

ТЕОРЕТИЧЕСКИЕ ИССЛЕДОВАНИЯ РАБОТЫ ОТДЕЛЬНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ РАМНО-ПРОСТРАНСТВЕННОГО ФУНДАМЕНТА ПРИ НЕОДНОРОДНОМ ДЕФОРМИРОВАНИИ ОСНОВАНИЯ

С.Д. Семенюк
ММИ, г. Могилев

Влияние вертикальных стенок, связывающих пояса рамы, учитывается диагональными связями, расположенными в плоскостях, параллельных граням рамы. При смещении опор и переносе хорд ортогональных стержней одна из диагональных связей окажется сжатой, а другая - растянутой. Расчеты показывают, что эти связи нужно ставить в панелях, примыкающих к проседающему узлу, поскольку, на этих участках изменение длин диагоналей примерно в 40 раз больше нежели в остальных.

Пусть дана конструктивно симметричная относительно двух осей замкнутая рама - см. рис. 1, а. Она нагружена кососимметричными усилиями X_1 и X_2 диагонального направления и будет деформироваться согласно рис. 1, б. Эпюра моментов должна иметь вид по рис. 1, в. Следует установить соотношения между ординатами a и b этой эпюры. Для этого множим ее по формуле Мора на одну из единичных эпюр метода сил, например, на эпюру \bar{M} рис. 1, г. Результат перемножения должен равняться нулю, т.е.

$$\sum \frac{l}{EJ} \int \bar{M} \cdot M^* dS = 0; \quad -\frac{l}{EJ_1} \cdot \frac{a-b}{2} \cdot l \cdot l + \frac{h}{EJ_2} \cdot (-2 \cdot a + b + 2 \cdot b - a) = 0,$$

откуда: $-\frac{a-b}{2} \cdot \left(\frac{l}{EJ_1} + \frac{h}{EJ_2} \right) = 0.$

Выражение в скобках всегда положительно и отлично от нуля, поэтому $b=a$, т.е. эпюра моментов кососимметрична относительно обеих осей - см. рис. 1, д. Осталось найти величину ординаты a , определяющей все остальные ординаты эпюры. Разрежем мысленно раму по вертикальной оси симметрии и составим уравнение проекции всех односторонних сил на эту ось: $(X_1 + X_2) \cdot \sin \alpha - 2 \cdot \frac{a}{0.5 \cdot l}$; откуда

$$a = 0.25 \cdot (X_1 + X_2) \cdot l \cdot \sin \alpha \tag{1}$$

Если провести горизонтальное сечение и использовать уравнение проекций на горизонтальную ось, то получим

$$a = 0.25 \cdot (X_1 + X_2) \cdot h \cdot \cos \alpha. \tag{2}$$

Оба выражения тождественны, ибо $l \cdot \sin \alpha = h \cdot \cos \alpha$; $\operatorname{tg} \alpha = \frac{h}{l}$.

Найденные решения дают основания для следующих выводов:

1. Если рама конструктивно симметрична, и нагружена по рис. 1, *a*, то эпюра моментов не зависит от соотношения жесткостей ортогональных стержней, несмотря на статическую неопределимость задачи.

2. Эпюра моментов не зависит от соотношения между силами X_1 и X_2 , а определяется только их суммой. Поэтому можно в дальнейшем ограничиться одной диагональной нагрузкой X . Полученные выше зависимости можно заменить такими:

$$a = 0.25 \cdot X \cdot l \cdot \sin \alpha = 0.25 \cdot X \cdot h \cdot \cos \alpha. \quad (3)$$

3. Эпюра моментов не изменится, если диагональную нагрузку на раму заменить уравновешенной по рис. 2, *a* при условиях:

$$Q \cdot l = N \cdot h; \quad (4)$$

$$Q = (X_1 + X_2) \cdot \sin \alpha = X \cdot \sin \alpha. \quad (5)$$

Такая замена равносильна разложению диагональной нагрузки X на две составляющие Q и N в обоих нагруженных узлах.

4. Судя по эпюре M рис. 1, *d*, узлы рамы не поворачиваются, а ее стержни испытывают лишь поперечные смещения:

вертикальное
$$\Delta Y = \frac{a \cdot l^2}{6 \cdot E \cdot J_1} = \frac{a \cdot l}{6 \cdot i_1}, \quad (6)$$

и горизонтальное
$$\Delta X = \frac{a \cdot h^2}{6 \cdot E \cdot J_2} = \frac{a \cdot h}{6 \cdot i_2}, \quad (7)$$

где величина a определяется выражением (3).

5. Если эпюра моментов не зависит от соотношения жесткостей элементов рамы, то характер ее деформаций прямо определяется этим соотношением, так как

$$\frac{\Delta X}{\Delta Y} = \frac{h \cdot i_1}{h \cdot i_2} = \frac{i_1}{i_2} \cdot \operatorname{tg} \alpha = \frac{E \cdot J_1}{E \cdot J_2} \operatorname{tg}^2 \alpha \quad (8)$$

6. Рама не будет испытывать деформаций, если ее нагрузить по рис. 2, *б*, сохранив соотношения (4) и (5), поскольку к нагруженным узлам окажутся приложенными уравновешенные системы сил. Если же $Q > X \cdot \sin \alpha$, то деформация рамы под воздействием сил Q и N будет сдерживаться силами X . Но силы X могут возникать и в упругой диагональной связи под воздействием внешних нагрузок Q и N , будут пропорциональны им и зависеть от жесткости самой связи.

Пусть задано вертикальное смещение Δ_0 под совместным действием группы сил, показанных на рис. 2, *б*. Оно будет разностью между перемещениями от действия внешних сил Q , N и внутренних - X .

$$\Delta_0 = \Delta(Q) - \Delta(X) \quad (9)$$

Перемещение $\Delta(Q)$ равно ΔY по (6), оно выражается через ординату a , определяемую равенствами (3). Если в первом из них заменить $X \cdot \sin \alpha = Q$, то окажется, что

$$a = 0.25 \cdot Q \cdot l. \quad (10)$$

Это есть выражение ординаты через внешние силы; тогда перемещения от внешних сил определится выражением

$$\Delta(Q) = \frac{Q \cdot l^2}{24 \cdot i_1} = \frac{Q \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot J_1} \quad (11)$$

Перемещение от внутренней силы X определится с помощью тех же равенств (3) и (6), т.е.

$$\Delta(X) = \frac{X \cdot l^2}{24 \cdot i_1} \cdot \sin \alpha = \frac{X \cdot l^3}{24 \cdot E \cdot J_1} \cdot \sin \alpha. \quad (12)$$

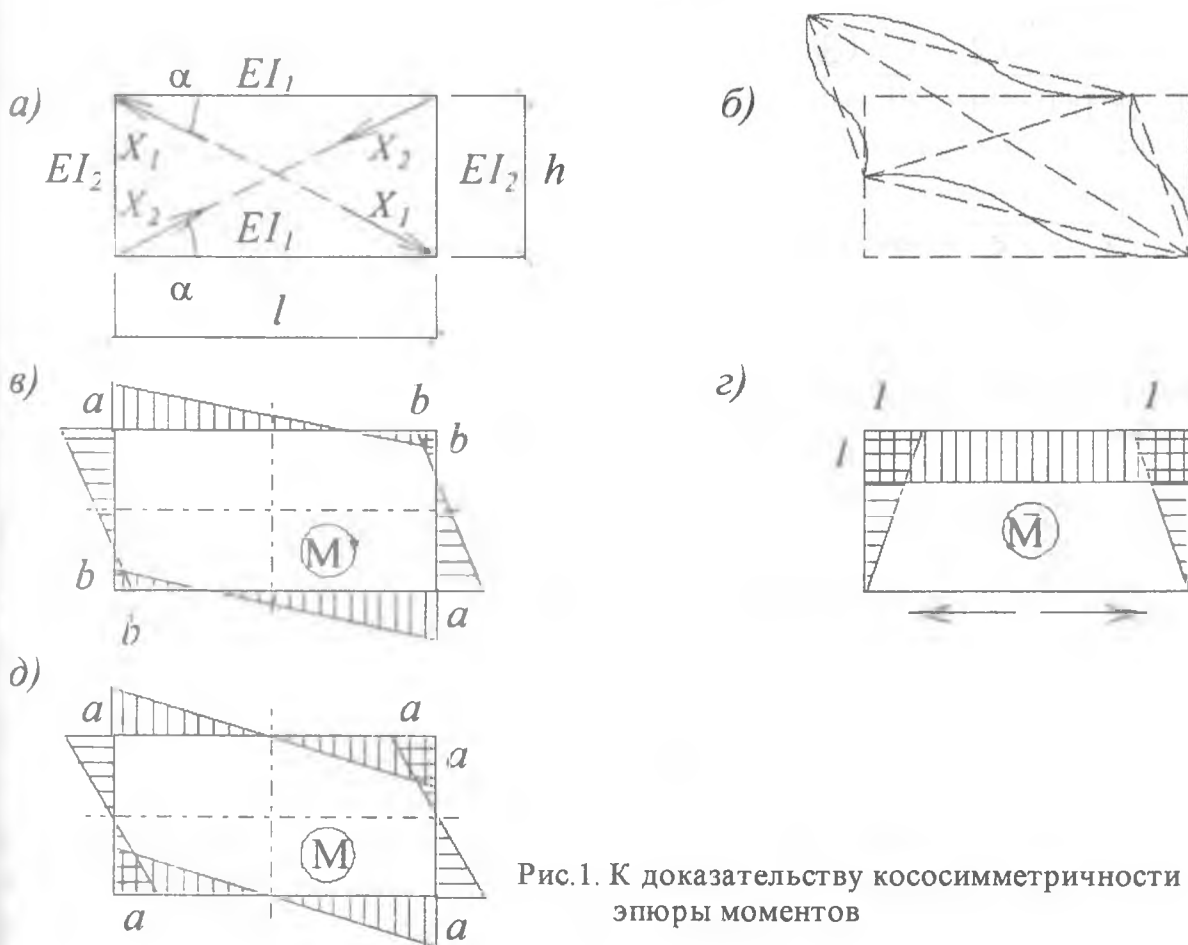


Рис. 1. К доказательству кососимметричности эпюры моментов

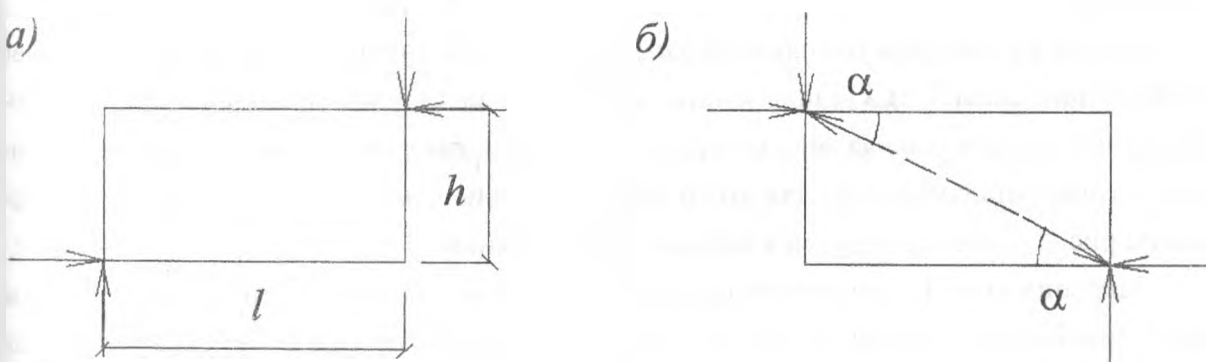


Рис. 2. Замена диагональной нагрузки составляющими

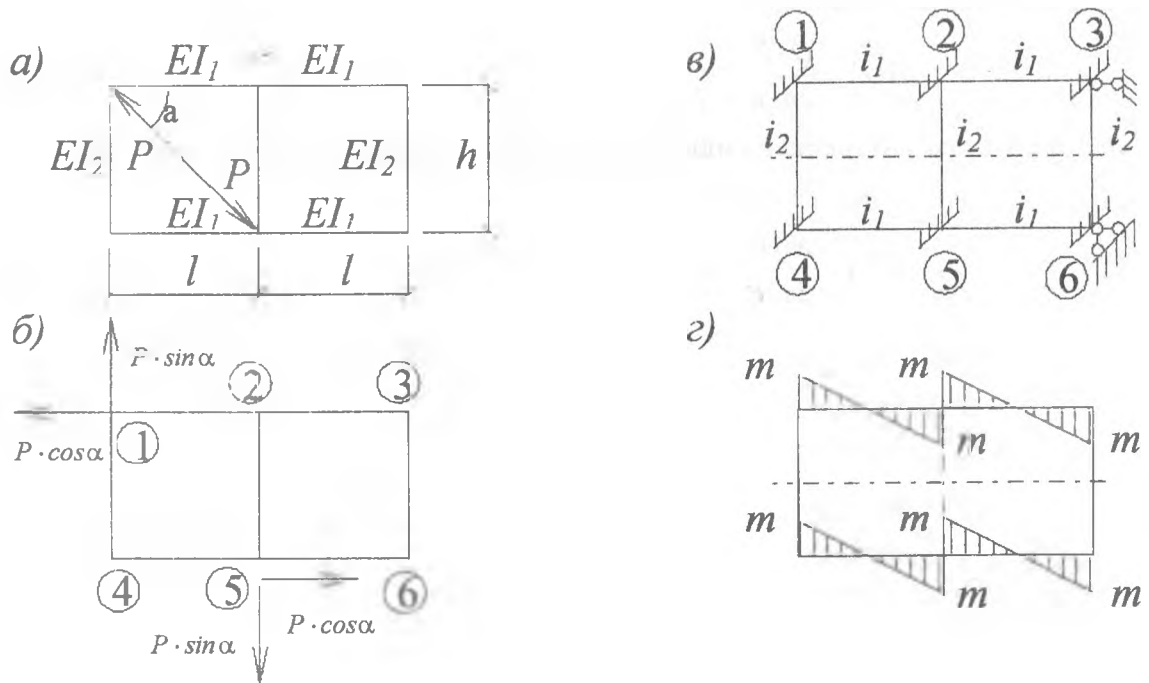


Рис. 3. К доказательству кососимметричности эпюры моментов в двух панельной симметричной раме относительно горизонтальной оси.

$$\text{Значит, } \Delta_0 = \frac{l^3}{24 \cdot E \cdot I_1} \cdot (Q - x \cdot \sin \alpha). \quad (13)$$

Отсюда, если задана величина Δ_0 , можно найти

$$x = \frac{Q - \frac{24 \cdot E \cdot I_1}{l^3} \Delta_0}{\sin \alpha} \quad (14)$$

Получено выражение для усилия во внутренней связи, обеспечивающее получение заданного перемещения Δ_0 под действием внешней уравновешенной нагрузки Q, N . В частности, если $\Delta_0 = 0$, то $x = Q \cdot \sin \alpha$, т.е. рама нагружена по рис. 2, б уравновешенной системой сил.

Теперь рассмотрим плоскую двухпанельную симметричную раму по рис. 3, а. Две перекрестные силы X_1 и X_2 , показанные на рис. 1, а здесь заменены одной силой P . Покажем, что окончательная эпюра моментов должна быть кососимметричной относительно горизонтальной оси. Для этого разложим силы P на ортогональные составляющие по рис. 3, б и воспользуемся методом перемещений.

Закрепив узлы 1...6 моментными связями, а также обеспечив неподвижность рамы тремя линейными связями по рис. 3, в получим смещаемую основную систему метода перемещений. Образует матрицу-индикатор единичных групповых перемещений так, чтобы первые три группировки оказались кососимметричными, а остальные три - симметричными.

$$y = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \end{vmatrix}$$

Грузовая эпюра моментов будет иметь вид по рис. 3, *г*, она кососимметрична относительно горизонтальной оси симметрии рамы. Отсюда следует, что свободные члены окажутся отличными от нуля только в первых трех уравнениях, содержащих кососимметричные угловые перемещения в качестве неизвестных. Все симметричные групповые неизвестные окажутся равными нулю, что и требовалось доказать. В отличие от однопанельной рамы, где узлы под действием диагональной нагрузки не поворачивались, здесь кососимметричные угловые перемещения будут иметь место.

Однако, коль установлен кососимметричный характер деформаций рамы, есть смысл перейти от метода перемещений к методу сил, рассматривая только одну половину рамы согласно рис. 4, *а*. Здесь окажется лишь два неизвестных по методу сил. Эквивалентная система представлена на рис. 4, *б*.

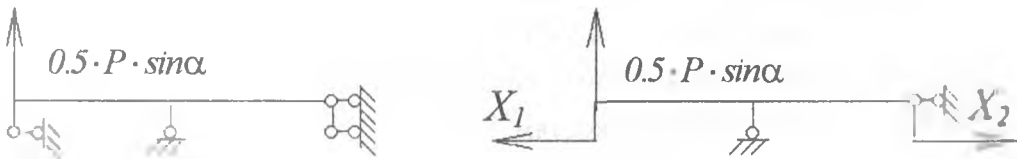


Рис. 4. К расчету рамы методом сил

Рассчитываем эту раму применительно к размерам модели рамного фундамента, показанной на рис. 5, расчет выполним в двух вариантах:

1. диагональная связь расположена в плоскости, параллельной плоскости XZ ;
2. диагональная связь расположена в плоскости, параллельной плоскости YZ .

Расчет сводим в табл.1. В результате расчета устанавливаем, что для обеспечения равенства вертикальных перемещений в обеих плоскостях в более коротких панелях (плоскость YZ) должна действовать диагональная сила P , превышающая силу P , расположенную в плоскости XZ , в 3.55 раза, т.е. $P/P = 3.55$.

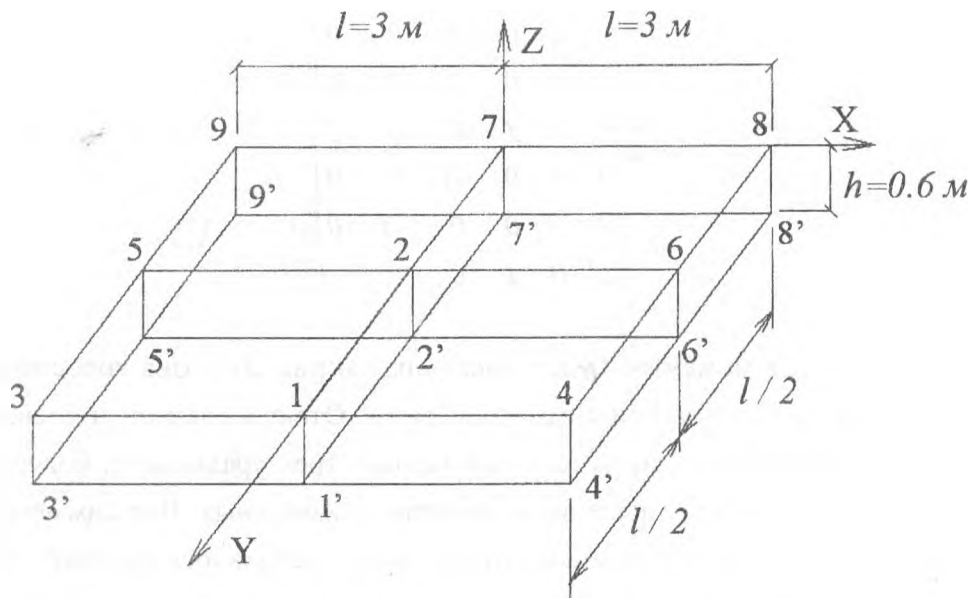


Рис. 5. Схема модели рамного фундамента

Теперь можно попытаться установить влияние стенок, связывающих между собой ригеля (пояса) модели рамного фундамента.

Рассмотрим просадку угловой опоры, для которой соответствует эпюра моментов, вычисленная для модели пространственной системы, без учета влияния заполнителя между поясами и стойками.

Внешняя сила, приложенная к узлу 4 и вызывающая его вертикальное перемещение, складывается из двух поперечных сил, действующих в ортогональных плоскостях, параллельным координатным плоскостям XZ и YZ .

$$P = 2 \cdot \left(\frac{8.171 + 10.556}{0.5 \cdot l} + \frac{3.996 + 3.797}{l} \right) \cdot \frac{i \cdot \Delta}{l} = 90.494 \cdot \frac{i \cdot \Delta}{l^2}$$

Но через i обозначена погонная жесткость ригеля, т.е. $i = \frac{EI}{l}$, где $l = 3$ м - пролет большего ригеля, а EI - его изгибная жесткость.

$$\text{Поэтому } P = 90.5 \cdot \frac{EI \cdot \Delta}{l^2}$$

При $\Delta = 1$ величина P будет являться жесткостью модели рамного фундамента против просадки ее угловой опоры без учета влияния стенок, связывающих ригеля. Обозначим ее через $C_{\text{риг}}$,

$$\text{тогда } C_{\text{риг}} = \frac{90.5 \cdot EI}{l^3}$$

У рамы, имеющей ригеля, связанные стенкой, жесткость складывается из жесткости, обеспечиваемой ригелями - $C_{\text{риг}}$ и жесткости, обеспечиваемой стенкой - $C_{\text{ст}}$: $C = C_{\text{риг}} + C_{\text{ст}}$ или $C_{\text{ст}} = C - C_{\text{риг}}$

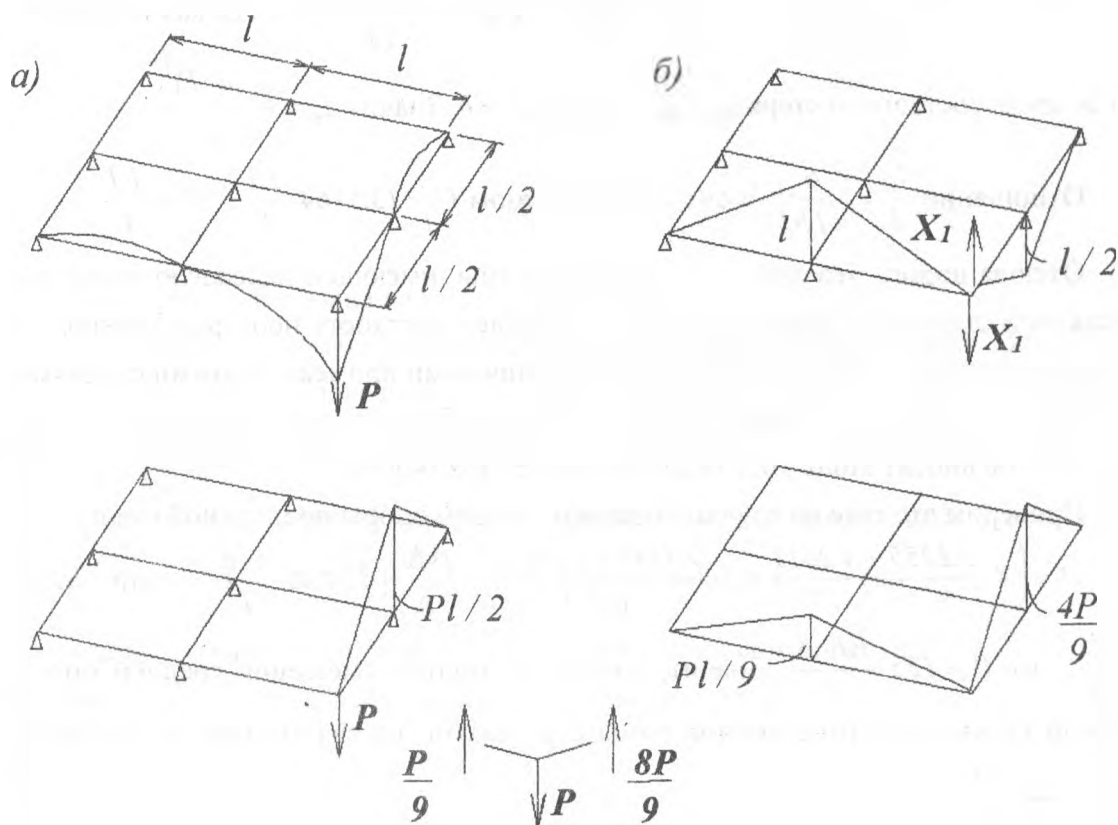


Рис. 6. К расчету модели на просадку угловой опоры.

Рассмотрим, например, модель рамного фундамента как систему перекрестных связей одинаковой жесткости, опертую во всех узлах, кроме углового. Пусть она нагружена по рис. 6, а вертикальной нагрузкой P , приложенной к угловому узлу. Найдем зависимость вертикального перемещения Δ от нагрузки P . Влиянием кручения на усилия и перемещения пренебрегаем, занижая тем самым несколько жесткость системы.

Основная система и единичная эпюра изгибающих моментов представлена на рис. 6, б, грузовая эпюра моментов - на рис. 6, в.

$$\text{Тогда } EI_0 \cdot \delta_{11} = 2 \cdot \frac{l}{3} \cdot \left(\frac{l^3}{8} + l^3 \right) = \frac{3}{4} \cdot l^3; \quad EI_0 \cdot \Delta_{1P} = -2 \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{P \cdot l}{2} \cdot \frac{l^2}{4} = -\frac{l}{12} \cdot P \cdot l^2.$$

$$\text{Из уравнения } \delta_{11} \cdot X_1 + \Delta_{1P} = 0. \text{ Находим: } X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{P}{9}.$$

Окончательная эпюра моментов изображена на рис. 6, г, где для проверки равновесия показан вырезанный узел, находящийся под действием поперечных сил и нагрузки.

Теперь определим величину перемещения, используя рис. 6, г и рис. 6, в. На последней схеме полагаем $P = 1$. $EI_0 \cdot \Delta = 2 \cdot \frac{l}{3} \cdot \frac{4 \cdot P \cdot l}{9} \cdot \frac{l^2}{4} = \frac{2}{27} \cdot P \cdot l^3.$

Жесткость системы против перемещения углового узла выражается силой P , вызывающей смещение $\Delta = 1$, т.е. $C = 13.5 \cdot \frac{EI_0}{l^3}.$

Ранее было получено $C_{\text{риз}} = 90.5 \cdot \frac{EI}{l^3}$, где $I = \frac{b \cdot (1.5 \cdot b)^3}{12}$, тогда как I_0 момент инерции сечения составного стержня с размерами $b \times 6b$. Значит $I_0 = \frac{b \cdot (6 \cdot b)^3}{12}$

Отношение $\frac{I_0}{I} = \left(\frac{6}{1.5}\right)^3 = 64$. Таким образом $C = 13.5 \cdot 64 \cdot \frac{EI}{l^3} = 884 \cdot \frac{EI}{l^3}$.

Отсюда видно, что жесткость плоской рамы, имеющей надежную связь между ее ригелями и стенкой, примерно в 9 раз превышает жесткость пространственной рамы, у которой эта связь осуществляется только единичными промежуточными стойками.

Иначе говоря, около 90% общей жесткости обеспечивают стенки, тогда как ригеля сами по себе вносят лишь 10% величину общей жесткости.

Проверим это еще на случай просадки средней опоры продольной стены.

$$P = \left(4 \cdot \frac{5.1255 + 4.2511}{l} + 2 \cdot \frac{9.9348 + 11.9048}{0.5 \cdot l} \right) \cdot \frac{i \cdot \Delta}{l} = 124.86 \cdot \frac{i \cdot \Delta}{l^2}$$
, или поскольку $i = \frac{EI}{l}$, то $P \approx 125 \cdot \frac{EI \cdot \Delta}{l^3}$. Значит, жесткость против смещения средней опоры продольной стены пространственной рамы с ригелями, не связанными со стенкой, будет $C_{\text{риз}} = 125 \cdot \frac{EI}{l^3}$.

Теперь рассмотрим модель рамного фундамента как плоскую раму по рис. 7, имеющую все элементы одинаковой жесткости $EI_0 = 64 \cdot EI$.

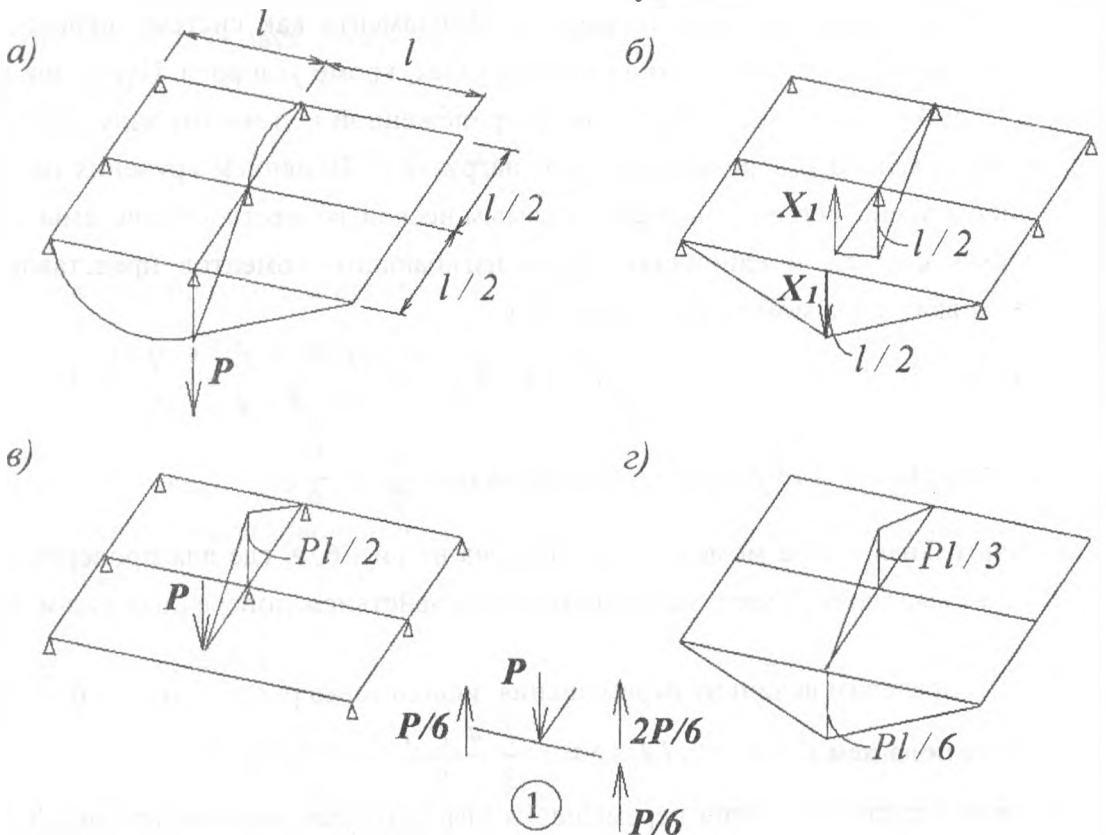


Рис. 7. К расчету модели на просадку средней опоры продольной стены.

Повторив рассуждения приведенные выше при рассмотрении случая просадки угловой опоры, найдем

$$EI_0 = \frac{1 \cdot (2 \cdot l)^3}{48} + 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{l^3}{8} = \frac{l^3}{4};$$

$$EI_0 \cdot \Delta_{1P} = -2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{P \cdot l}{2} \cdot \frac{l^2}{4} = -\frac{P \cdot l^3}{12};$$

$$X_1 = -\frac{\Delta_{1P}}{\delta_{11}} = \frac{P}{3}.$$

Эпюра моментов показана на рис. 7, з.

Находим вертикальное перемещение по формуле Мора, "перемножая" эпюры рис. 7, з и рис. 7, в, положив в последнем $P=1$.

$$\text{Тогда: } EI_0 \cdot \Delta = 2 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{P \cdot l}{3} \cdot \frac{l^2}{4} = \frac{P \cdot l^3}{18}.$$

Значит, жесткость против смещения средней эпюры продольной стены равна:

$$C_{\text{риг}} = 18 \cdot \frac{EI_0}{l^3} = 18 \cdot 64 \cdot \frac{EI}{l^3} = 1152 \cdot \frac{EI}{l^3}, \text{ ранее было получено } C_{\text{риг}} = 125 \cdot \frac{EI}{l^3}.$$

Здесь доля ригелей в общей жесткости также составляет порядка 10 %.

Влияние заполнителя на жесткость рамы показано в табл. 2.

Таблица 2

Доля заполнения в общей жесткости

Воздействия	Множите при EI/l^3		
	Пояса связаны с заполнением	Пояса не связаны с заполнением	Доля заполнения в общей жесткости
Просадка угловой опоры	864 100%	90.5 10.5%	773.5 89.5%
Просадка средней опоры продольной стены	1152 100%	125 10.9%	1027 89.1%

Вывод:

При возведении сборно-монолитных рамных фундаментов на неравномерно деформируемом основании необходимо обеспечивать надежную связь между блоками стен подвалов и элементами пространственной рамы.

Литература

1. Дарков А.В., Шапошников Н.Н. Строительная механика. М., Высшая школа, 1986.
 2. "Расчет и конструирование фундаментов пространственного типа в сложных грунтовых условиях". Отчет по НИР. УИИВХ, 1984.
- "Расчет и конструирование фундаментов пространственного типа в сложных грунтовых условиях". Отчет по НИР. УИИВХ, 1985.