+8z=0 \end{cases}$ 20. $\begin{cases} 3x+2y+7z=0 \\ x+2y-3z=0 \\ 2x+y+6z=0 \end{cases}$ 21. $\begin{cases} x+3y+4z=0 \\ 4x-2y-5z=0 \\ x-y-2z=0 \end{cases}$

22. $\begin{cases} 3x+4y-z=0 \\ 5x-y+6z=0 \\ 2x+y+z=0 \end{cases}$ 23. $\begin{cases} 2x-3y+z=0 \\ 4x-y-3z=0 \\ 3x+4y-7z=0 \end{cases}$ 24. $\begin{cases} 4x-3y-z=0 \\ 6x-y-5z=0 \\ x+3y-4z=0 \end{cases}$

25. $\begin{cases} 2x+y+8z=0 \\ 4x-5y+2z=0 \\ x-4y-5z=0 \end{cases}$ 26. $\begin{cases} 4x-5y+z=0 \\ 3x+5y-8z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ 27. $\begin{cases} 5x-4y-z=0 \\ 3x-2y-z=0 \\ x-4y+3z=0 \end{cases}$

28. $\begin{cases} 2x+3y+8z=0 \\ 3x+y-2z=0 \\ 4x+3y+4z=0 \end{cases}$ 29. $\begin{cases} x+3y-4z=0 \\ 2x-3y+z=0 \\ x-2y+z=0 \end{cases}$ 30. $\begin{cases} x-5y+4z=0 \\ 4x-9y+5z=0 \\ 2x-y-z=0 \end{cases}$

№6. Вычислить $\left(\alpha\vec{a}+\beta\vec{b}\right)\cdot\left(\gamma\vec{a}-\delta\vec{b}\right)$.

1. $\alpha=2,\ \beta=-4,\ \gamma=-3,\ \delta=1,\ \vec{a}=(-2;3;1),\ \vec{b}=(1;-1;2)$
2. $\alpha=1,\ \beta=-2,\ \gamma=4,\ \delta=2,\ |\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\pi/3$
3. $\alpha=2,\ \beta=-1,\ \gamma=2,\ \delta=4,\ \vec{a}=(5;2;-2),\ \vec{b}=(3;-1;1)$
4. $\alpha=-2,\ \beta=-5,\ \gamma=2,\ \delta=6,\ |\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=1,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=2\pi/3$
5. $\alpha=1,\ \beta=3,\ \gamma=2,\ \delta=-4,\ \vec{a}=(2;1;3),\ \vec{b}=(1;-1;-4)$
6. $\alpha=2,\ \beta=1,\ \gamma=-1,\ \delta=-3,\ |\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=5,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\pi/3$
7. $\alpha=-1,\ \beta=2,\ \gamma=1,\ \delta=-4,\ \vec{a}=(1;2;3),\ \vec{b}=(2;-1;-3)$
8. $\alpha=3,\ \beta=-2,\ \gamma=1,\ \delta=2,\ |\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=3,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=2\pi/3$
9. $\alpha=3,\ \beta=-1,\ \gamma=2,\ \delta=1,\ \vec{a}=(-1;2;1),\ \vec{b}=(4;3;-5)$
10. $\alpha=-1,\ \beta=6,\ \gamma=5,\ \delta=-2,\ |\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=1,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\pi/3$
11. $\alpha=3,\ \beta=5,\ \gamma=-1,\ \delta=2,\ \vec{a}=(2;-5;1),\ \vec{b}=(-3;1;1)$
12. $\alpha=-2,\ \beta=1,\ \gamma=-1,\ \delta=3,\ |\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=5,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=2\pi/3$
13. $\alpha=-5,\ \beta=-2,\ \gamma=2,\ \delta=-3,\ \vec{a}=(-4;-1;3),\ \vec{b}=(5;2;-3)$
14. $\alpha=-1,\ \beta=3,\ \gamma=4,\ \delta=-2,\ |\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=2,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\pi/3$

15. $\alpha = 4,\ \beta = -2,\ \gamma = -2,\ \delta = -3,\ \vec{a} = (2;-1;-4),\ \vec{b} = (1;2;-4)$

16. $\alpha = 2,\ \beta = 1,\ \gamma = -4,\ \delta = 3,\ |\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 5,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 2\pi/3$

17. $\alpha = 2,\ \beta = -1,\ \gamma = -4,\ \delta = 3,\ \vec{a} = (4;-3;-2),\ \vec{b} = (-2;1;2)$

18. $\alpha = 5,\ \beta = 2,\ \gamma = -1,\ \delta = 1,\ |\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 4,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pi/3$

19. $\alpha = -1,\ \beta = 3,\ \gamma = 4,\ \delta = 3,\ \vec{a} = (4;-6;-3),\ \vec{b} = (2;-5;-2)$

20. $\alpha = 4,\ \beta = 1,\ \gamma = -1,\ \delta = 5,\ |\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 2\pi/3$

21. $\alpha = 6,\ \beta = 4,\ \gamma = 5,\ \delta = -3,\ \vec{a} = (1;-1;3),\ \vec{b} = (-2;3;-4)$

22. $\alpha = -4,\ \beta = -1,\ \gamma = 3,\ \delta = 2,\ |\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 6,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pi/3$

23. $\alpha = 4,\ \beta = 3,\ \gamma = 3,\ \delta = -2,\ \vec{a} = (2;-1;-3),\ \vec{b} = (-5;2;3)$

24. $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = -1,\ \delta = 5,\ |\vec{a}| = 6,\ |\vec{b}| = 1,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 2\pi/3$

25. $\alpha = -3,\ \beta = 5,\ \gamma = -2,\ \delta = -1,\ \vec{a} = (2;2;-5),\ \vec{b} = (3;1;-4)$

26. $\alpha = 1,\ \beta = 3,\ \gamma = -1,\ \delta = 2,\ |\vec{a}| = 6,\ |\vec{b}| = 2,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pi/3$

27. $\alpha = -1,\ \beta = 2,\ \gamma = 6,\ \delta = 5,\ \vec{a} = (-1;4;-2),\ \vec{b} = (-2;5;-3)$

28. $\alpha = 5,\ \beta = -1,\ \gamma = 2,\ \delta = -4,\ |\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 2,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 2\pi/3$

29. $\alpha = 3,\ \beta = -2,\ \gamma = 2,\ \delta = 5,\ \vec{a} = (4;-3;6),\ \vec{b} = (2;-1;4)$

30. $\alpha = 4,\ \beta = 2,\ \gamma = -3,\ \delta = -2,\ |\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 4,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pi/3$

№7. Найти длину вектора $\left(\alpha\vec{a} + \beta\vec{b}\right) \times \left(\gamma\vec{a} - \delta\vec{b}\right)$.

1. $\alpha = 1,\ \beta = 2,\ \gamma = -1,\ \delta = 5,\ |\vec{a}| = 2,\ |\vec{b}| = 3,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pi/6$
2. $\alpha = 1,\ \beta = -3,\ \gamma = -1,\ \delta = 3,\ \vec{a} = (1;-1;0),\ \vec{b} = (3;-2;-1)$
3. $\alpha = -1,\ \beta = 3,\ \gamma = -4,\ \delta = 2,\ |\vec{a}| = 5,\ |\vec{b}| = 2,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = 5\pi/6$
4. $\alpha = 2,\ \beta = 3,\ \gamma = -1,\ \delta = 2,\ \vec{a} = (-4;-1;2),\ \vec{b} = (3;0;1)$
5. $\alpha = 4,\ \beta = -5,\ \gamma = 2,\ \delta = -1,\ |\vec{a}| = 1,\ |\vec{b}| = 3,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pi/6$

6. $\alpha=-2,\ \beta=-4,\ \gamma=-1,\ \delta=3,\ \vec{a}=(0;-5;2),\ \vec{b}=(1;4;-1)$

7. $\alpha=3,\ \beta=1,\ \gamma=-1,\ \delta=2,\ |\vec{a}|=6,\ |\vec{b}|=4,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=5\pi/6$

8. $\alpha=2,\ \beta=-1,\ \gamma=3,\ \delta=1,\ \vec{a}=(-1;3;2),\ \vec{b}=(2;5;0)$

9. $\alpha=2,\ \beta=4,\ \gamma=-2,\ \delta=-1,\ |\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=8,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\pi/6$

10. $\alpha=3,\ \beta=-2,\ \gamma=2,\ \delta=1,\ \vec{a}=(-2;-1;3),\ \vec{b}=(0;-4;1)$

11. $\alpha=1,\ \beta=-1,\ \gamma=-2,\ \delta=3,\ |\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=7,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=5\pi/6$

12. $\alpha=3,\ \beta=-1,\ \gamma=5,\ \delta=2,\ \vec{a}=(1;0;-4),\ \vec{b}=(2;-3;-7)$

13. $\alpha=3,\ \beta=-2,\ \gamma=4,\ \delta=6,\ |\vec{a}|=5,\ |\vec{b}|=2,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\pi/6$

14. $\alpha=1,\ \beta=-2,\ \gamma=2,\ \delta=3,\ \vec{a}=(1;-3;-5),\ \vec{b}=(2;0;-4)$

15. $\alpha=-1,\ \beta=-6,\ \gamma=2,\ \delta=3,\ |\vec{a}|=3,\ |\vec{b}|=4,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=5\pi/6$

16. $\alpha=-1,\ \beta=2,\ \gamma=3,\ \delta=1,\ \vec{a}=(2;-3;4),\ \vec{b}=(0;-2;3)$

17. $\alpha=5,\ \beta=4,\ \gamma=-5,\ \delta=2,\ |\vec{a}|=7,\ |\vec{b}|=2,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\pi/6$

18. $\alpha=-3,\ \beta=4,\ \gamma=-1,\ \delta=-2,\ \vec{a}=(2;-1;0),\ \vec{b}=(4;-3;2)$

19. $\alpha=4,\ \beta=-2,\ \gamma=3,\ \delta=2,\ |\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=5,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=5\pi/6$

20. $\alpha=-1,\ \beta=1,\ \gamma=4,\ \delta=5,\ \vec{a}=(0;4;-6),\ \vec{b}=(-1;2;-5)$

21. $\alpha=6,\ \beta=7,\ \gamma=3,\ \delta=-4,\ |\vec{a}|=4,\ |\vec{b}|=5,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\pi/6$

22. $\alpha=3,\ \beta=-5,\ \gamma=-1,\ \delta=-2,\ \vec{a}=(-3;5;1),\ \vec{b}=(0;2;-1)$

23. $\alpha=5,\ \beta=4,\ \gamma=6,\ \delta=-3,\ |\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=2,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=5\pi/6$

24. $\alpha=2,\ \beta=-1,\ \gamma=4,\ \delta=3,\ \vec{a}=(1;0;3),\ \vec{b}=(-2;-1;4)$

25. $\alpha=5,\ \beta=8,\ \gamma=1,\ \delta=-2,\ |\vec{a}|=1,\ |\vec{b}|=9,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=\pi/6$

26. $\alpha=2,\ \beta=-5,\ \gamma=-1,\ \delta=-2,\ \vec{a}=(1;-4;-3),\ \vec{b}=(2;0;-2)$

27. $\alpha=2,\ \beta=-4,\ \gamma=-1,\ \delta=-7,\ |\vec{a}|=2,\ |\vec{b}|=6,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}})=5\pi/6$

28. $\alpha=4,\ \beta=-5,\ \gamma=-1,\ \delta=-2,\ \vec{a}=(2;-2;0),\ \vec{b}=(3;-1;1)$

29. $\alpha = 7,\ \beta = 8,\ \gamma = 1,\ \delta = -4,\ |\vec{a}| = 3,\ |\vec{b}| = 2,\ (\widehat{\vec{a},\vec{b}}) = \pi/6$

30. $\alpha = -2,\ \beta = 1,\ \gamma = 4,\ \delta = 3,\ \vec{a} = (-1;1;-2),\ \vec{b} = (2;3;0)$

№8. В треугольнике *ABC* найти точку пересечения медианы *AN* и высоты *CH*.

1. $A(2;-3),\ B(4;3),\ C(-2;5)$
2. $A(2;-2),\ B(3;1),\ C(-5;1)$
3. $A(-1;-4),\ B(2;-3),\ C(-4;1)$
4. $A(2;4),\ B(-1;-5),\ C(5;1)$
5. $A(2;-3),\ B(3;-1),\ C(5;-5)$
6. $A(3;1),\ B(5;-3),\ C(3;7)$
7. $A(3;-3),\ B(6;3),\ C(2;5)$
8. $A(4;-5),\ B(-4;3),\ C(-2;5)$
9. $A(-1;1),\ B(3;5),\ C(-7;-3)$
10. $A(-3;-4),\ B(-4;-2),\ C(2;-6)$
11. $A(6;5),\ B(5;2),\ C(3;-4)$
12. $A(-5;3),\ B(-6;4),\ C(2;6)$
13. $A(3;3),\ B(1;5),\ C(9;3)$
14. $A(-2;-6),\ B(3;-8),\ C(7;2)$
15. $A(-6;-2),\ B(-8;3),\ C(2;7)$
16. $A(1;-3),\ B(5;-5),\ C(-1;7)$
17. $A(2;3),\ B(-1;6),\ C(7;8)$
18. $A(3;7),\ B(-2;2),\ C(8;4)$
19. $A(-3;-2),\ B(4;-3),\ C(-2;5)$
20. $A(3;5),\ B(1;6),\ C(2;3)$
21. $A(4;2),\ B(6;3),\ C(2;-1)$
22. $A(-1;-5),\ B(-2;-4),\ C(-6;-6)$
23. $A(3;5),\ B(1;9),\ C(5;3)$
24. $A(2;3),\ B(1;5),\ C(-3;-3)$
25. $A(4;3),\ B(1;6),\ C(3;4)$
26. $A(4;3),\ B(5;2),\ C(-5;-6)$
27. $A(4;1),\ B(-2;-2),\ C(4;-2)$
28. $A(4;3),\ B(5;7),\ C(-3;9)$
29. $A(2;2),\ B(3;5),\ C(-1;1)$
30. $A(-4;3),\ B(2;9),\ C(-8;1)$

№9. Найти длину высоты пирамиды *ABCD*, опущенной из вершины *D*.

1. $A(2;3;-1),\ B(3;-1;-4),\ C(4;2;-3),\ D(-1;2;1)$
2. $A(5;-2;3),\ B(6;-1;4),\ C(7;1;1),\ D(4;-2;-1)$
3. $A(6;-4;1),\ B(5;-6;-2),\ C(8;-1;4),\ D(6;-5;-7)$
4. $A(-1;4;5),\ B(1;1;7),\ C(-2;5;3),\ D(-2;3;6)$

5. $A(3;-4;1)$, $B(5;-3;4)$, $C(-1;1;2)$, $D(3;2;-1)$

6. $A(5;-1;3)$, $B(4;-3;-2)$, $C(3;3;1)$, $D(-1;6;-7)$

7. $A(-4;1;-2)$, $B(-5;2;-3)$, $C(2;5;1)$, $D(3;-2;3)$

8. $A(-1;-4;2)$, $B(3;-5;4)$, $C(-2;-2;1)$, $D(4;6;1)$

9. $A(4;5;-3)$, $B(2;4;-2)$, $C(5;7;1)$, $D(-4;3;5)$

10. $A(-2;3;2)$, $B(1;-2;4)$, $C(-5;4;1)$, $D(3;4;1)$

11. $A(3;-1;5)$, $B(6;-4;3)$, $C(1;2;4)$, $D(3;5;-8)$

12. $A(4;-2;-1)$, $B(1;-8;2)$, $C(6;5;-4)$, $D(-2;5;1)$

13. $A(1;4;-3)$, $B(-2;5;-2)$, $C(6;3;-5)$, $D(-2;-3;1)$

14. $A(6;2;-1)$, $B(-2;4;-5)$, $C(3;3;-2)$, $D(3;1;-7)$

15. $A(2;-1;-3)$, $B(5;-3;-5)$, $C(-5;4;1)$, $D(1;-2;3)$

16. $A(-1;4;-2)$, $B(-2;3;-1)$, $C(-5;-1;4)$, $D(-2;3;-4)$

17. $A(-2;1;6)$, $B(-1;3;3)$, $C(2;4;-1)$, $D(2;-3;5)$

18. $A(5;2;3)$, $B(4;1;4)$, $C(3;-3;7)$, $D(-5;5;2)$

19. $A(-1;3;-2)$, $B(-4;7;-5)$, $C(3;-3;4)$, $D(2;-3;1)$

20. $A(-3;5;-2)$, $B(-7;3;-3)$, $C(-8;1;-3)$, $D(-4;1;-2)$

21. $A(6;2;-2)$, $B(3;3;-3)$, $C(2;5;-4)$, $D(2;-5;1)$

22. $A(-1;4;-6)$, $B(-2;2;-5)$, $C(3;5;-4)$, $D(1;-2;1)$

23. $A(4;6;-2)$, $B(2;4;-1)$, $C(5;3;-3)$, $D(-3;1;2)$

24. $A(-3;-2;5)$, $B(1;3;9)$, $C(-6;-6;3)$, $D(-1;2;2)$

25. $A(2;6;7)$, $B(-2;8;8)$, $C(5;3;5)$, $D(5;-4;-2)$

26. $A(-3;5;-2)$, $B(-2;3;-1)$, $C(-5;1;3)$, $D(4;-3;-1)$

27. $A(-2;-1;-4)$, $B(-5;4;1)$, $C(-1;-2;-6)$, $D(2;-9;-8)$

28. $A(5;-1;8)$, $B(6;-2;9)$, $C(2;3;6)$, $D(-1;2;5)$

29. $A(3;4;2)$, $B(-2;2;4)$, $C(4;5;3)$, $D(3;2;-2)$

30. $A(-2;4;3)$, $B(-1;-3;-1)$, $C(-3;2;1)$, $D(-2;3;2)$

№10. Установить взаимное расположение прямой l и плоскости β. В случае их пересечения найти координаты точки пересечения.

1. $l:\dfrac{x-1}{5}=\dfrac{y-5}{1}=\dfrac{z-1}{4};\ \beta: x+2y+3z+5=0$

2. $l:\begin{cases}2x+2y+3z+4=0,\\ x-2y-2z+2=0;\end{cases}\ \beta: 3x+y+2z+8=0$

3. $l:\begin{cases}x=-4t+2,\\ y=2t+4,\\ z=3t+1;\end{cases}\ \beta:\dfrac{x}{7/5}+\dfrac{y}{7/2}+\dfrac{z}{7/3}=1$

4. $l:\dfrac{x+6}{4}=\dfrac{y-2}{-3}=\dfrac{z-3}{2};\ \beta: 2x+3y+4z+1=0$

5. $l:\begin{cases}-3x+y-2z+4=0,\\ 2x-2y+3z+3=0;\end{cases}\ \beta: x+3y-z+7=0$

6. $l:\begin{cases}x=3t+5,\\ y=-t+1,\\ z=2t+4;\end{cases}\ \beta:\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{-1/2}+\dfrac{z}{-2/3}=1$

7. $l:\dfrac{x-2}{5}=\dfrac{y-3}{1}=\dfrac{z+4}{4};\ \beta: 3x-2y-z+5=0$

8. $l:\begin{cases}5x+2y+3z+5=0,\\ x+3y+5z+6=0;\end{cases}\ \beta: 4x-y-2z+4=0$

9. $l:\begin{cases}x=-t+4,\\ y=2t-2,\\ z=3t+1;\end{cases}\ \beta:\dfrac{x}{-7}+\dfrac{y}{7/2}+\dfrac{z}{-7/5}=1$

10. $l:\dfrac{x-3}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-4}{4};\ \beta: 2x+5y-4z+3=0$

11. $l:\begin{cases}3x-4y+5z-6=0,\\ 4x-3y+2z+6=0;\end{cases}\ \beta: 3x-y-z+12=0$

12. $l:\begin{cases} x=4t-3, \\ y=-2t+4, \\ z=5t-5; \end{cases}$ $\beta:\dfrac{x}{1}+\dfrac{y}{3/2}+\dfrac{z}{-3/2}=1$

13. $l:\dfrac{x+5}{2}=\dfrac{y-2}{3}=\dfrac{z-3}{4};$ $\beta:3x+4y-3z+10=0$

14. $l:\begin{cases} 4x-5y+3z-1=0, \\ x-2y+2z+2=0; \end{cases}$ $\beta:3x+y-5z-5=0$

15. $l:\begin{cases} x=-4t+2, \\ y=3t-5, \\ z=2t+3; \end{cases}$ $\beta:\dfrac{x}{2}+\dfrac{y}{-4/3}+\dfrac{z}{1}=1$

16. $l:\dfrac{x-2}{3}=\dfrac{y-4}{2}=\dfrac{z+1}{-4};$ $\beta:2x-5y-3z-11=0$

17. $l:\begin{cases} 3x-2y+z+4=0, \\ 2x+4y-3z+2=0; \end{cases}$ $\beta:6x-4y+2z+3=0$

18. $l:\begin{cases} x=4t+3, \\ y=-5t+2, \\ z=3t-1; \end{cases}$ $\beta:\dfrac{x}{3}+\dfrac{y}{6}+\dfrac{z}{-6}=1$

19. $l:\dfrac{x+5}{3}=\dfrac{y+4}{3}=\dfrac{z-2}{-7};$ $\beta:5x+2y+3z-4=0$

20. $l:\begin{cases} 4x+2y-3z+1=0, \\ 3x+y-2z+5=0; \end{cases}$ $\beta:2x+3y-z-3=0$

21. $l:\begin{cases} x=2t-1, \\ y=5t-3, \\ z=-4t+5; \end{cases}$ $\beta:\dfrac{x}{-2/3}+\dfrac{y}{1}+\dfrac{z}{2}=1$

22. $l:\dfrac{x+1}{3}=\dfrac{y+2}{2}=\dfrac{z-5}{-5};$ $\beta:4x-y+2z-8=0$

23. $l:\begin{cases} x-y+4z+3=0, \\ 2x+3y-z+2=0; \end{cases}$ $\beta:3x+3y-z-9=0$

24. $l:\begin{cases} x=-3t-4, \\ y=2t+3, \\ z=-7t+5; \end{cases}$ $\beta:\dfrac{x}{-9/5}+\dfrac{y}{-9/2}+\dfrac{z}{3}=1$

25. $l:\dfrac{x+5}{-3}=\dfrac{y-2}{5}=\dfrac{z+4}{3};$ $\beta:2x+3y-3z-7=0$

26. $l:\begin{cases}5x-2y+z-3=0,\\3x-y+2z+3=0;\end{cases}$ $\beta: 4x-y+5z+3=0$

27. $l:\begin{cases}x=5t+2,\\y=-4t-1,\\z=6t-2;\end{cases}$ $\beta: \dfrac{x}{-1}+\dfrac{y}{1/2}+\dfrac{z}{2/3}=1$

28. $l:\dfrac{x-4}{5}=\dfrac{y+1}{-6}=\dfrac{z-2}{4};$ $\beta: 5x+2y-3z-9=0$

29. $l:\begin{cases}x-2y+2z+2=0,\\3x-3y+2z+4=0;\end{cases}$ $\beta: 3x-2y+z-1=0$

30. $l:\begin{cases}x=5t-1,\\y=-4t+3,\\z=2t+4;\end{cases}$ $\beta: \dfrac{x}{-3}+\dfrac{y}{-4}+\dfrac{z}{3}=1$

II. Практические задания по теме «Введение в математический анализ»

№1. Найти предел последовательности.

1. $x_n=\dfrac{5n^4-3n^2+2}{3n^3-2n^2-n}$
2. $x_n=\dfrac{1+3n^5-8n^8}{3-n^2+2n^8}$
3. $x_n=\dfrac{1-2n^2-9n^5}{3n^7+7n^3-5n}$
4. $x_n=\dfrac{3-4n^4+5n^6}{2n^8+4n^2-7}$
5. $x_n=\dfrac{2n^5+3n^4+2n}{5n^2-2n+4}$
6. $x_n=\dfrac{3+2n^3-6n^5}{2n-n^2-3n^5}$
7. $x_n=\dfrac{1+5n^2+4n^4}{2-3n^3-2n^4}$
8. $x_n=\dfrac{9-4n-2n^2}{6n^4+8n^2-5n}$
9. $x_n=\dfrac{5n^7+n^5+1}{n^5-2n^3-4}$
10. $x_n=\dfrac{7n^8-2n^6+n}{2-4n^2-3n^3}$
11. $x_n=\dfrac{9n^7-2n^8+2n}{3n^7+7n-4}$
12. $x_n=\dfrac{4+2n^3-5n^4}{n-3n^5+6n^7}$
13. $x_n=\dfrac{2+4n^3-5n^4}{7+7n^3-6n^8}$
14. $x_n=\dfrac{7n^6+3n^4+8n}{3-5n-n^5}$
15. $x_n=\dfrac{6n^3-3n^2+5}{n^3-7n+2}$
16. $x_n=\dfrac{1+5n^4+8n^9}{4n^9-5n^7+n}$
17. $x_n=\dfrac{n-4n^2+5n^3}{2-7n^4+6n^5}$
18. $x_n=\dfrac{4-3n^2+6n^9}{n^8-5n^5-n}$
19. $x_n=\dfrac{3n^4+n^5+8n^7}{2n^3+5n^2-1}$
20. $x_n=\dfrac{4n^8+3n^6-2}{1-4n^7-4n^8}$
21. $x_n=\dfrac{3-2n^4+8n^5}{n^6+6n^5-2}$

22. $x_n = \dfrac{3n^3 - 2n^2 + 4}{3n^5 - 7n - 1}$ 23. $x_n = \dfrac{7 - 2n^4 + 4n^6}{2 - 6n^2 + 3n^4}$ 24. $x_n = \dfrac{n - 2n^2 - 8n^4}{2n^4 - 6n^3 + 1}$

25. $x_n = \dfrac{5 - 4n^3 - 9n^9}{9n^9 + 7n^6 - n}$ 26. $x_n = \dfrac{5n^4 + n^2 + 2}{2n^6 - 9n^4 - 4n}$ 27. $x_n = \dfrac{9n^3 - 3n^2 + 5}{2n^2 + 5n - 2}$

28. $x_n = \dfrac{1 + 5n^3 - n^8}{3n - n^6 + 2n^7}$ 29. $x_n = \dfrac{6 + 9n - 5n^2}{4 - 2n + n^2}$ 30. $x_n = \dfrac{5n^3 - n^2 + 2n}{3n^8 - 2n^6 - 1}$

№2. Найти предел функции.

1. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{\sqrt{2x - 3} - \sqrt{x + 2}}{2x^2 - 11x + 5}$ 2. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{2x^2 + 9x + 4}{\sqrt{7 + x} - \sqrt{11 + 2x}}$

3. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{\sqrt{3x + 4} - \sqrt{7x - 4}}{3x^2 - 11x + 10}$ 4. $\lim\limits_{x \to -4} \dfrac{3x^2 + 8x - 16}{\sqrt{3 - x} - \sqrt{-9 - 4x}}$

5. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{5x + 7} - \sqrt{1 - x}}{7x^2 + 5x - 2}$ 6. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{4x^2 + 5x + 1}{\sqrt{-9x + 7} - \sqrt{8 - 8x}}$

7. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{\sqrt{3 - 2x} - \sqrt{6 - x}}{5x^2 + 11x - 12}$ 8. $\lim\limits_{x \to -7} \dfrac{2x^2 + 15x + 7}{\sqrt{-2x - 5} - \sqrt{2 - x}}$

9. $\lim\limits_{x \to -5} \dfrac{\sqrt{x + 6} - \sqrt{2x + 11}}{2x^2 + 9x - 5}$ 10. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2 - 13x + 10}{\sqrt{4x - 5} - \sqrt{x + 1}}$

11. $\lim\limits_{x \to -1} \dfrac{\sqrt{3x + 8} - \sqrt{2x + 7}}{7x^2 + 5x - 2}$ 12. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{2x^2 + 5x - 3}{\sqrt{1 - 5x} - \sqrt{10 - 2x}}$

13. $\lim\limits_{x \to 7} \dfrac{\sqrt{x + 2} - \sqrt{2x - 5}}{2x^2 - 15x + 7}$ 14. $\lim\limits_{x \to -2} \dfrac{5x^2 + 12x + 4}{\sqrt{6 - 5x} - \sqrt{4 - 6x}}$

15. $\lim\limits_{x \to 6} \dfrac{\sqrt{5x + 6} - \sqrt{7x - 6}}{2x^2 - 15x + 18}$ 16. $\lim\limits_{x \to -3} \dfrac{5x^2 + 13x - 6}{\sqrt{3 - 5x} - \sqrt{-3 - 7x}}$

17. $\lim\limits_{x \to 1} \dfrac{\sqrt{x + 4} - \sqrt{2x + 3}}{3x^2 - 4x + 1}$ 18. $\lim\limits_{x \to 2} \dfrac{4x^2 - 11x + 6}{\sqrt{7x - 6} - \sqrt{3x + 2}}$

19. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{4x - 3} - \sqrt{6x - 9}}{3x^2 - 11x + 6}$ 20. $\lim\limits_{x \to -6} \dfrac{2x^2 + 9x - 18}{\sqrt{7 - 3x} - \sqrt{1 - 4x}}$

21. $\lim\limits_{x \to 3} \dfrac{\sqrt{5x - 7} - \sqrt{2x + 2}}{4x^2 - 7x - 15}$ 22. $\lim\limits_{x \to 5} \dfrac{2x^2 - 9x - 5}{\sqrt{3x - 7} - \sqrt{2x - 2}}$

23. $\lim\limits_{x\to 8}\dfrac{\sqrt{4x+4}-\sqrt{5x-4}}{8+7x-x^2}$

24. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{3x^2-7x-20}{\sqrt{8-x}-\sqrt{3x-8}}$

25. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{2x+5}-\sqrt{8x-7}}{7x^2-9x-10}$

26. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{2x^2-9x+4}{\sqrt{2x-4}-\sqrt{3x-8}}$

27. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{\sqrt{6x+7}-\sqrt{x+2}}{9x^2+11x+2}$

28. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{2x^2+15x+18}{\sqrt{-1-x}-\sqrt{-7-2x}}$

29. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\sqrt{8x-7}-\sqrt{5x-1}}{5x^2-12x+4}$

30. $\lim\limits_{x\to -5}\dfrac{4x^2+19x-5}{\sqrt{-7-2x}-\sqrt{x+8}}$

№3. Найти предел функции.

1. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x+5}{3x-2}\right)^{5x+8}$

2. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4-3x}{7-3x}\right)^{\frac{2x-3}{5}}$

3. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{7x-3}{7x+4}\right)^{2x-5}$

4. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{6-x}{2-x}\right)^{\frac{7-3x}{2}}$

5. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x+1}{4x-9}\right)^{3-5x}$

6. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5+2x}{9+2x}\right)^{3x-5}$

7. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2+6x}{5+6x}\right)^{4x+1}$

8. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{7x+2}{7x-3}\right)^{\frac{4+3x}{9}}$

9. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{1-2x}{5-2x}\right)^{\frac{5x+2}{7}}$

10. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-6x}{9-6x}\right)^{\frac{3-4x}{5}}$

11. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-1}{4x+5}\right)^{5-x}$

12. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-3}{4x+7}\right)^{\frac{4-x}{5}}$

13. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-8x}{7-8x}\right)^{3x+4}$

14. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+2}{5x+8}\right)^{\frac{4-2x}{3}}$

15. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8x-3}{8x+2}\right)^{5-8x}$

16. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8x+4}{8x-5}\right)^{\frac{1+4x}{3}}$

17. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-7}{3x+4}\right)^{5-2x}$

18. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5-x}{6-x}\right)^{\frac{4x+9}{7}}$

19. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5-5x}{2-5x}\right)^{2-9x}$

20. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3-8x}{1-8x}\right)^{\frac{9-x}{7}}$

21. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2-9x}{5-9x}\right)^{7-3x}$

22. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5+7x}{2+7x}\right)^{\frac{3x+4}{9}}$

23. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x-2}{5x+6}\right)^{3+6x}$

24. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4x-6}{4x+1}\right)^{\frac{2x+7}{3}}$

25. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4+6x}{1+6x}\right)^{3+2x}$

26. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{2x+6}{2x+3}\right)^{\frac{1-5x}{7}}$

27. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{3x-4}{3x+7}\right)^{3+8x}$

28. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{4-x}{9-x}\right)^{\frac{4-9x}{5}}$

29. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{8x+4}{8x+1}\right)^{-2x-7}$

30. $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\dfrac{5x+3}{5x-9}\right)^{\frac{3x-2}{5}}$

№4. Найти предел, используя эквивалентные бесконечно малые функции.

1. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos 4x}{x\arcsin 4x}$
2. $\lim\limits_{x\to -2}\dfrac{x^2-x-6}{\arcsin^2\left(\operatorname{tg}(x+2)\right)}$
3. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{\sin\left(e^{2x-6}-1\right)}{1-\cos(6-2x)}$
4. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin\left(2^{8x}-1\right)}{\operatorname{tg}(4x)}$
5. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{\log_3\left(1+\sin(x-2)\right)}{x^3-8}$
6. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 7x-\cos 5x}{\ln(1+\sin 2x)}$
7. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{5x}-1}{\log_5(1+2x)}$
8. $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{x^3+64}{1-\cos(2x+8)}$
9. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{\sin^2\left(\operatorname{tg}(5-x)\right)}{x^3-25x}$
10. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{2^{x-3}-1}{x^2+2x-15}$
11. $\lim\limits_{x\to -6}\dfrac{\ln\left(1+\sin(x+6)\right)}{x^2-36}$
12. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{x^2-6x}{\cos 8x-\cos 2x}$
13. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(5^x-1\right)}{x^2+x}$
14. $\lim\limits_{x\to -3}\dfrac{x^3+27}{\ln\left(1+\sin(6+2x)\right)}$
15. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(\arcsin(2x)\right)}{\cos 3x-\cos 5x}$
16. $\lim\limits_{x\to 3}\dfrac{e^{\sin(3-x)}-1}{x^2-9}$
17. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\arcsin\left(1-\cos(8x)\right)}{\ln(1+4x)}$
18. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3\left(\ln(1+2x)\right)}{7x^2+4x}$
19. $\lim\limits_{x\to \frac{1}{2}}\dfrac{\sin^2(4-8x)}{4x^2-4x+1}$
20. $\lim\limits_{x\to 5}\dfrac{x^2-4x-5}{\ln\left(1+\sin(5-x)\right)}$
21. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^2-4x+4}{1-\cos(4-2x)}$
22. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{1-\cos(3x)}{\operatorname{tg}^2(6x)}$
23. $\lim\limits_{x\to -1}\dfrac{x^3+1}{\sin\left((1+2x)^6-1\right)}$
24. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}\left(\log_4(1+5x)\right)}{x^3+2x^2+5x}$
25. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{arctg}\left(e^x-1\right)}{\cos 5x-\cos x}$
26. $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x^3-16x}{\arcsin\left(\operatorname{tg}(4-x)\right)}$
27. $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{e^{3x-6}-1}{1-\cos(4-2x)}$
28. $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sin\left(e^{3-3x}-1\right)}{x^2-4x+3}$
29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_6\left(1+\operatorname{tg}(5x)\right)}{x^3-6x^2+8x}$
30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos 9x-\cos 3x}{\operatorname{arctg} 2x}$

№5. Исследовать функцию на непрерывность и построить ее график.

1. $f(x)=\begin{cases}3-x, & x<-1\\ x^2+3, & -1\le x<2\\ 5, & x\ge 2\end{cases}$
2. $f(x)=\begin{cases}-x^2+5, & x\le -1\\ (x-1)^2, & -1<x\le 4\\ 7-x, & x>4\end{cases}$
3. $f(x)=\begin{cases}2x+5, & x<-4\\ x^2+4x+5, & -4\le x\le 1\\ 11-x, & x>1\end{cases}$
4. $f(x)=\begin{cases}(x+2)^2, & x\le -1\\ 2x+3, & -1<x<2\\ -x^2+5, & x\ge 2\end{cases}$

5. $f(x)=\begin{cases}1-x, & x<-2\\ -x^2-2x+3, & -2\le x<2\\ 2x, & x\ge 2\end{cases}$

6. $f(x)=\begin{cases}-1, & x\le -1\\ x^2-5, & -1<x\le 2\\ -(1-x)^2, & x>2\end{cases}$

7. $f(x)=\begin{cases}(x+3)^2, & x\le -2\\ -x^2+3, & -2<x\le 1\\ 3x-1, & x>1\end{cases}$

8. $f(x)=\begin{cases}-2x-3, & x<-4\\ 5, & -4\le x<1\\ x^2-4x+5, & x\ge 1\end{cases}$

9. $f(x)=\begin{cases}5x+8, & x<-1\\ x^2, & -1\le x<2\\ -x^2+6x-4, & x\ge 2\end{cases}$

10. $f(x)=\begin{cases}3, & x\le -1\\ x^2-4, & -1<x\le 3\\ 11-2x, & x>3\end{cases}$

11. $f(x)=\begin{cases}5, & x\le 2\\ -x^2+8x-7, & 2<x\le 7\\ 2x-9, & x>7\end{cases}$

12. $f(x)=\begin{cases}-4x-29, & x<-4\\ -x^2-2x-5, & -4\le x\le 0\\ x-6, & x>0\end{cases}$

13. $f(x)=\begin{cases}x^2+8x+11, & x<-3\\ -x^2+5, & -3\le x\le 1\\ x-1, & x>1\end{cases}$

14. $f(x)=\begin{cases}x^2-4, & x\le 1\\ 2x-5, & 1<x\le 4\\ x^2-10x+15, & x>4\end{cases}$

15. $f(x)=\begin{cases}x^2+8x+10, & x\le -1\\ 3, & -1<x<2\\ -x^2+6x-4, & x\ge 2\end{cases}$

16. $f(x)=\begin{cases}-2x-7, & x\le -5\\ x^2+4x-3, & -5<x<0\\ x-3, & x\ge 0\end{cases}$

17. $f(x)=\begin{cases}-x^2+3, & x<3\\ x-6, & 3\le x<6\\ (x-6)^2, & x\ge 6\end{cases}$

18. $f(x)=\begin{cases}x^2+8x+3, & x\le -2\\ -(x-1)^2, & -2<x\le 3\\ 5-2x, & x>3\end{cases}$

19. $f(x)=\begin{cases}-3, & x<2\\ x^2-10x+15, & 2\le x\le 7\\ 1-x, & x>7\end{cases}$

20. $f(x)=\begin{cases}x+5, & x<-4\\ -3x-5, & -4\le x<-2\\ -x^2+5, & x\ge -2\end{cases}$

21. $f(x)=\begin{cases}x^2+2x-7, & x<1\\ x^2-6x+1, & 1\le x\le 7\\ x-5, & x>7\end{cases}$

22. $f(x)=\begin{cases}-x^2-10x-15, & x<-1\\ -x^2+4x-1, & -1\le x\le 4\\ x-3, & x>4\end{cases}$

23. $f(x)=\begin{cases} x+7, & x<-3 \\ x^2-4, & -3\le x\le 4 \\ 12, & x>4 \end{cases}$

24. $f(x)=\begin{cases} -3x, & x<1 \\ -x^2+6x-8, & 1\le x\le 6 \\ 7-2x, & x>6 \end{cases}$

25. $f(x)=\begin{cases} x^2+8x+7, & x<-1 \\ x^2-4x-5, & -1\le x<6 \\ 2x-7, & x\ge 6 \end{cases}$

26. $f(x)=\begin{cases} -x^2-2x+9, & x\le 2 \\ -x^2+10x-15, & 2<x\le 8 \\ 2x-9, & x>8 \end{cases}$

27. $f(x)=\begin{cases} x^2+6x+5, & x<0 \\ 5, & 0\le x\le 3 \\ -x^2+8x-7, & x>3 \end{cases}$

28. $f(x)=\begin{cases} -7-2x, & x\le -4 \\ x+5, & -4<x<1 \\ (x-2)^2, & x\ge 1 \end{cases}$

29. $f(x)=\begin{cases} 3x+2, & x\le 1 \\ x^2-6x+10, & 1<x\le 6 \\ 2x-9, & x>6 \end{cases}$

30. $f(x)=\begin{cases} 2x+7, & x<-3 \\ x^2-6, & -3\le x\le 2 \\ -x, & x>2 \end{cases}$

III. Практические задания по теме «Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных»

№1. Найти производную функции.

1. $y=5\sqrt{x}+\frac{4}{x^3}-7x^2+2\sqrt[3]{x^4}$

2. $y=\frac{3}{x}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}+5x^6+2x$

3. $y=3x^4-\frac{5}{\sqrt[7]{x^3}}-2x^7+\frac{6}{x^8}$

4. $y=4\sqrt{x^5}-\frac{2}{x}+3x^6+\frac{6}{\sqrt{x^7}}$

5. $y=4\sqrt{x^7}-\frac{1}{6\sqrt{x^5}}-\frac{8}{x}-5$

6. $y=6x-3x^5+\frac{5}{x^4}+\frac{1}{2\sqrt{x^9}}$

7. $y=\frac{6}{x^2}-\sqrt[3]{x^5}+2x^4-\frac{1}{3x}$

8. $y=5\sqrt[3]{x^4}-2x+4x^7-\frac{5}{7x^6}$

9. $y=8x^3-\frac{1}{x^2}+9\sqrt[3]{x^4}-3x$

10. $y=\frac{1}{2x^3}+6x-\frac{4}{\sqrt[3]{x^5}}-2\sqrt{x^7}$

11. $y=4\sqrt[7]{x^6}-\frac{2}{x^4}+3x^4-\frac{1}{3\sqrt{x}}$

12. $y=3\sqrt{x^5}-\frac{1}{6x^3}+3x-\frac{8}{\sqrt[5]{x^7}}$

13. $y=\frac{4}{\sqrt[3]{x^2}}-\frac{3}{2x^4}+3x^5-8\sqrt{x}$

14. $y=\frac{6}{x^3}+\frac{1}{\sqrt[7]{x^5}}-3x^3+3$

15. $y=4\sqrt{x}+\frac{5}{x^4}+\sqrt[5]{x^2}-\frac{1}{7x}$

16. $y=\frac{4}{3x^4}-\frac{1}{\sqrt[3]{x^4}}+x^5-8\sqrt{x^3}$

17. $y = 5x^3 - \frac{9}{\sqrt[5]{x^3}} - \frac{4}{x^2} - 8$

18. $y = \frac{3}{x^4} - \frac{2}{5\sqrt[9]{x^7}} + x - 7$

19. $y = \frac{3}{x} + \frac{2}{x^4} + 5\sqrt[7]{x^6} - x^2$

20. $y = 4x^3 - \frac{5}{x} + 8\sqrt{x^5} - \frac{1}{\sqrt[5]{x^4}}$

21. $y = 5x^6 - \frac{3}{x^5} + \frac{1}{2x} - 4\sqrt[9]{x^2}$

22. $y = 3\sqrt{x} - 5x^4 + \frac{3}{x^5} - \frac{2}{\sqrt[7]{x^4}}$

23. $y = \frac{2}{\sqrt[8]{x^3}} + \frac{1}{4x^2} - x + 6$

24. $y = x^6 - \frac{5}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{8}{x^4} - x$

25. $y = 4x^6 + \frac{1}{4\sqrt[3]{x^2}} - \sqrt{x^5} + \frac{6}{x}$

26. $y = 4x - 3\sqrt{x^5} - \frac{2}{\sqrt[5]{x^3}} + \frac{5}{x}$

27. $y = \frac{1}{2\sqrt[3]{x^8}} + \frac{3}{x^2} - 5x^6 + 6\sqrt{x}$

28. $y = \frac{5}{x^6} + 3\sqrt{x^5} - \frac{1}{\sqrt[3]{x^7}} + 4x$

29. $y = \frac{9}{x^3} + \frac{1}{3\sqrt{x}} + 2\sqrt[7]{x^4} + 3x^3$

30. $y = \frac{7}{\sqrt{x}} - \frac{5}{x^3} + 3\sqrt[6]{x^5} - 4x^4$

№2. Найти производную функции.

1. $y = \ln^3\left(x^2 - 5\right) \cdot \cos\sqrt{\operatorname{tg} 2x}$

2. $y = \frac{\arccos^4\left(e^{2-3x^4}\right)}{\sqrt{\operatorname{ch}(2x-3)}}$

3. $y = \operatorname{arctg}\left(\ln(7-2x)\right) \cdot \sqrt{\operatorname{sh}(x\cos 7)}$

4. $y = \frac{\sqrt[3]{\operatorname{ch} 3x}}{\ln\left(5^{1-6x} - 3x^7\right)}$

5. $y = \sqrt[3]{\operatorname{ctg}\left(2^x + x^3\right)} \cdot \log_2\left(e^{3-\sin x}\right)$

6. $y = \frac{\sqrt{\cos\left(2^{\operatorname{th} x^4}\right)}}{\arcsin^3\left(4 + x^3\right)}$

7. $y = \log_4^5\left(x^4 - 5x^2\right) \cdot \operatorname{tg}\left(\sin^2 2x\right)$

8. $y = \frac{\log_4\left(\operatorname{ch}^5(1-x)\right)}{\operatorname{tg}\sqrt{\sin 5x}}$

9. $y = \sqrt[4]{\ln^3\left(3 - x^2\right)} \cdot \operatorname{cth}\left(5^{2x} - 3x^5\right)$

10. $y = \frac{e^{\arccos x^4}}{\ln^6\left(\operatorname{cth}\sqrt[5]{5x^6 - 2}\right)}$

11. $y = \arccos^4(\operatorname{tg} x) \cdot \sqrt{\ln\left(e^x - x\sin 5\right)}$

12. $y = \frac{\operatorname{arcctg}\left(\log_3^5(3x+1)\right)}{\sqrt{\cos^3\left(5x^3 - \ln 2\right)}}$

13. $y = \operatorname{tg}\left(\log_2^4\left(5x^3\right)\right) \cdot \left(3e^{5x} - 5\right)^3$

14. $y = \frac{\left(\ln^4 x - \sin x^3\right)^6}{e^{\operatorname{sh}\left(2\sqrt{x} - 3\right)}}$

15. $y=\arcsin\left(\mathrm{ch}^5 4x\right)\cdot\ln\sqrt{\mathrm{tg}^7\left(x^2-3^x\right)}$

16. $y=\dfrac{\sqrt[7]{3^{5x}-\mathrm{ctg}\,x}}{\cos\left(\arcsin^3(\ln x)\right)}$

17. $y=\sqrt[3]{7x^4+\mathrm{ch}^3 5x-1}\cdot\sin^3\left(\mathrm{ctg}\,3x\right)$

18. $y=\dfrac{\sqrt{\log_3\left(\mathrm{e}^{-x\cos 5}\right)}}{\arccos^5\left(\mathrm{tg}(1-5x)\right)}$

19. $y=\mathrm{th}\left(\mathrm{e}^{4x^3-5x+2}\right)\cdot\ln\sqrt{\mathrm{arctg}(2-x)}$

20. $y=\dfrac{\mathrm{th}^5\left(\sin\sqrt[3]{x^4-4^x}\right)}{\sqrt{\mathrm{ch}^3 2x-\ln x}}$

21. $y=\mathrm{cth}\sqrt[5]{\log_4^3\left(3x^3\right)}\cdot\left(x\cos 7+6^{5x^2}\right)$

22. $y=\dfrac{\left(x\ln 3-\mathrm{sh}\sqrt[6]{2x}\right)^4}{\sqrt{\mathrm{arcctg}\left(2\sqrt[5]{x}\right)}}$

23. $y=\sqrt[7]{\ln 2-\cos^2 5x}\cdot\mathrm{arctg}\left(\mathrm{sh}^2\left(x^4\right)\right)$

24. $y=\dfrac{\mathrm{e}^{\sqrt{\cos\left(8x^2-3x\right)}}}{\log_3^5\left(\arcsin x^3\right)}$

25. $y=\cos\left(\mathrm{e}^{3x^2-x\sin 2}\right)\cdot\sqrt{\log_4\left(\mathrm{th}(3-x)\right)}$

26. $y=\dfrac{\ln\left(\arcsin^3(\cos x)\right)}{\mathrm{tg}^6\left(3^{\mathrm{cth}(x+\ln x)}\right)}$

27. $y=\mathrm{e}^{\mathrm{sh}^5\left(4^x-2x\right)}\cdot\mathrm{ctg}^3\sqrt{\ln(2-5x)}$

28. $y=\dfrac{5^{\arccos\sqrt[4]{\sin x^4}}}{\sqrt{\cos^5 x-\cos x^5}}$

29. $y=\mathrm{cth}\sqrt[4]{5^{3x^4-x^3+x}}\cdot\mathrm{arctg}\left(\ln^3(1-5x)\right)$

30. $y=\dfrac{\left(\ln\left(3x^5\right)-\cos\sqrt[3]{x}\right)^4}{\mathrm{e}^{\sqrt{\mathrm{ctg}\left(\ln^2 x\right)}}}$

№3. Найти производные первого и второго порядков функции $y=y(x)$.

1. $\mathrm{tg}\left(2x^2-7y\right)=x$

2. $\begin{cases} x=\ln^2 t \\ y=t^4 \end{cases}$

3. $\mathrm{e}^{xy}+2x=y^3$

4. $\begin{cases} x=\mathrm{arctg}\,t^2 \\ y=\ln t^4 \end{cases}$

5. $\ln\dfrac{y}{x}+2x^2+y=0$

6. $\begin{cases} x=\sqrt{t^2+3} \\ y=\left(t^2+3\right)^2 \end{cases}$

7. $\sqrt{xy}+\mathrm{tg}\,y=3$

8. $\begin{cases} x=\arccos t \\ y=\left(1-t^2\right)^{-1/2} \end{cases}$

9. $\sin^2\left(x-y^4\right)=x$

10. $\begin{cases} x=\mathrm{e}^{-4t+3} \\ y=t^2\,\mathrm{e}^{2t+3} \end{cases}$

11. $2^{xy}+\sin y=1$

12. $\begin{cases} x=(t+2)^{-1} \\ y=t^3(t+2)^{-1} \end{cases}$

13. $xy = x^2 + \operatorname{arctg} y$

14. $\begin{cases} x = t^4 \\ y = t^2 \ln t \end{cases}$

15. $\operatorname{tg} x + e^{xy} = 5$

16. $\begin{cases} x = 3\cos^2 t \\ y = t^2 \sin^2 t \end{cases}$

17. $\ln y - \operatorname{ch}(xy) = 2$

18. $\begin{cases} x = e^{2t} + 3 \\ y = t^2 e^{-4t} \end{cases}$

19. $\cos^2\left(x^3 - y\right) = y$

20. $\begin{cases} x = 1 - t^2 \\ y = \ln\left(t^3 + 2t^2\right) \end{cases}$

21. $x^2 y - e^{xy} = 0$

22. $\begin{cases} x = 3t^4 + 2t^3 \\ y = 2t - 5t^2 \end{cases}$

23. $y^2 x = 3y + \operatorname{arctg} x$

24. $\begin{cases} x = \cos^4 3t \\ y = \sin 3t \end{cases}$

25. $x^3 + y^2 = \operatorname{sh}(xy)$

26. $\begin{cases} x = \ln t^2 \\ y = t^2 \ln t \end{cases}$

27. $y \ln x + xy^2 = x^2$

28. $\begin{cases} x = \sin^3 2t \\ y = \cos^2 2t \end{cases}$

29. $\operatorname{cth}\left(4x - y^3\right) = y$

30. $\begin{cases} x = \arcsin t \\ y = t\sqrt{1 - t^2} \end{cases}$

№4. Найти предел с помощью правила Лопиталя.

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(2x - 3)}{\sqrt[3]{x + 5}}$

2. $\lim\limits_{x \to 1} \lg x \cdot \lg(x - 1)$

3. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\operatorname{tg} x - x}{e^{\operatorname{tg} x} - x - 1}$

4. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x^2 + \sin^2 x}{1 - \cos^2 2x}$

5. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{tg}^2 2x}{\operatorname{tg}^2 4x}$

6. $\lim\limits_{x \to 0} \left(1 - e^{5x}\right) \operatorname{ctg} x$

7. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(7^{\frac{1}{x}} - 1\right) x$

8. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln\left(1 + x^2\right)}{1 - \cos 5x}$

9. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin^2 5x}{e^{x^2} - 1 - x^2}$

10. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos\left(e^x - 1\right)}{\sin^2 x}$

11. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{x^5 - 3x^2 + 8}{x \ln x}$

12. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{ctg}^2 6x}{\operatorname{ctg}^2 3x}$

13. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{\operatorname{ctg}^2 2x}{\operatorname{ctg}^2 4x}$

14. $\lim\limits_{x \to 0} x^2 \cdot \ln\left(\sin^2 x\right)$

15. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\sin x - x}{\operatorname{tg} x - x}$

16. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\ln(x + 5)}{\sqrt[3]{2x - 3}}$

17. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos 2x - e^{3x}}{\ln\left(1 - x^3\right)}$

18. $\lim\limits_{x \to +\infty} \left(\operatorname{arctg} x - \dfrac{\pi}{2}\right) \ln x$

19. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{1 - \cos^2 4x}{x - \operatorname{tg} x}$

20. $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\log_2(\cos 2x)}{\log_3(\cos 3x)}$

21. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{2}} \dfrac{1 - \sin x}{(\pi - 2x)^2}$

22. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{3x + 7}}{\lg(x - 2)}$

23. $\lim\limits_{x \to \frac{\pi}{3}} \dfrac{\operatorname{tg}^2 6x}{\operatorname{tg}^2 3x}$

24. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{5x + 4}}{\log_2(x - 1)}$

25. $\lim\limits_{x\to 2}(x-2)\ln(x-2)$ 26. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{e^{x^2}-x^2-1}{\sin^2 3x}$ 27. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sin x-\operatorname{arctg} x}{x^2}$

28. $\lim\limits_{x\to +\infty}\dfrac{\ln^2 x}{(3x+5)^3}$ 29. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{tg}^3 2x}{1-\cos 6x}$ 30. $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\log_3(\sin 3x)}{\log_2(\sin 2x)}$

№5. Найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума, максимум и минимум функции, промежутки вогнутости, выпуклости, точки перегиба графика функции.

1. $y=x^3+15x^2+63x+66$
2. $y=x^3+12x^2+36x-4$
3. $y=x^3-9x^2+24x-16$
4. $y=x^3-12x^2+21x+30$
5. $y=x^3-6x^2-15x+49$
6. $y=x^3-3x^2-24x+28$
7. $y=x^3+6x^2+9x+22$
8. $y=x^3+6x^2-36x-80$
9. $y=x^3-9x^2-21x+17$
10. $y=x^3+3x^2-45x-40$
11. $y=x^3-6x^2+9x+10$
12. $y=4x^3-30x^2+72x-51$
13. $y=x^3-3x^2-9x+2$
14. $y=x^3-3x^2-9x+6$
15. $y=4x^3+18x^2-48x+9$
16. $y=2x^3-9x^2-60x-57$
17. $y=2x^3-27x^2+84x+15$
18. $y=x^3+12x^2+45x+50$
19. $y=2x^3-3x^2-36x+6$
20. $y=x^3-3x^2-72x+80$
21. $y=2x^3-24x^2+90x-6$
22. $y=4x^3+6x^2-24x-5$
23. $y=6x^3+9x^2-36x+20$
24. $y=x^3-3x^2-24x-15$
25. $y=2x^3-9x^2-24x+12$
26. $y=4x^3-18x^2+24x-11$
27. $y=2x^3-21x^2+36x+7$
28. $y=x^3+9x^2-48x-30$
29. $y=x^3+9x^2+15x-3$
30. $y=4x^3+30x^2+48x+1$

№6. Найти частные производные второго порядка функции z.

1. $z=x^2y^4+2x^3y+5x^2+7y^3-1$
2. $z=4y^4x^3-5y^3x^2-4x+7y^3+16$
3. $z=3x^3y^4+2xy+8x^2-2y^4+2$
4. $z=5y^3x^2+2y^3x^4-x^3+y^3-17$
5. $z=4xy^3-5x^2y+3x^3-y^4-3$
6. $z=3y^5x^3-y^4x^6+x^4-4y^4+18$
7. $z=2x^2y^2-5x^3y^4-2x+y^2+4$
8. $z=y^5x^2-y^3x^2+5x^5-2y^7-19$
9. $z=x^4y^5-x^2y^3+x^4-3y-5$
10. $z=y^6x^7-4x^3y-5x^2+3y^4+20$
11. $z=3x^2y^4-4x^3y^3+2x^5-y+6$
12. $z=x^5y^5-3x^6y^8+2x^4-5y-21$
13. $z=4xy-2x^4y^6+7x^5+y^3-7$
14. $z=x^6y-8x^2y^2+2x-3y^3+22$
15. $z=5x^2y^3-8xy^2+9y-2x^3+8$
16. $z=x^5y^6+2x^4y^7-x^4+y^5-23$

17. $z = 3x^5y^2 - x^3y^2 + 2x - y^5 - 9$

18. $z = x^8y^9 - x^5y^2 + 3x + 2y^4 + 24$

19. $z = x^6y^7 + 2x^4y^5 + 2y^2 - 3x^2 + 10$

20. $z = 3x^2y^4 - x^4y^2 + 2y^8 - 3x^4 - 25$

21. $z = x^8y^5 - 3x^5y + 2y^4 - 3x^3 - 11$

22. $z = 5xy^3 - 3y^2x^6 - 2x^6 + 4y^4 + 26$

23. $z = x^4y^6 - 9xy - 5x^5 - 4y^4 + 12$

24. $z = 8x^2y^3 + 2y^3x^9 - x^4 + 4y - 27$

25. $z = 5xy^3 + 2x^2y^7 + 5x^4 + 2y^6 - 13$

26. $z = 9xy + x^4y^5 + 2x^6 - 3y^3 + 28$

27. $z = 6x^2y + 3xy^3 - 2y^5 + x^3 + 14$

28. $z = x^8y^2 - 3x^2y + 3x^4 + 4y^5 - 29$

29. $z = 3xy^2 - 4y^3x^2 + 5y^2 - 7x^4 - 15$

30. $z = 4x^4y^4 - 8xy^2 + x^3 - 6y^2 + 30$

№7. С помощью полного дифференциала вычислить приближенно данную величину (результат записать с двумя знаками после запятой).

1. $\sqrt{3{,}01^2 + 3{,}98^2}$

2. $\dfrac{3{,}01^3}{5{,}08^2 - 1{,}98^4}$

3. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{2{,}01^2}{0{,}98} - 3\right)$

4. $\sqrt[4]{5{,}02^2 - 2{,}97^2}$

5. $3{,}01^2 \cdot 1{,}97^2 \cdot 0{,}98^3$

6. $\operatorname{arctg}\dfrac{0{,}98^2}{2{,}01^3 - 7}$

7. $\ln\dfrac{0{,}97^3}{3{,}01^2 - 8}$

8. $3{,}97^2 \cdot 0{,}99^3 \cdot 1{,}98^2$

9. $\dfrac{2{,}98^2 + 4{,}01^2}{5{,}02}$

10. $\ln\left(\dfrac{1{,}97^2}{0{,}98^4} - 3\right)$

11. $\sqrt{6{,}03^2 + 7{,}98^2}$

12. $\dfrac{5{,}02^2 - 1{,}98^4}{3{,}03^2}$

13. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1{,}97^3}{1{,}01^2} - 7\right)$

14. $\sqrt{8{,}03^2 + 6{,}98^2 + 8}$

15. $2{,}01^4 \cdot 2{,}99^2 \cdot 1{,}02^3$

16. $\operatorname{arctg}\dfrac{2{,}03^5 + 4}{5{,}97^2}$

17. $\ln\dfrac{2{,}01^4}{2{,}98^2 + 7}$

18. $4{,}98^2 \cdot 0{,}97^5 \cdot 2{,}01^2$

19. $\dfrac{3{,}98^3 + 6{,}01^2}{4{,}97^2}$

20. $\ln\dfrac{5{,}03^2 + 2}{2{,}98^3}$

21. $\sqrt{1{,}97^7 + 4{,}02^2}$

22. $\dfrac{10{,}02^2}{2{,}03^6 + 5{,}99^2}$

23. $\sqrt[4]{5{,}02^2 + 5{,}97^3 + 15}$

24. $\operatorname{arctg}\dfrac{3{,}01^3 - 2}{4{,}98^2}$

25. $\operatorname{arctg}\left(\dfrac{1{,}98^5}{4{,}03^2}-1\right)$ 26. $0{,}97^4\cdot 1{,}99^2\cdot 2{,}03^3$

27. $\ln\left(\dfrac{2{,}99^2}{1{,}03}-8\right)$ 28. $1{,}98^3\cdot 3{,}01^2\cdot 0{,}97^4$

29. $\dfrac{1{,}99^5-3{,}02^3}{5{,}01}$ 30. $\ln\dfrac{2{,}03^5-7}{4{,}98^2}$

№8. Вычислить производную функции z в точке M по направлению вектора $\vec{a}$.

1. $z=x^3y^2+3xy-7x^4-4y^3,\ M(-1;1),\ \vec{a}=(8;15)$
2. $z=2x^4y^5+2xy^2+x^5+y^4,\ M(-1;-1),\ \vec{a}=(3;-4)$
3. $z=5x^2y^4+3x^2y-8x+9y^7,\ M(-3;-1),\ \vec{a}=(8;-6)$
4. $z=x^4y+5x^3y^2+8x^2-2y^2,\ M(2;-1),\ \vec{a}=(12;9)$
5. $z=x^5y^6+8x^2y^3-5x^3-2y^4,\ M(1;-1),\ \vec{a}=(5;12)$
6. $z=2x^4y^3-8xy^2-x-6y^2,\ M(1;-1),\ \vec{a}=(8;15)$
7. $z=x^3y^4-3xy^2-2x^8+5y^2,\ M(1;-2),\ \vec{a}=(3;4)$
8. $z=x^4y-5xy^2-2x^3-3y^3,\ M(-2;-2),\ \vec{a}=(8;6)$
9. $z=2xy^2+4x^2y-3x^3-7y,\ M(-1;3),\ \vec{a}=(-9;-12)$
10. $z=xy^2+x^3y+7x+4y,\ M(3;-3),\ \vec{a}=(5;-12)$
11. $z=2x^3y^2-5xy-x^3-2y^4,\ M(2;-1),\ \vec{a}=(15;8)$
12. $z=4xy^2+x^4y^3-4x+2y^3,\ M(-1;2),\ \vec{a}=(4;3)$
13. $z=2x^2y^3+4xy+2x^2-7y^3,\ M(2;2),\ \vec{a}=(6;-8)$
14. $z=4x^2y^3-6x^4y+7x^2+3y,\ M(-1;2),\ \vec{a}=(12;9)$
15. $z=7x^2y-3x^4y^2-3x^2-2y^2,\ M(-1;2),\ \vec{a}=(12;5)$
16. $z=4x^2y^2+x^4y^2+x^3+3y,\ M(1;-2),\ \vec{a}=(8;15)$
17. $z=x^2y^4+3xy^3+x^3-2y^2,\ M(3;-1),\ \vec{a}=(-3;4)$
18. $z=x^2y-2x^5y^6-2x^4+7y,\ M(1;-1),\ \vec{a}=(-6;-8)$
19. $z=x^4y^2+2x^5y-7x^3-11y,\ M(1;-3),\ \vec{a}=(-9;12)$
20. $z=2x^4y^3-6x^2y+4x^3+2y^2,\ M(1;2),\ \vec{a}=(-5;12)$
21. $z=x^5y^3-2xy^2-7x^2+4y^4,\ M(-1;1),\ \vec{a}=(-15;8)$
22. $z=3x^2y^2+x^3y-5x^4-7y^2,\ M(1;-3),\ \vec{a}=(-4;3)$
23. $z=5xy-x^2y^3+2x^2-7y,\ M(3;-2),\ \vec{a}=(-8;-6)$
24. $z=6x^2y^3-7x^3y^2+x^3+4y^7,\ M(-1;1),\ \vec{a}=(12;9)$

25. $z = 2x^2y^4 - 3xy^5 + 5x^2 + 5y^5,\ M(3;1),\ \vec{a} = (-12;-5)$

26. $z = 2x^3y^4 + 2x^2y + 2x - 2y^2,\ M(2;1),\ \vec{a} = (15;-8)$

27. $z = x^5y^3 + 4x^2y - 4x^3 + 6y^2,\ M(1;-1),\ \vec{a} = (-3;4)$

28. $z = x^3y^5 - 2xy^2 + 3x^5 - y,\ M(-1;-1),\ \vec{a} = (-6;8)$

29. $z = 3x^5y^2 + 2x^3y^4 - 6x + 4y^2,\ M(-1;-2),\ \vec{a} = (9;12)$

30. $z = 6x^4y^4 - 3xy^3 + 3x^4 + 2y^3,\ M(-1;1),\ \vec{a} = (5;12)$

№9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности *S*, заданной уравнением, в точке *M*.

1. $xz^2\,\mathrm{arctg}\,y - 4x^2z = 8,\ M(1;0;-2)$
2. $z = -2e^{y\sin x} - 3xy,\ M(0;5;-2)$
3. $z = \cos(xy) - y\ln^2 x,\ M(1;\pi/2;0)$
4. $x^{yz} = xy\,e^z - 3,\ M(1;4;0)$
5. $y^2\ln(xz) + z\sin(xy) = 0,\ M(-1;0;-1)$
6. $z = y^2\sin x - 3y^x,\ M(0;1;-3)$
7. $z = x\,\mathrm{tg}\,y + x^3\cos y,\ M(-2;0;-8)$
8. $x^y + y\,e^{xz} = 4,\ M(1;3;0)$
9. $x\,\mathrm{arctg}\,y - z\,e^{x^2y} = 2,\ M(3;0;-2)$
10. $z = y\,\mathrm{arctg}\,x + y^{3x},\ M(0;1;1)$
11. $z = x\,\mathrm{arctg}\,y + y\ln x^2,\ M(1;0;0)$
12. $x^3\ln z + 4 = 3z^{xy},\ M(-1;0;e)$
13. $yz^2\sin x + x\ln(yz) = 1,\ M(\pi/2;1;1)$
14. $z = 2e^{xy} - y\cos^2 x,\ M(0;-3;5)$
15. $z = x\cos^3 y - e^{4xy},\ M(-2;0;-3)$
16. $x\,\mathrm{tg}\,z = y^2\ln x,\ M(1;-2;0)$
17. $x\cos(yz) + y^2z\ln x = -1,\ M(1;1;\pi)$
18. $z = \mathrm{arctg}(xy) - x^y,\ M(3;0;-1)$
19. $z = \mathrm{tg}(x^2y) + y\ln x,\ M(1;0;0)$
20. $yz\,e^x - z^2\ln y = 3,\ M(0;1;3)$
21. $xy\sin^3 z - x^2y\,e^z + 3 = 0,\ M(-1;3;0)$
22. $z = y\ln^4 x - 3x^2e^y,\ M(1;0;-3)$
23. $z = \ln(xy) - x\sin^2 y,\ M(1/\pi;\pi;0)$
24. $yz\,e^{\sin x} + zy^3 + 4 = 0,\ M(0;-1;2)$
25. $z\,e^{xy} - yz\cos x = 4,\ M(0;3;-2)$
26. $z = y^3\ln x^2 - 4x\,e^y,\ M(-1;0;4)$
27. $z = 7 - \sin(xy) - y^2e^{2x},\ M(0;2;3)$
28. $xz^y + xy\ln z = 2,\ M(2;0;e)$
29. $xz\,\mathrm{tg}\,y + x^2z = 2,\ M(-2;\pi/4;1)$
30. $z = 7^{x^2+3y} + x^3y^2 - 9,\ M(1;0;-2)$

№10. Исследовать функцию *z* на локальный экстремум.

1. $z = 2x^3 + 42xy + 21y^2 - 24x - 84y + 60$
2. $z = 2x^3 + 6xy - 3y^2 + 18x - 30y - 93$
3. $z = 2x^3 + 6xy - 3y^2 - 12x - 24y - 126$
4. $z = 2x^3 - 30xy + 15y^2 + 6x + 30y - 8$
5. $z = 2x^3 + 18xy - 9y^2 - 60x + 36y - 143$
6. $z = 4x^3 + 12xy - 3y^2 - 36x - 30y - 389$

7. $z = x^3 + 6xy - y^2 - 30x + 18y - 58$
8. $z = 2y^3 - 12xy + 3x^2 - 18y + 18x + 35$
9. $z = 8y^3 - 24xy - 168y + 3x^2 + 60x + 309$
10. $z = 2x^3 - 30xy + 15y^2 - 24x + 60y + 43$
11. $z = 8x^3 + 24xy - 3y^2 - 120x + 48y - 181$
12. $z = 2x^3 + 12xy - 3y^2 - 18x + 18y - 15$
13. $z = 4x^3 + 36xy - 9y^2 - 84x + 90y - 148$
14. $z = x^3 + 18xy - 9y^2 - 12x + 36y - 6$
15. $z = 2y^3 - 18xy - 6y + 9x^2 + 18x + 20$
16. $z = 2y^3 - 6xy - 18y + x^2 + 10x + 37$
17. $z = 4y^3 + 36xy - 120y - 9x^2 + 90x - 308$
18. $z = x^3 + 6xy - y^2 - 6x + 10y + 9$
19. $z = 4x^3 + 12xy - 3y^2 - 108x + 6y - 304$
20. $z = 2x^3 + 18xy - 9y^2 - 96x + 72y - 236$
21. $z = 2y^3 - 6xy - 6y + 3x^2 - 30x + 177$
22. $z = 4y^3 + 36xy - 9x^2 + 24y + 36x + 66$
23. $z = 2y^3 + 30xy - 15x^2 - 6y + 30x - 8$
24. $z = 10y^3 + 30xy - 3x^2 + 72x - 240y - 488$
25. $z = 2y^3 - 6xy + 3x^2 - 24y - 12x + 118$
26. $z = 2y^3 - 12xy + 3x^2 + 24x - 30y + 74$
27. $z = 2y^3 - 30xy - 36y - 15x^2 - 60x - 49$
28. $z = 2y^3 - 6xy + 3x^2 - 12y - 24x + 157$
29. $z = y^3 + 6xy - x^2 + 30y - 2x + 44$
30. $z = 2y^3 - 6xy + 3x^2 - 54y + 18x + 138$

IV. Решение практических заданий по теме «Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии»

№1. Найти матрицу $B \cdot \left(B^T - 3A\right)$, если $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix}$.

Решение.

Выполним следующие действия:

1) $B^T = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$;

2) $3A = 3 \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 0 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 \cdot 2 & 3 \cdot (-1) \\ 3 \cdot 1 & 3 \cdot 0 \\ 3 \cdot 3 & 3 \cdot 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 0 \\ 9 & 6 \end{bmatrix}$;

3) $B^T - 3A = \begin{bmatrix} 7 & -1 \\ 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} - \begin{bmatrix} 6 & -3 \\ 3 & 0 \\ 9 & 6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 7-6 & -1-(-3) \\ 4-3 & -3-0 \\ 1-9 & 0-6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -8 & -6 \end{bmatrix}$;

4) $B \cdot \left(B^T - 3A\right) = \begin{bmatrix} 7 & 4 & 1 \\ -1 & -3 & 0 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \\ -8 & -6 \end{bmatrix} =$

$= \begin{bmatrix} 7 \cdot 1 + 4 \cdot 1 + 1 \cdot (-8) & 7 \cdot 2 + 4 \cdot (-3) + 1 \cdot (-6) \\ (-1) \cdot 1 + (-3) \cdot 1 + 0 \cdot (-8) & (-1) \cdot 2 + (-3) \cdot (-3) + 0 \cdot (-6) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$.

Ответ: $\begin{bmatrix} 3 & -4 \\ -4 & 7 \end{bmatrix}$.

№2. Вычислить определитель $\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix}$.

Решение.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & 1 & 2 \\ 4 & 3 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 3 & -2 \end{vmatrix} \overset{1)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & 5 \\ 3 & 2 & -5 & 6 \\ 4 & 3 & -5 & 9 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \end{vmatrix} \overset{2)}{=} a_{41} \cdot A_{41} + a_{42} \cdot A_{42} + a_{43} \cdot A_{43} + a_{44} \cdot A_{44} = a_{42} \cdot A_{42} \overset{3)}{=}$$

$$= 1 \cdot (-1)^{4+2} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & -5 & 6 \\ 4 & -5 & 9 \end{vmatrix} \overset{4)}{=} \begin{vmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 0 & -11 & -9 \\ 0 & -13 & -11 \end{vmatrix} \overset{5)}{=} a_{11} \cdot A_{11} + a_{21} \cdot A_{21} + a_{31} \cdot A_{31} = a_{11} \cdot A_{11} \overset{6)}{=}$$

$$= (-11) \cdot (-11) - (-9) \cdot (-13) = 121 - 117 = 4.$$

1) С помощью элементов 2-го столбца получим нули в 4-й строке. Для этого к каждому элементу 3-го столбца прибавим соответствующий элемент 2-го столбца, умноженный на (-3). Затем к каждому элементу 4-го столбца прибавим соответствующий элемент 2-го столбца, умноженный на 2.

2) Разложим полученный определитель по элементам 4-й строки.

3) a_{42} – элемент на пересечении 4-й строки и 2-го столбца, а A_{42} – его алгебраическое дополнение.

4) С помощью элементов 1-й строки получим нули в 1-м столбце. Для этого к каждому элементу 2-й строки прибавим соответствующий элемент 1-й строки, умноженный на (-3); к каждому элементу 3-й строки прибавим соответствующий элемент 1-й строки, умноженный на (-4).

5) Разложим полученный определитель по элементам 1-го столбца.

6) a_{11} – элемент на пересечении 1-й стоки и 1-го столбца, а A_{11} – его алгебраическое дополнение.

7) Полученный определитель 2-го порядка вычисляем следующим образом: из произведения элементов, стоящих на главной диагонали, вычитаем произведение элементов, стоящих на побочной диагонали.

Ответ: 4.

№3. Решить матричное уравнение $\begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix} \cdot X = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 7 & 3 & -5 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$.

Решение.

Запишем уравнение в виде $A \cdot X = B$, где

$A = \begin{bmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 7 & 3 & -5 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix}$, а X – неизвестная квадратная матрица 3-го порядка. Умножив обе части равенства $A \cdot X = B$ слева на матрицу A^{-1}, получим $X = A^{-1} \cdot B$.

Вычислим определитель матрицы A:

$$\det A = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 4 & 2 & -5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & -2 \\ 0 & 3 & 1 \\ 0 & 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{1+1} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} = 2 \cdot \left(3 \cdot (-1) - 0 \cdot 1\right) = -6.$$

Поскольку $\det A \neq 0$, то матрица, обратная к матрице A – существует.

Найдем алгебраические дополнения элементов матрицы A:

$A_{11} = (-1)^{1+1} \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -15 - 2 = -17$; $A_{12} = (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -(0 - 4) = 4$;

$A_{13} = (-1)^{1+3} \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 0 - 12 = -12$; $A_{21} = (-1)^{2+1} \begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 2 & -5 \end{vmatrix} = -\left(-5 - (-4)\right) = 1$;

$A_{22} = (-1)^{2+2} \begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 4 & -5 \end{vmatrix} = -10 - (-8) = -2$; $A_{23} = (-1)^{2+3} \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = -(4 - 4) = 0$;

$A_{31} = (-1)^{3+1}\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 1 \end{vmatrix} = 1-(-6) = 7$; $A_{32} = (-1)^{3+2}\begin{vmatrix} 2 & -2 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = -(2-0) = -2$;

$A_{33} = (-1)^{3+3}\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = 6-0 = 6$.

Таким образом, $A^{-1} = \dfrac{1}{\det A}\cdot\begin{bmatrix} A_{11} & A_{21} & A_{31} \\ A_{12} & A_{22} & A_{32} \\ A_{13} & A_{23} & A_{33} \end{bmatrix} = \dfrac{1}{-6}\cdot\begin{bmatrix} -17 & 1 & 7 \\ 4 & -2 & -2 \\ -12 & 0 & 6 \end{bmatrix}$.

Подставляя A^{-1} и B в равенство $X = A^{-1}\cdot B$, получим:

$$X = \frac{1}{-6}\cdot\begin{bmatrix} -17 & 1 & 7 \\ 4 & -2 & -2 \\ -12 & 0 & 6 \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} 4 & 2 & -2 \\ 7 & 3 & -5 \\ 7 & 1 & -5 \end{bmatrix} = -\frac{1}{6}\cdot\begin{bmatrix} -12 & -24 & -6 \\ -12 & 0 & 12 \\ -6 & -18 & -6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Ответ: $\begin{bmatrix} 2 & 4 & 1 \\ 2 & 0 & -2 \\ 1 & 3 & 1 \end{bmatrix}$.

№4. Решить систему линейных уравнений $\begin{cases} 3x+2y-5z=-5, \\ 4x+3y-5z=-6, \\ x-2y-4z=4. \end{cases}$

Решение.

Рассмотрим основные методы решения систем линейных уравнений:

а) формулы Крамера:

В случае, если главный определитель Δ системы отличен от нуля, то система имеет единственное решение, которое можно найти по формулам Крамера:

$$x = \frac{\Delta_1}{\Delta};\ y = \frac{\Delta_2}{\Delta};\ z = \frac{\Delta_3}{\Delta},$$

где Δ_1, Δ_2, Δ_3 – определители, полученные из Δ заменой 1-го, 2-го, 3-го столбцов столбцом свободных членов соответственно.

Находим главный определитель системы:

$$\Delta = \begin{vmatrix} 3 & 2 & -5 \\ 4 & 3 & -5 \\ 1 & -2 & -4 \end{vmatrix} = (-36-10+40)-(-15+30-32) = -6-(-17) = 11 \neq 0.$$

Находим вспомогательные определители:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} -5 & 2 & -5 \\ -6 & 3 & -5 \\ 4 & -2 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -1 & 2 & -9 \\ 0 & 3 & -11 \\ 0 & -2 & 0 \end{vmatrix} = -1\cdot(-1)^{1+1}\begin{vmatrix} 3 & -11 \\ -2 & 0 \end{vmatrix} = 22;$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}3&-5&-5\\4&-6&-5\\1&4&-4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&-17&7\\4&-22&11\\1&0&0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}-17&7\\-22&11\end{vmatrix}=-33;$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}3&2&-5\\4&3&-6\\1&-2&4\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}3&8&-17\\4&11&-22\\1&0&0\end{vmatrix}=1\cdot(-1)^{3+1}\begin{vmatrix}8&-17\\11&-22\end{vmatrix}=11.$$

По формулам Крамера получаем: $x=\dfrac{22}{11}=2$; $y=\dfrac{-33}{11}=-3$; $z=\dfrac{11}{11}=1$.

б) метод Гаусса:

Расширенная матрица системы имеет вид: $\left[\begin{array}{ccc|c}3&2&-5&-5\\4&3&-5&-6\\1&-2&-4&4\end{array}\right]$. Поменяем 1-ю и 3-ю строки матрицы местами и приведем полученную матрицу к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&-4&4\\4&3&-5&-6\\3&2&-5&-5\end{array}\right]\overset{1)}{\vdots}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&-4&4\\0&11&11&-22\\0&8&7&-17\end{array}\right]\overset{2)}{\vdots}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&-4&4\\0&1&1&-2\\0&8&7&-17\end{array}\right]\overset{3)}{\vdots}\left[\begin{array}{ccc|c}1&-2&-4&4\\0&1&1&-2\\0&0&-1&-1\end{array}\right].$$

1) К элементам 2-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на (-4). Затем к элементам 3-й строки прибавим соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на (-3).
2) Разделим элементы 2-й строки на 11.
3) К элементам 3-й строки прибавим соответствующие элементы 2-й строки, умноженные на (-8).
Последней расширенной матрице соответствует система, равносильная исходной: $\begin{cases}x-2y-4z=4,\\y+z=-2,\\-z=-1.\end{cases}$

Из последнего уравнения системы получаем: $z=\dfrac{-1}{-1}=1$.

Подставив значение z во 2-е уравнение, получим: $y=\dfrac{-2-1}{1}=-3$.

Из 1-го уравнения системы находим: $x=4+4\cdot1+2\cdot(-3)=2$.

Ответ: $(2;-3;1)$.

№5. Решить систему линейных однородных уравнений

$$\begin{cases} x + y + z = 0, \\ -5x - 2y + 4z = 0, \\ 2x - y - 7z = 0. \end{cases}$$

Решение.

Решим данную систему методом Гаусса.

Приведем расширенную матрицу системы к ступенчатому виду:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ -5 & -2 & 4 & 0 \\ 2 & -1 & -7 & 0 \end{array}\right] \overset{1)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & -3 & -9 & 0 \end{array}\right] \overset{2)}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 3 & 9 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right].$$

1) Прибавим к элементам 2-й строки соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на 5, а к элементам 3-й строки – соответствующие элементы 1-й строки, умноженные на (-2).

2) Прибавим к элементам 3-й строки соответствующие элементы 2-й строки, умноженные на 1.

Получим систему уравнений $\begin{cases} x + y + z = 0, \\ 3y + 9z = 0, \\ 0 = 0 \end{cases}$ равносильную исходной.

Пусть переменные x и y – базисные, а $z = t \ (t \in \mathbb{R})$ – свободная. Из 2-го уравнения системы получим: $y = \dfrac{-9t}{3} = -3t$. Подставив это значение в 1-е уравнение, получим $x = -t + 3t = 2t$.

Ответ: $\{(2t, -3t, t),\ t \in \mathbb{R}\}$.

№6. Вычислить $(2\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b})$, если

а) $\vec{a} = (2; -2; 5)$, $\vec{b} = (-1; 1; 2)$;

б) $|\vec{a}| = 4$, $|\vec{b}| = 1$, $(\widehat{\vec{a}, \vec{b}}) = \pi/3$.

Решение.

а) Выполним следующие действия:

$2\vec{a} - 4\vec{b} = 2 \cdot (2; -2; 5) - 4 \cdot (-1; 1; 2) = (4; -4; 10) - (-4; 4; 8) = (8; -8; 2)$;

$\vec{a} + 3\vec{b} = (2; -2; 5) + 3 \cdot (-1; 1; 2) = (2; -2; 5) + (-3; 3; 6) = (-1; 1; 11)$;

$(2\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = (8; -8; 2) \cdot (-1; 1; 11) = 8 \cdot (-1) + (-8) \cdot 1 + 2 \cdot 11 = 6$.

б) Упростим выражение:

$(2\vec{a} - 4\vec{b}) \cdot (\vec{a} + 3\vec{b}) = 2\vec{a} \cdot \vec{a} + 2\vec{a} \cdot 3\vec{b} - 4\vec{b} \cdot \vec{a} - 4\vec{b} \cdot 3\vec{b} = 2\vec{a}^2 + 2\vec{a}\vec{b} - 12\vec{b}^2$.

Далее последовательно находим:

$\vec{a}^2 = |\vec{a}|^2 = 16$; $\vec{b}^2 = |\vec{b}|^2 = 1$;

$\vec a\vec b = |\vec a|\cdot|\vec b|\cos(\widehat{\vec a,\vec b}) = 4\cdot 1\cdot\cos\left(\pi/3\right) = 2$;

$2\vec a^2 + 2\vec a\vec b - 12\vec b^2 = 2\cdot 16 + 2\cdot 2 - 12\cdot 1 = 32 + 4 - 12 = 24$.

Ответ: а) 6; б) 24.

№7. Найти длину вектора $\left(2\vec a+\vec b\right)\times\left(-3\vec a-2\vec b\right)$, если:

а) $\vec a=(2;-1;4)$, $\vec b=(-5;3;-5)$;

б) $|\vec a|=2$, $|\vec b|=3$, $(\widehat{\vec a,\vec b})=\pi/6$.

Решение.

а) Выполним следующие действия:

$2\vec a+\vec b = 2\cdot(2;-1;4)+(-5;3;-5)=(4;-2;8)+(-5;3;-5)=(-1;1;3)$;

$-3\vec a-2\vec b = -3\cdot(2;-1;4)-2\cdot(-5;3;-5)=(-6;3;-12)+(10;-6;10)=(4;-3;-2)$;

$$\left(2\vec a+\vec b\right)\times\left(-3\vec a-2\vec b\right)=\begin{vmatrix}\vec i & \vec j & \vec k\\ -1 & 1 & 3\\ 4 & -3 & -2\end{vmatrix}=\vec i\begin{vmatrix}1 & 3\\ -3 & -2\end{vmatrix}-\vec j\begin{vmatrix}-1 & 3\\ 4 & -2\end{vmatrix}+\vec k\begin{vmatrix}-1 & 1\\ 4 & -3\end{vmatrix}=\left(7;10;-1\right).$$

Найдем длину вектора: $\left|\left(2\vec a+\vec b\right)\times\left(-3\vec a-2\vec b\right)\right|=\sqrt{7^2+10^2+\left(-1\right)^2}=\sqrt{150}$.

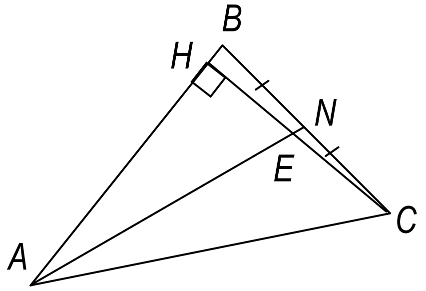
б) Упростим выражение:

$$\left|\left(2\vec a+\vec b\right)\times\left(-3\vec a-2\vec b\right)\right|=\left|-6\vec a\times\vec a-4\vec a\times\vec b+-3\vec b\times\vec a-2\vec b\times\vec b\right|=\left|-4\vec a\times\vec b-3\vec b\times\vec a\right|=$$

$$=\left|-4\vec a\times\vec b+3\vec a\times\vec b\right|=\left|-\vec a\times\vec b\right|=\left|\vec a\times\vec b\right|=|\vec a|\cdot|\vec b|\cdot\sin(\widehat{\vec a,\vec b})=2\cdot3\cdot\frac{1}{2}=3.$$

Ответ: а) $\sqrt{150}$; б) 3.

№8. В треугольнике ABC найти точку пересечения медианы AN и высоты CH, если $A(2;1)$, $B(7;-6)$, $C(-5;-4)$.



Решение.

Координаты середины N отрезка BC равны полусуммам координат концов отрезка:

$x_N=\dfrac{7+\left(-5\right)}{2}=1$, $y_N=\dfrac{-6+\left(-4\right)}{2}=-5$.

Составим уравнение медианы AN по формуле $\dfrac{x-x_A}{x_N-x_A}=\dfrac{y-y_A}{y_N-y_A}$, где $\left(x_A;y_A\right)$ и $\left(x_N;y_N\right)$ – координаты точек A и N соответственно:

$$\frac{x-2}{1-2}=\frac{y-1}{-5-1}\ \Leftrightarrow\ \frac{x-2}{-1}=\frac{y-1}{-6}\ \Leftrightarrow\ 6x-y-11=0.$$

Составим аналогичным образом уравнение стороны AB:

$$\frac{x-2}{7-2}=\frac{y-1}{-6-1}\ \Leftrightarrow\ \frac{x-2}{5}=\frac{y-1}{-7}\ \Leftrightarrow\ -7x-5y+19=0.$$

Представив последнее уравнение в виде $y=\frac{-7}{5}x-\frac{19}{5}$, получим угловой коэффициент прямой *AB*: $k_{AB}=-\frac{7}{5}$.

Так как $AB\perp CH$, то $k_{AB}\cdot k_{CH}=-1$, откуда $k_{CH}=\frac{5}{7}$.

Уравнение высоты *CH* найдем по формуле $y-y_C=k_{CH}\cdot\left(x-x_C\right)$:

$$y-\left(-4\right)=\frac{5}{7}\cdot\left(x-\left(-5\right)\right)\ \Leftrightarrow\ y+4=\frac{5}{7}\cdot\left(x+5\right)\ \Leftrightarrow\ 5x-7y-3=0.$$

Найдем точку пересечения медианы *AN* и высоты *CH*, для чего составим систему из уравнений этих линий:

$$\begin{cases}6x-y-11=0\\5x-7y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-42x+7y+77=0\\5x-7y-3=0\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}-37x+74=0\\y=6x-11\end{cases}\Leftrightarrow\begin{cases}x=2\\y=1\end{cases}$$

Таким образом, медиана *AN* и высота *CH* пересекаются в точке $E(2;1)$.

Ответ: $(2;1)$.

№9. Найти длину высоты пирамиды *ABCD*, опущенной из вершины *D*, если $A(3;4;-2)$, $B(2;3;-4)$, $C(6;5;-1)$, $D(-2;1;-4)$.

Решение.

Найдем уравнение плоскости *ABC* по формуле

$$\begin{vmatrix}x-x_A & y-y_A & z-z_A\\ x_B-x_A & y_B-y_A & z_B-z_A\\ x_C-x_A & y_C-y_A & z_C-z_A\end{vmatrix}=0,$$ где $\left(x_A;y_A;z_A\right)$, $\left(x_B;y_B;z_B\right)$, $\left(x_C;y_C;z_C\right)$ –

координаты точек *A*, *B* и *C* соответственно:

$$\begin{vmatrix}x-3 & y-4 & z+2\\ 2-3 & 3-4 & -4+2\\ 6-3 & 5-4 & -1+2\end{vmatrix}=0\ \Leftrightarrow\ \begin{vmatrix}x-3 & y-4 & z+2\\ -1 & -1 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=0.$$

Вычислим определитель в левой части равенства, разложив его по элементам 1-й строки:

$$\begin{vmatrix}x-3 & y-4 & z+2\\ -1 & -1 & -2\\ 3 & 1 & 1\end{vmatrix}=\left(x-3\right)\cdot\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 1 & 1\end{vmatrix}-\left(y-4\right)\cdot\begin{vmatrix}-1 & -2\\ 3 & 1\end{vmatrix}+\left(z+2\right)\cdot\begin{vmatrix}-1 & -1\\ 3 & 1\end{vmatrix}=$$

$$=\left(x-3\right)\cdot1-\left(y-4\right)\cdot5+\left(z+2\right)\cdot2=x-5y+2z+21.$$

Таким образом, уравнение плоскости *ABC* запишется в следующем виде: $x-5y+2z+21=0$.

Длина высоты пирамиды *ABCD*, опущенной из вершины *D*, равна расстоянию от точки D до плоскости ABC.

Поскольку расстояние от точки $(x_0; y_0; z_0)$ до плоскости с уравнением $Ax + By + Cz + D = 0$ находится по формуле $d = \dfrac{|Ax_0 + By_0 + Cz_0 + D|}{\sqrt{A^2 + B^2 + C^2}}$, то искомое расстояние $d = \dfrac{|-2 - 5 \cdot 1 + 2 \cdot (-4) + 21|}{\sqrt{1^2 + (-5)^2 + 2^2}} = \dfrac{|-2 - 5 - 8 + 21|}{\sqrt{1 + 25 + 4}} = \dfrac{6}{\sqrt{30}}$.

Ответ: $\dfrac{6}{\sqrt{30}}$.

№10. Установить взаимное расположение прямой l и плоскости β. В случае их пересечения найти координаты точки пересечения.

а) $l : \dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y-4}{6} = \dfrac{z+6}{4}$;

$\beta : 4x + 5y + z - 4 = 0$;

б) $l : \begin{cases} 5x + 5y + 4z - 5 = 0, \\ 2x + 3y + z + 4 = 0; \end{cases}$ $\beta : x - y + 2z - 7 = 0$;

в) $l : \begin{cases} x = 4t + 5, \\ y = -5t - 4, \\ z = 2t + 1; \end{cases}$ $\beta : \dfrac{x}{6} + \dfrac{y}{-3} + \dfrac{z}{-6/7} = 1$.

Решение.

а) Запишем уравнение прямой l в параметрическом виде, приравнивая каждую из дробей в выражении $\dfrac{x-3}{-3} = \dfrac{y-4}{6} = \dfrac{z+6}{4}$ к t и выражая x, y, z:

$\begin{cases} x = 3 - 3t, \\ y = 4 + 6t, \\ z = -6 + 4t. \end{cases}$ Выражения для x, y, z подставим в уравнение плоскости β:

$$4 \cdot (3 - 3t) + 5 \cdot (4 + 6t) + (-6 + 4t) - 4 = 0 \;\Leftrightarrow\; 22t + 22 = 0 \;\Leftrightarrow\; t = -1.$$

Так как уравнение имеет единственное решение, то прямая пересекает плоскость. Для нахождения координат точки пересечения подставим полученное значение t в параметрические уравнения прямой:

$$x = 3 - 3 \cdot (-1) = 6; \;\; y = 4 + 6 \cdot (-1) = -2; \;\; z = -6 + 4 \cdot (-1) = -10.$$

Таким образом, прямая l пересекает плоскость β в точке с координатами $(6; -2; -10)$.

б) Найдем сначала некоторую точку прямой, для чего достаточно найти какое-нибудь частное решение системы $\begin{cases} 5x + 5y + 4z - 5 = 0, \\ 2x + 3y + z + 4 = 0. \end{cases}$ При $x = 0$ имеем

$\begin{cases} 5y+4z-5=0 \\ 3y+z+4=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 5y+4z-5=0 \\ -12y-4z-16=0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} -7y-21=0 \\ 4z=5-5y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} y=-3 \\ z=5 \end{cases}$ Таким образом, мы получили точку $M(0;-3;5)\in 1$.

Направляющий вектор прямой 1 получим как векторное произведение нормальных векторов $\vec{n}_1=(5;5;4)$, $\vec{n}_2=(2;3;1)$ плоскостей, определяющих эту прямую: $\vec{a}=\vec{n}_1\times\vec{n}_2=\begin{vmatrix} \vec{i} & \vec{j} & \vec{k} \\ 5 & 5 & 4 \\ 2 & 3 & 1 \end{vmatrix}=\vec{i}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 3 & 1 \end{vmatrix}-\vec{j}\begin{vmatrix} 5 & 4 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}+\vec{k}\begin{vmatrix} 5 & 5 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}=-7\vec{i}+3\vec{j}+5\vec{k}$, или $\vec{a}=(-7;3;5)$. Получили уравнение прямой в параметрическом виде: $\begin{cases} x=0-7t, \\ y=-3+3t, \\ z=5+5t. \end{cases}$ Подставим выражения x, y, z в уравнение плоскости β:

$-7t-(-3+3t)+2\cdot(5+5t)-7=0 \Leftrightarrow 0\cdot t+6=0$. Так как данное равенство невозможно, то прямая не пересекает плоскость, то есть $1 \parallel \beta$.

в) Подставим выражения для x, y, z из параметрических уравнений прямой 1 в общее уравнение $x-2y-7z-6=0$ плоскости β:

$(4t+5)-2\cdot(-5t-4)-7\cdot(2t+1)-6=0 \Leftrightarrow 0\cdot t=0$.

Так как последнему равенству удовлетворяют все действительные числа, то все точки прямой принадлежат плоскости, то есть $1\subset\beta$.

Ответ: а) прямая пересекает плоскость в точке $(6;-2;-10)$;

б) прямая параллельна плоскости;

в) прямая лежит в плоскости.

V. Решение практических заданий по теме «Введение в математический анализ»

№1. Найти предел последовательности $x_n=\dfrac{4n^7-3n^5+2}{n^6-5n^9-n}$.

Решение.

При $n\to\infty$ числитель и знаменатель дроби стремятся к бесконечности, то есть имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{\infty}{\infty}\right]$.

$$\lim_{n\to\infty}\frac{4n^7-3n^5+2}{n^6-5n^9-n}=\lim_{n\to\infty}\frac{n^9\left(\frac{4}{n^2}-\frac{3}{n^4}+\frac{2}{n^9}\right)}{n^9\left(\frac{1}{n^3}-5-\frac{1}{n^8}\right)}=\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{4}{n^2}-\frac{3}{n^4}+\frac{2}{n^9}}{\frac{1}{n^3}-5-\frac{1}{n^8}}=\frac{0}{-5}=0,$$ так как

выражения $\frac{4}{n^2}, \frac{3}{n^4}, \frac{2}{n^9}, \frac{1}{n^3}, \frac{1}{n^8}$ стремятся к нулю при $n \to \infty$.

Ответ: 0.

№2. Найти $\lim\limits_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}$.

Решение.

При $x \to 5$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то есть имеем неопределенность вида $\left[\frac{0}{0}\right]$. Для раскрытия этой неопределенности умножим числитель и знаменатель дроби на выражение, сопряженное числителю:

$$\lim_{x\to 5}\frac{\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}}{2x^2-7x-15}=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{2x+1}-\sqrt{x+6}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+6}\right)}{\left(2x^2-7x-15\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{\left(\sqrt{2x+1}\right)^2-\left(\sqrt{x+6}\right)^2}{2\left(x-5\right)\left(x+\frac{3}{2}\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+6}\right)}=\lim_{x\to 5}\frac{x-5}{\left(x-5\right)\left(2x+3\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+6}\right)}=$$

$$=\lim_{x\to 5}\frac{1}{\left(2x+3\right)\left(\sqrt{2x+1}+\sqrt{x+6}\right)}=\frac{1}{13\left(\sqrt{11}+\sqrt{11}\right)}=\frac{\sqrt{11}}{286}.$$

Ответ: $\frac{\sqrt{11}}{286}$.

№3. Найти $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+7}{4x+3}\right)^{8x-2}$.

Решение.

При $x \to +\infty$ имеем неопределенность вида $\left[1^{\infty}\right]$, для раскрытия которой воспользуемся вторым замечательным пределом $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{x}=\mathrm{e}$:

$$\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{4x+7}{4x+3}\right)^{8x-2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\left(\frac{4x+7}{4x+3}-1\right)\right)^{8x-2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{4}{4x+3}\right)^{8x-2}=$$

$$=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{4x+3}{4}\right)}\right)^{8x-2}=\lim_{x\to+\infty}\left(1+\frac{1}{\left(\frac{4x+3}{4}\right)}\right)^{\frac{4x+3}{4}\cdot\frac{4}{4x+3}\cdot(8x-2)}=$$

$$=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{4}{4x+3}\cdot(8x-2)}=\mathrm{e}^{\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{32x-8}{4x+3}}=\mathrm{e}^{\frac{32}{4}}=\mathrm{e}^{8}.$$

Ответ: e^8.

№4. Найти следующие пределы, используя эквивалентные бесконечно малые функции: а) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\cos^2 5x-\cos^2 3x}{x^2}$;

б) $\lim\limits_{x\to -4}\dfrac{\lg\left(1+\operatorname{tg}(x+4)\right)}{x^3+64}$.

Решение.

а) При $x\to 0$ имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Для раскрытия этой неопределенности используем эквивалентные бесконечно малые функции, предварительно преобразовав выражение в числителе дроби:

$$\lim_{x\to 0}\frac{\cos^2 5x-\cos^2 3x}{x^2}=\lim_{x\to 0}\frac{(\cos 5x-\cos 3x)\cdot(\cos 5x+\cos 3x)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin\dfrac{5x-3x}{2}\sin\dfrac{5x+3x}{2}\cdot(\cos 5x+\cos 3x)}{x^2}=$$

$$=\lim_{x\to 0}\frac{-2\sin x\sin 4x(\cos 5x+\cos 3x)}{x^2}=\begin{bmatrix}\sin x\underset{x\to 0}{\sim}x\\ \sin 4x\underset{x\to 0}{\sim}4x\end{bmatrix}=\lim_{x\to 0}\frac{-2\cdot x\cdot 4x\cdot 2}{x^2}=-16,$$

поскольку функции $\cos 5x$ и $\cos 3x$ стремятся к единице при $x\to 0$.

б) При $x\to -4$ также имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$.

$$\lim_{x\to -4}\frac{\lg\left(1+\operatorname{tg}(x+4)\right)}{x^3+64}=\left[\log_{10}\left(1+\operatorname{tg}(x+4)\right)\underset{x\to -4}{\sim}\frac{\operatorname{tg}(x+4)}{\ln 10}\right]=\lim_{x\to -4}\frac{\left(\dfrac{\operatorname{tg}(x+4)}{\ln 10}\right)}{x^3+64}=$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{\operatorname{tg}(x+4)}{(x+4)\left(x^2-4x+16\right)\cdot\ln 10}=\left[\operatorname{tg}(x+4)\underset{x\to -4}{\sim}x+4\right]=$$

$$=\lim_{x\to -4}\frac{x+4}{(x+4)\left(x^2-4x+16\right)\cdot\ln 10}=\lim_{x\to -4}\frac{1}{\left(x^2-4x+16\right)\cdot\ln 10}=\frac{1}{48\ln 10}.$$

Ответ: а) –16; б) $\dfrac{1}{48\ln 10}$.

№5. Исследовать функцию $f(x)=\begin{cases}2x+5, & x\le -2\\ x^2-7, & -2<x\le 3\\ 2, & x>3\end{cases}$ на непрерывность и построить ее график.

***Решение*.**

Функция $f(x)$ определена и непрерывна на интервалах $(-\infty;-2)$, $(-2;3)$, $(3;+\infty)$, где она задана непрерывными элементарными функциями (линейными и квадратичной). Следовательно, разрыв возможен только в точках $x_1=-2$ и $x_2=3$.

Исследуем функцию $f(x)$ на непрерывность в точке $x_1=-2$:

$f(-2-0)=\lim\limits_{x\to-2-0} f(x)=\lim\limits_{x\to-2-0}(2x+5)=1,$

$f(-2+0)=\lim\limits_{x\to-2+0} f(x)=\lim\limits_{x\to-2+0}(x^2-7)=-3,$

$f(-2)=(2x+5)\big|_{x=-2}=1.$

Так как односторонние пределы $\lim\limits_{x\to-2-0} f(x)$, $\lim\limits_{x\to-2+0} f(x)$ не равны, но оба существуют и конечны, то функция $f(x)$ в точке $x_1=-2$ имеет разрыв 1-го рода со скачком $h=\left|1-(-3)\right|=1+3=4$.

Исследуем функцию $f(x)$ на непрерывность в точке $x_2=3$:

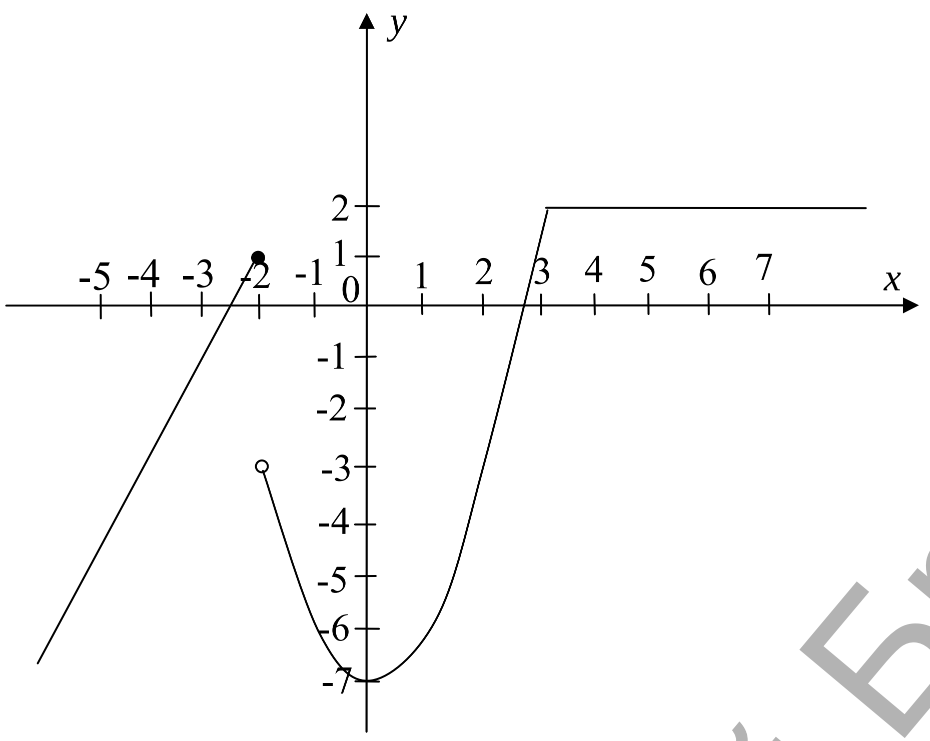
$f(3-0)=\lim\limits_{x\to3-0} f(x)=\lim\limits_{x\to3-0}(x^2-7)=2,$

$f(3+0)=\lim\limits_{x\to3+0} f(x)=\lim\limits_{x\to3+0} 2=2,$

$f(3)=2\big|_{x=3}=2.$

Так как $f(3-0)=f(3+0)=f(3)$, то функция $f(x)$ в точке $x_2=3$ является непрерывной.

Построим график функции $f(x)$:



Ответ: Функция непрерывна на промежутках $(-\infty;-2]$, $(-2;+\infty)$ и в точке (-2) терпит разрыв 1-го рода со скачком, равным 4.

VI. Практические задания по теме «Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных»

№1. Найти производную функции $y=\dfrac{6}{\sqrt[5]{x^3}}-7x^6+\dfrac{3}{5x^4}-8$.

Решение.

$$y'=\left(6x^{-\frac{3}{5}}-7x^6+\frac{3}{5}x^{-4}-8\right)'=6\cdot\left(x^{-\frac{3}{5}}\right)'-7\cdot\left(x^6\right)'+\frac{3}{5}\cdot\left(x^{-4}\right)'-(8)'=$$

$$=6\cdot\left(-\frac{3}{5}\right)\cdot x^{-\frac{3}{5}-1}-7\cdot6\cdot x^{6-1}+\frac{3}{5}\cdot(-4)\cdot x^{-4-1}-0=-\frac{18}{5}x^{-\frac{8}{5}}-42x^5-\frac{12}{5}x^{-5}=$$

$$=-\frac{18}{5\sqrt[5]{x^8}}-42x^5-\frac{12}{5x^5}.$$

Ответ: $-\dfrac{18}{5\sqrt[5]{x^8}}-42x^5-\dfrac{12}{5x^5}$.

№2. Найти производную функции: а) $y=\arcsin^5\left(1-3x^2\right)\cdot\log_5\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)$;

б) $y=\dfrac{\cos^3\left(2^{3x-1}\right)}{e^{2x-5x^3+2}}$.

Решение.

$$\text{а) } y' = \left(\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^5 \cdot \log_5\left(\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}}\right)\right)' = \left(\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^5\right)' \cdot \log_5\left(\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}}\right) +$$

$$+\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^5 \cdot \left(\log_5\left(\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}}\right)\right)' = 5\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^4 \cdot \left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)' \cdot$$

$$\cdot \log_5\left(\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}}\right) + \left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^5 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln 5} \cdot \left(\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}}\right)' = 5\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^4 \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\sqrt{1-\left(1-3x^2\right)^2}} \cdot \left(1-3x^2\right)' \cdot \log_5\left(\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}}\right) + \left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^5 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln 5} \cdot \frac{1}{\cos^2 x^{\frac{1}{2}}} \cdot$$

$$\cdot \left(x^{\frac{1}{2}}\right)' = \frac{5\left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^4}{\sqrt{1-\left(1-3x^2\right)^2}} \cdot (-6x) \cdot \log_5\left(\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}}\right) + \left(\arcsin\left(1-3x^2\right)\right)^5 \cdot \frac{1}{\operatorname{tg} x^{\frac{1}{2}} \cdot \ln 5} \cdot$$

$$\cdot \frac{1}{\cos^2 x^{\frac{1}{2}}} \cdot \frac{1}{2} x^{-\frac{1}{2}} = -\frac{30 \cdot \arcsin^4\left(1-3x^2\right) \cdot \log_5\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{6-9x^2}} + \frac{\arcsin^5\left(1-3x^2\right)}{\ln 5 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin\left(2\sqrt{x}\right)}.$$

$$\text{б) } y' = \left(\frac{\cos^3\left(2^{3x-1}\right)}{e^{2x-5x^3+2}}\right)' = \frac{\left(\cos^3\left(2^{3x-1}\right)\right)' \cdot e^{2x-5x^3+2} - \cos^3\left(2^{3x-1}\right) \cdot \left(e^{2x-5x^3+2}\right)'}{\left(e^{2x-5x^3+2}\right)^2} =$$

$$= \frac{3\cos^2\left(2^{3x-1}\right) \cdot \left(\cos\left(2^{3x-1}\right)\right)' \cdot e^{2x-5x^3+2} - \cos^3\left(2^{3x-1}\right) \cdot e^{2x-5x^3+2} \cdot \left(2x-5x^3+2\right)'}{\left(e^{2x-5x^3+2}\right)^2} =$$

$$= \frac{3\cos^2\left(2^{3x-1}\right) \cdot \left(-\sin\left(2^{3x-1}\right)\right) \cdot \left(2^{3x-1}\right)' - \cos^3\left(2^{3x-1}\right) \cdot \left(2-15x^2\right)}{e^{2x-5x^3+2}} =$$

$$= \frac{3\cos^2\left(2^{3x-1}\right) \cdot \left(-\sin\left(2^{3x-1}\right)\right) \cdot 2^{3x-1} \cdot \ln 2 \cdot 3 - \cos^3\left(2^{3x-1}\right) \cdot \left(2-15x^2\right)}{e^{2x-5x^3+2}}.$$

Ответ: а) $y' = \dfrac{\arcsin^5\left(1-3x^2\right)}{\ln 5 \cdot \sqrt{x} \cdot \sin\left(2\sqrt{x}\right)} - \dfrac{30 \cdot \arcsin^4\left(1-3x^2\right) \cdot \log_5\left(\operatorname{tg}\sqrt{x}\right)}{\sqrt{6-9x^2}}$;

б) $y' = \dfrac{-9\ln 2 \cdot \cos^2\left(2^{3x-1}\right) \cdot \sin\left(2^{3x-1}\right) \cdot 2^{3x-1} - \cos^2\left(2^{3x-1}\right) \cdot \left(2-15x^2\right)}{e^{2x-5x^3+2}}$.

№3. Найти производные первого и второго порядков функции $y = y(x)$:

а) $y^2 - x = \operatorname{arctg} y$;

б) $\begin{cases} x = t^4, \\ y = 2t^8 - 3t^5. \end{cases}$

Решение.

а) Равенство $y^2 - x = \operatorname{arctg} y$ определяет функцию *y*, заданную неявно. Продифференцируем обе части этого равенства по *x*, считая *y* функцией от *x*: $\left(y(x)\right)^2 - x = \operatorname{arctg} y(x)$:

$$2y(x)\cdot y'(x) - 1 = \frac{1}{1+\left(y(x)\right)^2}\cdot y'(x) \;\Leftrightarrow\; y'(x)\cdot\left(2y(x) - \frac{1}{1+\left(y(x)\right)^2}\right) = 1 \;\Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow\; y'(x) = \frac{1}{2y(x) - \dfrac{1}{1+\left(y(x)\right)^2}} \;\Leftrightarrow\; y' = \frac{y^2+1}{2y^3+2y-1}. \;\textbf{(*)}$$

Продифференцируем обе части последнего равенства по *x*:

$$y''(x) = \left(\frac{\left(y(x)\right)^2+1}{2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1}\right)' =$$

$$= \frac{\left(\left(y(x)\right)^2+1\right)'\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right) - \left(\left(y(x)\right)^2+1\right)\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right)'}{\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right)^2} =$$

$$= \frac{2y(x)y'(x)\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right) - \left(\left(y(x)\right)^2+1\right)\left(6\left(y(x)\right)^2 y'(x)+2y'(x)\right)}{\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right)^2} =$$

$$= y'(x)\cdot\frac{2y(x)\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right) - \left(\left(y(x)\right)^2+1\right)\left(6\left(y(x)\right)^2+2\right)}{\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right)^2} =$$

$$= y'(x)\cdot\frac{-2\left(y(x)\right)^4 - 4\left(y(x)\right)^2 - 2y(x) - 2}{\left(2\left(y(x)\right)^3+2y(x)-1\right)^2} = -2y'\cdot\frac{y^4+2y^2+y+1}{\left(2y^3+2y-1\right)^2}.$$

Подставим в последнее выражение y' из равенства (*):

$$y'' = -2\cdot\frac{y^2+1}{2y^3+2y-1}\cdot\frac{y^4+2y^2+y+1}{\left(2y^3+2y-1\right)^2} = -\frac{2y^6+6y^4+2y^3+6y^2+2y+2}{\left(2y^3+2y-1\right)^3}.$$

б) Равенства $\begin{cases} x = t^4 \\ y = 2t^8 - 4t^5 \end{cases}$ определяют параметрически заданную функцию, для которой справедливы равенства $y'_x = \dfrac{y'_t}{x'_t}$, $y''_x = \dfrac{\left(y'_x\right)'_t}{x'_t}$. Имеем: $x'_t = \left(t^4\right)' = 4t^3$; $y' = \left(2t^8 - 4t^5\right)' = 16t^7 - 20t^4$.

Значит, $y'_x = \dfrac{16t^7 - 20t^4}{4t^3} = 4t^4 - 5t$.

Далее, $\left(y''_x\right)'_t = \left(4t^4 - 5t\right)' = 16t^3 - 5$, откуда $y''_x = \dfrac{16t^3 - 5}{4t^3} = 4 - \dfrac{5}{4t^3}$.

Ответ: а) $y' = \dfrac{y^2 + 1}{2y^3 + 2y - 1}$, $y'' = -\dfrac{2y^6 + 6y^4 + 2y^3 + 6y^2 + 2y + 2}{\left(2y^3 + 2y - 1\right)^3}$;

б) $y'_x = 4t^4 - 5t$; $y''_x = 4 - \dfrac{5}{4t^3}$.

№4. Найти $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{x\cos x - \sin x}{x^3}$ с помощью правила Лопиталя.

Решение.

При $x \to 0$ числитель и знаменатель дроби обращаются в нуль, то есть имеем неопределенность вида $\left[\dfrac{0}{0}\right]$. Следовательно, можно применить правило Лопиталя:

$$\lim_{x \to 0} \frac{x\cos x - \sin x}{x^3} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\left(x\cos x - \sin x\right)'}{\left(x^3\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{\cos x - x\sin x - \cos x}{3x^2} =$$

$$= \lim_{x \to 0} \frac{-x\sin x}{3x^2} = \lim_{x \to 0} \frac{-\sin x}{3x} = \left[\frac{0}{0}\right] = \lim_{x \to 0} \frac{\left(-\sin x\right)'}{\left(3x\right)'} = \lim_{x \to 0} \frac{-\cos x}{3} = \frac{-1}{3}.$$

Ответ: $-\dfrac{1}{3}$.

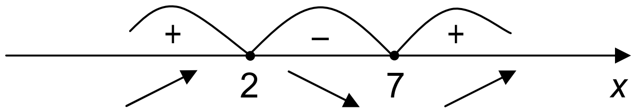
№5. Найти промежутки возрастания и убывания, точки максимума и минимума, максимум и минимум функции $y = 4x^3 - 54x^2 + 168x - 30$, промежутки вогнутости, выпуклости, точки перегиба ее графика.

Решение.

Функция $y = 4x^3 - 54x^2 + 168x + 30$ определена на всей числовой прямой. Найдем критические точки этой функции:

$y' = 0 \;\Leftrightarrow\; 12x^2 - 108x + 168 = 0 \;\Leftrightarrow\; x^2 - 9x + 14 = 0 \;\Leftrightarrow\; \left[\begin{array}{l} x = 2, \\ x = 7. \end{array}\right.$

Критические точки разбивают область определения функции y на промежутки $(-\infty;2)$, $(2;7)$, $(7;+\infty)$. Определим знак производной y' на каждом из этих промежутков:



Таким образом, функция y возрастает на промежутках $(-\infty;2]$ и $[7;+\infty)$ и убывает на промежутке $[2;7]$. При этом точка $x = 2$ является точкой локального максимума функции, а точка $x = 7$ – ее точкой локального минимума.

Находим локальный максимум и локальный минимум функции:

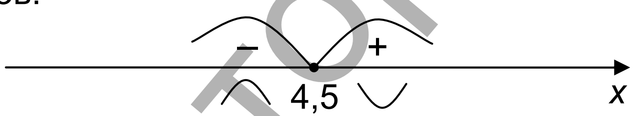
$y_{\max} = y(2) = 4 \cdot 2^3 - 54 \cdot 2^2 + 168 \cdot 2 - 30 = 32 - 216 + 336 - 30 = 122$,

$y_{\min} = y(7) = 4 \cdot 7^3 - 54 \cdot 7^2 + 168 \cdot 7 - 30 = 1372 - 2646 + 1176 - 30 = -128$.

Для определения промежутков выпуклости и вогнутости графика функции находим вторую производную и приравниваем ее к нулю:

$y'' = 0 \;\Leftrightarrow\; 24x - 108 = 0 \;\Leftrightarrow\; x = 4{,}5$.

Точка $x = 4{,}5$ разбивает область определения функции на промежутки $(-\infty;4{,}5)$ и $(4{,}5;+\infty)$. Определим знак второй производной y'' на каждом их этих промежутков:



Таким образом, график функции y является выпуклым на промежутке $(-\infty;4{,}5]$ и вогнутым на промежутке $[4{,}5;+\infty)$.

Так как $y(4{,}5) = 4 \cdot (4{,}5)^3 - 54 \cdot (4{,}5)^2 + 168 \cdot 4{,}5 - 30 = -3$, то точка $(4{,}5;-3)$ является точкой перегиба графика функции.

Ответ: $(-\infty;2]$ и $[7;+\infty)$ – промежутки возрастания,
$[2;7]$ – промежуток убывания;
$x_{\max} = 2$ – точка локального максимума,
$x_{\min} = 7$ – точка локального минимума;
$y_{\max} = 122$ – локальный максимум функции,
$y_{\min} = -128$ – локальный минимум функции;
$(-\infty;4{,}5]$ – промежуток выпуклости графика,
$[4{,}5;+\infty)$ – промежуток вогнутости графика;
$(4{,}5;-3)$ – точка перегиба графика.

№6. Найти частные производные второго порядка функции $z = 6x^3y^2 - 2x^2y + x^4 + 3y^5 - 7$.

Решение.
Сначала найдем частные производные первого порядка:

$$z'_x = \left(6x^3y^2 - 2x^2y + x^4 + 3y^5 - 7\right)'_x = 18x^2y^2 - 4xy + 4x^3,$$

$$z'_y = \left(6x^3y^2 - 2x^2y + x^4 + 3y^5 - 7\right)'_y = 12x^3y - 2x^2 + 15y^4.$$

Дифференцируя каждую из полученных производных по x и по y, найдем частные производные второго порядка:

$$z''_{xx} = \left(z'_x\right)'_x = \left(18x^2y^2 - 4xy + 4x^3\right)'_x = 36xy^2 - 4y + 12x^2,$$

$$z''_{yy} = \left(z'_y\right)'_y = \left(12x^3y - 2x^2 + 15y^4\right)'_y = 12x^3 + 60y^3,$$

$$z''_{xy} = \left(z'_x\right)'_y = \left(18x^2y^2 - 4xy + 4x^3\right)'_y = 36x^2y - 4x,$$

$$z''_{yx} = \left(z'_y\right)'_x = \left(12x^3y - 2x^2 + 15y^4\right)'_x = 36x^2y - 4x.$$

Ответ: $z''_{xx} = 36xy^2 - 4y + 12x^2$, $z''_{yy} = 12x^3 + 60y^3$, $z''_{xy} = z''_{yx} = 36x^2y - 4x$.

№7. С помощью полного дифференциала вычислить приближенно $\sqrt[3]{9{,}98^2 + 5{,}03^2}$ (результат записать с двумя знаками после запятой).

Решение.

Представим данную величину в виде $\sqrt[3]{(10 - 0{,}02)^2 + (5 + 0{,}03)^2}$ и введем функцию $f(x;y) = \sqrt[3]{x^2 + y^2}$, где $x = x_0 + \Delta x$; $x_0 = 10$; $\Delta x = -0{,}02$; $y = y_0 + \Delta y$; $y_0 = 5$; $\Delta y = 0{,}03$. Вычисляем:

$$f(x_0;y_0) = \sqrt[3]{10^2 + 5^2} = 5;$$

$$f'_x(x;y) = \left(\sqrt[3]{x^2 + y^2}\right)'_x = \frac{2x}{3\sqrt[3]{\left(x^2 + y^2\right)^2}};\ f'_x(x_0;y_0) = \frac{2\cdot 10}{3\sqrt[3]{\left(10^2 + 5^2\right)^2}} = \frac{4}{3};$$

$$f'_y(x;y) = \left(\sqrt[3]{x^2 + y^2}\right)'_y = \frac{2y}{3\sqrt[3]{\left(x^2 + y^2\right)^2}};\ f'_y(x_0;y_0) = \frac{2\cdot 5}{3\sqrt[3]{\left(10^2 + 5^2\right)^2}} = \frac{2}{3}.$$

Воспользуемся приближенным равенством
$f(x;y) \approx f(x_0;y_0) + f'_x(x_0;y_0)\cdot \Delta x + f'_y(x_0;y_0)\cdot \Delta y$.

Получаем: $\sqrt[3]{9{,}98^2 + 5{,}03^2} \approx 5 + \dfrac{4}{3}\cdot(-0{,}02) + \dfrac{2}{3}\cdot 0{,}03 = 5 - 0{,}027 + 0{,}02 \approx 4{,}99$.

Ответ: $4{,}99$.

№8. Вычислить производную функции $z = 3x^3y^2 - 2x^5y^4 - 3x^3 + 3y$ в точке $M(1;-1)$ по направлению вектора $\vec{a} = (4;3)$.

Решение.

Воспользуемся формулой $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_M = \operatorname{grad} z\big|_M \cdot \vec{a}^{\,0}$, где $\operatorname{grad} z\big|_M$ – градиент функции z в точке M, а $\vec{a}^{\,0}$ – орт вектора $\vec{a}$.

Находим частные производные функции z:

$z'_x = \left(3x^3y^2 - 2x^5y^4 - 3x^3 + 3y\right)'_x = 9x^2y^2 - 10x^4y^4 - 9x^2$;

$z'_y = \left(3x^3y^2 - 2x^5y^4 - 3x^3 + 3y\right)'_y = 6x^3y - 8x^5y^3 + 3$.

Находим значения этих производных в точке M:

$z'_x(M) = \left(9x^2y^2 - 10x^4y^4 - 9x^2\right)\Big|_M = 9\cdot 1^2\cdot(-1)^2 - 10\cdot 1^4\cdot(-1)^4 - 9\cdot 1^2 = -10$;

$z'_y(M) = \left(6x^3y - 8x^5y^3 + 3\right)\Big|_M = 6\cdot 1^3\cdot(-1) - 8\cdot 1^5\cdot(-1)^3 + 3 = 5$.

Тогда $\operatorname{grad} z\big|_M = \left(z'_x(M); z'_y(M)\right) = (-10;5)$.

Орт $\vec{a}^{\,0}$ вектора $\vec{a} = (a_1;a_2)$ находится по формуле $\vec{a}^{\,0} = \left(\dfrac{a_1}{|\vec{a}|};\dfrac{a_2}{|\vec{a}|}\right)$, где $|\vec{a}| = \sqrt{a_1^2 + a_2^2}$. В нашем случае $|\vec{a}| = \sqrt{4^2 + 3^2} = 5$, $\vec{a}^{\,0} = \left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right)$.

В итоге получаем: $\left.\dfrac{\partial z}{\partial \vec{a}}\right|_M = (-10;5)\cdot\left(\dfrac{4}{5};\dfrac{3}{5}\right) = (-10)\cdot\dfrac{4}{5} + 5\cdot\dfrac{3}{5} = -5$.

Ответ: -5.

№9. Составить уравнения касательной плоскости и нормали к поверхности S, заданной уравнением $z = \operatorname{tg}^2(xy) + x\ln y$, в точке $M\left(\dfrac{\pi}{4};1;1\right)$.

Решение.

Представим функцию в неявном виде: $F(x;y;z) = \operatorname{tg}^2(xy) + x\ln y - z$. Находим частные производные первого порядка данной функции: $F'_x = \dfrac{2y\operatorname{tg}(xy)}{\cos^2(xy)} + \ln y$;

$F'_y = \dfrac{2x\operatorname{tg}(xy)}{\cos^2(xy)} + \dfrac{x}{y}$; $F'_z = -1$.

Вычисляем значения этих частных производных в точке $M\left(\dfrac{\pi}{4};1;1\right)$:

$$F'_x(M) = \left(\frac{2y\,\mathrm{tg}(xy)}{\cos^2(xy)} + \ln y \right)\Bigg|_M = \frac{2 \cdot 1 \cdot \mathrm{tg}\left(1 \cdot \dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(1 \cdot \dfrac{\pi}{4}\right)} + \ln 1 = 4;$$

$$F'_y(M) = \left(\frac{2x\,\mathrm{tg}(xy)}{\cos^2(xy)} + \frac{x}{y} \right)\Bigg|_M = \frac{2 \cdot \dfrac{\pi}{4} \cdot \mathrm{tg}\left(1 \cdot \dfrac{\pi}{4}\right)}{\cos^2\left(1 \cdot \dfrac{\pi}{4}\right)} + \frac{\left(\dfrac{\pi}{4}\right)}{1} = \frac{5\pi}{4};$$

$F'_z(M) = -1$.

Формула для нахождения уравнения касательной плоскости к поверхности S в точке $M(x_M; y_M; z_M)$ имеет вид:

$$F'_x(M) \cdot (x - x_M) + F'_y(M) \cdot (y - y_M) + F'_y(M) \cdot (z - z_M) = 0.$$

В нашем случае получаем: $4 \cdot \left(x - \dfrac{\pi}{4}\right) + \dfrac{5\pi}{4} \cdot (y - 1) + (-1) \cdot (z - 1) = 0$, или $16x + 5\pi y - 4z - 9\pi + 4 = 0$ – искомое уравнение касательной плоскости. Уравнения нормали к поверхности S в точке $M(x_M; y_M; z_M)$ имеют вид

$$\frac{x - x_M}{F'_x(M)} = \frac{y - y_M}{F'_y(M)} = \frac{z - z_M}{F'_z(M)}.$$

В итоге получаем: $\dfrac{x - \dfrac{\pi}{4}}{4} = \dfrac{y - 1}{\left(\dfrac{5\pi}{4}\right)} = \dfrac{z - 1}{-1}$, или $\dfrac{4x - \pi}{16} = \dfrac{4y - 4}{5\pi} = \dfrac{z - 1}{-1}$ – искомые уравнения нормали.

Ответ: $16x + 5\pi y - 4z - 9\pi + 4 = 0$, $\dfrac{4x - \pi}{16} = \dfrac{4y - 4}{5\pi} = \dfrac{z - 1}{-1}$.

№10. Исследовать функцию $z = 2x^3 + 6xy - 3y^2 - 36x + 2$ на локальный экстремум.

Решение.

Находим частные производные первого и второго порядков функции z:

$$z'_x = \left(2x^3 + 6xy - 3y^2 - 36x + 2\right)'_x = 6x^2 + 6y - 36;$$

$$z'_y = \left(2x^3 + 6xy - 3y^2 - 36x + 2\right)'_y = 6x - 6y;$$

$$z''_{xx} = \left(6x^2 + 6y - 36\right)'_x = 12x;$$

$$z''_{yy} = \left(6x - 6y\right)'_y = -6;$$

$$z''_{xy} = \left(6x^2 + 6y - 36\right)'_y = 6.$$

Находим стационарные точки функции z, приравнивая частные производные первого порядка к нулю:

$$\begin{cases} z'_x = 0 \\ z'_y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 6x^2 + 6y - 36 = 0 \\ 6x - 6y = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + y - 6 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x^2 + x - 6 = 0 \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \left[\begin{array}{l} x = -3 \\ x = 2 \end{array} \right. \\ x = y \end{cases} \Leftrightarrow \left[\begin{array}{l} \begin{cases} x = -3 \\ y = -3 \end{cases} \\ \begin{cases} x = 2 \\ y = 2 \end{cases} \end{array} \right.$$

Получили две стационарные точки: $M_1(2;2)$ и $M_2(-3;-3)$.

Исследуем функцию z на экстремум в этих точках.

$M_1(2;2)$:

$A = z''_{xx}\left(M_1\right) = 12x\big|_{M_1} = 12 \cdot 2 = 24$;

$B = z''_{xy}\left(M_1\right) = 6\big|_{M_1} = 6$;

$C = z''_{yy}\left(M_1\right) = (-6)\big|_{M_1} = -6$;

$\mathrm{V} = AC - B^2 = 24 \cdot (-6) - 6^2 = -180$.

Т.к. $\mathrm{V} < 0$, то экстремума в точке M_1 функция z не имеет.

$M_2(-3;-3)$:

$A = z''_{xx}\left(M_2\right) = 12x\big|_{M_2} = 12 \cdot (-3) = -36$;

$B = z''_{xy}\left(M_2\right) = 6\big|_{M_2} = 6$;

$C = z''_{yy}\left(M_2\right) = (-6)\big|_{M_2} = -6$;

$\mathrm{V} = AC - B^2 = (-36) \cdot (-6) - 6^2 = 180$.

Т.к. $\mathrm{V} > 0$ и $A < 0$, то точка M_2 является точкой локального максимума.

Найдем локальный максимум как значение функции z в точке M_2:

$$z_{\max} = z\left(M_2\right) = 2(-3)^3 + 6 \cdot (-3) \cdot (-3) - 3 \cdot (-3)^2 - 36 \cdot (-3) + 2 = 83.$$

Ответ: $z_{\max}\left(-3;-3\right) = 83$.

Литература

1. Апатенок, Р.Ф. Сборник задач по линейной алгебре и аналитической геометрии: учебное пособие для инженерно-технических специальностей вузов / Р.Ф. Апатёнок, А.М. Маркина, В.Б. Хейнман. – Минск: Выш. шк., 2003. – 243 с.

2. Бугров, Я.С. Высшая математика: учеб. для вузов / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. − М.: Дрофа, 2004 в 3 т. Т. 1: Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии. – 288 с.

3. Бугров, Я.С. Высшая математика: учеб. для вузов: в 3 т. / Я.С. Бугров, С.М. Никольский. − М.: Дрофа, 2004. Т. 2: Дифференциальное и интегральное исчисление. – 512 с.

4. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие: в 4 ч. / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; под общ. ред. А.П. Рябушко. − Минск: Выш. шк., 2009. Ч. 1: Линейная и векторная алгебра. Аналитическая геометрия. Дифференциальное исчисление функций одной переменной. – 304 с.

5. Индивидуальные задания по высшей математике: учеб. пособие: в 4 ч. / А.П. Рябушко, В.В. Бархатов, В.В. Державец, И.Е. Юруть; под общ. ред. А.П. Рябушко. − Минск: Выш. шк., 2009. Ч. 2: Комплексные числа. Неопределённые и определённые интегралы. Функции нескольких переменных. Обыкновенные дифференциальные уравнения. – 396 с.

6. Выгодский, М.Я. Справочник по высшей математике / М.Я. Выгодский. − М.: Астрель: АСТ, 2005. − 991 с.

7. Гусак, А.А. Справочник по высшей математике / А.А. Гусак, Г.М. Гусак, Е.А. Бричикова. − Минск: ТетраСистемс, 2000. – 640 с.

8. Математика для инженеров: учебник: в 2 т. / С.А. Минюк, Н.С. Берёзкина, А.В. Метельский; под науч. ред. Н.А. Микулика. – Минск: Элайда, 2006. – Т. 1. – 560 с.

9. Лудерер, Б. Высшая математика в экономике, технике, информатике: справочник: пер. с нем. / Б. Лудерер, Ф. Наллау, К. Феттерс; под ред. А.В. Самусенко, В.В. Казаченок. − Минск: Выш. шк., 2005. – 279 с.

10. Письменный, Д.Т. Конспект лекций по высшей математике: Ч.1 / Д.Т. Письменный. − М.: АйрисПресс, 2004. – 288 с.

Содержание

Учебное издание

Составители:
Юхимук Михаил Михайлович
Юхимук Татьяна Юрьевна
Каримова Татьяна Ивановна
Коледа Мария Станиславовна

Элементы линейной алгебры и аналитической геометрии

Введение в математический анализ

Дифференциальное исчисление функций одной и нескольких переменных

Методические рекомендации и варианты заданий аттестационных работ по курсу «Математика» для студентов специальности «Промышленное и гражданское строительство» дневной формы обучения

Ответственный за выпуск: Юхимук М.М.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная вёрстка: Соколюк А.П.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 19.04.2018 г. Формат 60x84 $^1/_{16}$. Бумага «Performer». Гарнитура «Arial». Усл. печ. л. 3,02. Уч. изд. л. 3,25. Заказ № 551. Тираж 25 экз. Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.