САМОНАПРЯЖЕННЫЕ ПЛИТЫ НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

А. Н. Тарасевич, П. С. Пойта

БПИ, г. Брест

1. О выборе расчетной модели основания

Конструкции типа тонких плит лежащих на грунтовом основании, широко используются в качестве фундаментов, жестких покрытий дорог и аэродромов, полов зданий, днищ шлюзов и резервуаров и др. Расчет конструкций на упругом основании представляет собой сложную задачу. Перед специалистами возникает ряд проблем по выбору методов расчета и одна из основных - это выбор расчетной модели основания.

Первым предположением о зависимости между осадками грунта и приложенной нагрузкой была мысль о прямопропорциональной зависимости. В одном случае она принималась прямопропорциональной упругой осадке (Винклер), в другой остаточной осадке (Фусс). Недостатком этих зависимостей является то, что осадка возникает только там где приложена нагрузка, а практически осадки грунта возникают и за пределами приложения нагрузки такая модель дает равномерное распределение реактивных давлений по подошве фундамента, что также не соответствует действительной работе грунта. Несмотря на эти недостатки, расчеты по ней ведутся и в настоящее время. Хорошее совпадение теоретических расчетов с экспериментальными данными можно получить при слабых грунтах.

Недостатки этой модели поставили перед исследователями задачи поиска новых моделей, обладающих распределительной способностью. Одна из моделей была предложена Г.Э.Проктором и К.Викгардом - это модель упругого изотропного полупространства. Это позволило применить к грунтам теорию упругости. С применением этой модели появилась возможность рассчитывать осадки за пределами приложения нагрузки, а также учитывать влияние соседних нагрузок. Свойства этой модели характеризуются двумя параметрами - модулем деформации и коэффициентом Пуассона. Чтобы учесть изменения модуля деформации с глубиной, которое имеет место в действительности, был принят следующий закон распределения модуля деформаций:

$$E_2 = E_0 + E_n z^n \qquad (1)$$

где, E_n - коэффициент увеличения модуля деформации с глубиной;

E_0 - модуль деформации на глубине z;

n - показатель неоднородности.

Данная модель также не лишена недостатков. Экспериментальные наблюдения показали значительно меньшие осадки и изгибающие моменты по сравнению с расчетными. Теоретически осадки затухают только в бесконечности в плане и по глубине, что не соответствует действительности .

Модель предложенная в 1933 г. К.Маргерром также обладает распределительной способностью и называется моделью упругого слоя или слоя конечной толщины. С помощью этой модели можно описывать и Винкледовские основания и упругое полупространство, однако если грунт не подстилается довольно жестким слоем, определение мощности сжимаемого слоя затруднительно.

Предложенные комбинированные модели состоят из сжимаемого слоя конечной толщины, обладающего свойством модели Винклера и расположенного на упругом однородном полупространстве.

Имеются двухпараметрические модели, которые также обладают распределительными свойствами. Модели описывающие основание как упругую неоднородную среду. Многие работы посвящены учету нелинейной зависимости между осадками и нагрузкой, а также развитию осадок во времени. В настоящее время наиболее часто применяются линейные модели, как более простые, а нелинейные учитываются дополнительными расчетами.

Единый подход к линейным моделям основан на применении функции влияния основания. Впервые исследования задач изгиба конструкций на упругом основании на основе общей модели линейно-деформируемого основания с математическим описанием ее с помощью ядра основания произвел Б.Г.Корнеев [1]. Он рассмотрел плиты, которые лежат на линейно-деформируемом упругом основании, для которого между давлением на основание и перемещением поверхности основания существует следующая зависимость:

$$W(x,y)=\iint_F P(\xi,\eta)K(x,y,\xi,\eta)d\xi d\eta \tag{2}$$

где, W - осадка поверхности грунта;

p - внешняя нагрузка;

k- ядро уравнения т.е. прогиб в точке (x,y) вызванный единичной сосредоточенной силой приложенной в точке (ξ,η);

$$k(x-\xi,y-\eta)=\frac{1-\upsilon^2}{\pi E}\bullet\frac{1}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}} \tag{3}$$

Несмотря на большую общность такая модель линейно-деформируемого основания не охватывает, например, упругое анизотропное полупространство. Кроме того в случае действия на основание движущейся единичной силы функция влияния не будет выражаться в виде (3). Чтобы охватить случаи, подобные названным, для компонент матрицы - ядра основания Г.Я.Попов [2] принял такое выражение:

$$k_{jk}(x,y)=\frac{1}{4\pi^2}\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}H_{jk}(\xi,\eta)\bullet e^{-i\xi x-i\eta y}\bullet d\xi\bullet d\eta;\quad (j,k)=1,2,3. \tag{4}$$

Принимая различные выражения функции $H_{jk}(\xi,\eta)$ можно получать все вышеперечисленные модели.

2. Методы расчета конструкций на упругом основании

В теории расчета конструкций на грунтовом основании основное место занимают балки и плиты. Балки и плиты подразделяют:

по жесткости на гибкие, конечной гибкости, абсолютно жесткие;

по размерам в плане на бесконечные, полубесконечные, четвертьбесконечные.

Для расчета балок на грунтовом основании пользуются дифференциальным уравнением плоского изгиба нейтральной оси балки:

$$EI\frac{\delta^4 W}{\delta x^4}+N\frac{\delta^2 W}{\delta x^2}+p(x)=q(x) \qquad (5)$$

где W - прогиб балки;

p(x) - реактивное давление грунта;

q(x) - внешняя нагрузка действующая перпендикулярно оси балки;

N - погонная нагрузка действующая вдоль нейтральной оси балки;

E - модуль упругости материала;

I - момент инерции поперечного сечения балки.

Расчет плит на грунтовом основании представляет более сложную задачу по сравнению с расчетом балок, так как для описания деформируемого состояния плиты используется бигармоническое уравнение изгиба срединной поверхности плиты:

$$D\left[\frac{\delta^4 W}{\delta x^4}+2\bullet\frac{\delta^4 W}{\delta x^2\delta y^2}+\frac{\delta^4 W}{\delta y^4}\right]+N_x\frac{\delta^2 W}{\delta x^2}+N_y\frac{\delta^2 W}{\delta x^2}=q(x,y)-p(x,y) \qquad (6)$$

где: D- цилиндрическая жесткость плиты;

W - прогиб плиты;

Nx, Ny - погонные нагрузки приложенные в срединной плоскости плиты;

q - внешняя нагрузка перпендикулярная срединной поверхности;

p - реактивное давление грунта;

Решение этих уравнений зависит от характера оаспределения реактивных давлений, от зависимости между этими давлениями и осадками, а также от типа плиты и ее жесткости. При расчете конструкций на Винклеровском основании решаются системы дифференциальных уравнений в обыкновенных или частных производных.

Расчет прямоугольных плит конечных размеров и жесткости связан с большими математическими и вычислительными трудностями. К первым работам в этом направлении относятся работы Х.Хаппеля и Г.Вестергардта, применивших метод Ритца для расчета плит на Винклеровском основании.

Применяется также метод компрессирующих нагрузок, в котором плита конечных размеров заменяется плитой бесконечных размеров, а в местах обрыва прикладываются компенсирующие нагрузки удовлетворяющие граничным условиям. Большинство авторов представляют решение этой задачи в виде двойного тригонометрического ряда.

При расчете плит лежащих на упругом полупространстве задача еще более усложняется так как дифференциальное уравнение заменяется интегро-дифференциальным. При решении данных уравнений применяются различные методы, многие авторы применяют методы расчета удобные для реализации на ЭВМ. Л.П.Винокуров и др. применили к расчету плиты на упругом полупространстве метод конечных разностей. К числу дискретных методов расчета, помимо метода конечных разностей, относятся вариационно-разностный и метод конечных элементов.

В последнее время широко распространены методы решения дифференциальных уравнений, основанные на использовании интегральных преобразований. При решении задач для бесконечных областей применяются интегральные преобразования Фурье или Ханкеля.

В отличие от методов расчета не меняющих условий сопряжения плиты и основания, существует ряд методов, где эти сопряжения удовлетворяются только в некоторых точках. В работах Б.Н.Желючкина и А.П.Синицына [3] контакт между плитой и основанием удовлетворяется в отдельных точках.

Точные аналитические решения большинства задач расчета конструкций на деформируемом основании важны как эталон для оценки пригодности приближенных результатов, но получить их довольно трудно. Поэтому при решении применяются различные упрощения. Так плита конечных размеров заменяется при определенных условиях бесконечной, если нагрузка расположена в центре, полубесконечной если нагрузка приложена вблизи края и четвертьбесконечной если нагрузка приложена в угловых участках (С.Войновский-Кригер [3], Б.Г.Коренев [1], Г.Я.Попов [2], Г.Вестергаард [5], О.Я.Шехтер [6], М.И.Горбунов-Посадов [7] и др.

3. Особенности расчета самонапряженных плит

Еще меньше работ где в расчет включаются нагрузки действующие в срединной плоскости. Такое нагружение соответствует конструкциям вывполненным из самонапряженного железобетона. При выполнении монолитной плиты из напрягающего бетона твердофазовое расширение последнего в условиях ограничения свободы деформаций приводит к деформированию арматуры [9]. В результате плита получает предварительное обжатие в двух направлениях при использовании энергии расширения напрягающего бетона, реализуемое в процессе твердения. Таким образом помимо системы традиционных сил, воздействующих на конструкцию при расчете необходимо учесть сжимающие усилия от самонапряжения, действующие в срединной плоскости плиты (при условии симметричного положения ограничивающей арматуры). Величина сил обжатия, приложенных к конструкции определяется на основании методики [10]. Вопросом, подлежащим анализу остается влияние дополнительных сил от самонапряжения на работу конструкции под нагрузкой.

Для полосы расположенной на слое конечной толщины имеется решение в работе А.Г.Ишковой [8]. Плиты на комбинированном основании рассмотренны в работе Б.Г.Корнева. Получены выражения в тригонометрических рядах прогибов, изгибающих и крутящих моментов, поперечных сил для бесконечных плит нагруженных сосредоточенной силой, равномернораспределенной нагрузкой, нагрузкой распределенной по прямоугольнику. Для бесконечной плиты нагруженной сосредоточенной силой эти выражения имеют следующий вид:

$$W=\frac{P}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{c^*\cos(\alpha^*x)^*\cos(\beta^*x)^*d\alpha^*d\beta}{1-\mathrm{N}^*c^*(\alpha^2+\beta^2)+c^*D^*(\alpha^2+\beta^2)^2} \tag{7}$$

$$My=\frac{PD}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{c^*(\alpha^2+\upsilon\beta^2)\cos(\alpha x)\cos(\beta y)\bullet d\alpha\bullet d\beta}{\alpha\beta\left[1-\mathrm{N}c^*(\alpha^2+\beta^2)+cD^*(\alpha^2+\beta^2)^2\right]} \tag{8}$$

$$Mx=\frac{PD}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{c^*(\upsilon\alpha^2+\beta^2)\cos(\alpha x)\cos(\beta y)\bullet d\alpha\bullet d\beta}{\alpha\beta\left[1-\mathrm{N}c^*(\alpha^2+\beta^2)+c^*D(\alpha^2+\beta^2)^2\right]} \tag{9}$$

$$Mxy=\frac{PD}{\pi^2}(1-\upsilon)\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{c^*\sin(\alpha x)\sin(\beta y)\bullet d\alpha\bullet d\beta}{\alpha\beta\left[1-\mathrm{N}c^*(\alpha^2+\beta^2)+c^*D(\alpha^2+\beta^2)^2\right]} \tag{10}$$

$$Q_1=-\frac{PD}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{c^*(\alpha^2+\beta^2)\sin(\alpha x)\cos(\beta y)\bullet d\alpha\bullet d\beta}{\alpha\beta\left[1-\mathrm{N}c^*(\alpha^2+\beta^2)+c^*D(\alpha^2+\beta^2)^2\right]} \tag{11}$$

$$Q_2=-\frac{PD}{\pi^2}\int_0^\infty\int_0^\infty\frac{c^*(\alpha^2+\beta^2)\cos(\alpha x)\sin(\beta y)\bullet d\alpha\bullet d\beta}{\alpha\beta\left[1-\mathrm{N}c^*(\alpha^2+\beta^2)+c^*D(\alpha^2+\beta^2)^2\right]} \tag{12}$$

$$c^*=\frac{2(1-\upsilon^2)}{E}\bullet\frac{1}{\sqrt{\alpha^2+\beta^2}}\bullet\frac{1}{K_0} \tag{13}$$

Анализ влияния сил приложенных в серединной плоскости плиты выполнен с помощью прикладного пакета «Mathematica» по формулам (7), (8), (9), (10), (11), (12). Результаты расчетов показывают, что учет сил действующих в срединной плоскости, т.е. сил возникающих в плите от самонапряжения, уменьшает прогибы плиты, снижает максимальные значения изгибающих моментов и поперечных сил при одной и тойже цилиндрической жесткости плиты.

Литература

1. Коренев Б.Г. Вопросы расчета балок и плит на упругом основании. Госстройиздат, М.; 1954 г.
2. Попов Г.Я. Изгиб полубесконечной плиты, лежащей на линейно-деформируемом основании. -ПММ, т.25, вып.2, 1961 г.
3. Жемочкин Б.Н., Синицын А.П. Практические методы расчета фундаментных балок и плит на упругом основании. -М, Стройиздат, 1984.
4. Woinowsky-Kriger S. Uber die Biegung dünner rechteckigen Platten dürch Kreislasten. Ingenienr Archiv, v.3, 1932.
5. Westergaard H.M. Stress concentration in plates loaded over small areas. Trans. ASCE, v.108, 1943.
6. Шехтер О.Я. К расчету фундаментных плит на упругом слое грунта конечной мощности. Сборник НИИ № 11 «Основания и фундаменты», 1948.
7. Горбунов-Посадов М.И., Маликова Т.А., Соломин В.И. Расчет конструкций на упругом основании. -М., Стройиздат, 1984.
8. Ишкова А Г. Об изгибе изотропных и ортотропных пластинок на упругом основании Изв. ВУЗов «Строительство и архитектура», вып.XVII, 1969.
9. Михайлов В.В., Литвер С,С, Расширяющийся и напрягающий цементы и самонапряженные конструкции. М.: Стройиздат, 1976.
10. Пособие по проектированию самонапряженных конструкций к СНиП 2.03.01-84. М.: Стройиздат, 1986.