УДК 681.3

АЛГЕБРА ЧАСТИЧНОЙ ЛОГИКИ

Прихожий А.А

Белорусский Государственный Университет Информатики и Радиоэлектроники

Алгебра частичной логики, предлагаемая в статье, позволяет оперировать частичными переменными и функциями, подобно тому как традиционная булева алгебра позволяет оперировать полностью определенными переменными и функциями. Кроме того, многие задачи построения моделей, имитационного моделирования, синтеза, верификации, логического вывода решаются эффективно средствами этой алгебры [1-3].

Значения полностью определенной скалярной логической переменной x_i принадлежат множеству $B=\{0,1\}$, Значения частичной скалярной переменной y_j принадлежат множеству $M=\{0,1,-\}$, где '-' есть безразличное значение. Значения частичной векторной переменной $y=(y_1,...,y_m)$ принадлежат множеству M^m. Понятие частичной функции является обобщением известного понятия неполностью определенной функции. Частичная булева функция (операция) $f(y)$ есть отображение $f: M^m \to M$ (заметим, неполностью определенная функция есть $f: B^m \to M$). Частичная функция определена корректно, если для всех значений $a' a'' \in M^m$ таких, что $f(a')=1$ и $f(a'')=0$, наборы a', a'' ортогональны. Наборы $a'=(a'_1,...,a'_m)$ и $a''=(a''_1,...,a''_m)$ ортогональны, если существует j такое, что $a'_j=0$ и $a''_j=1$ или $a'_j=1$ и $a''_j=0$.

Определение 1. Формой "значение / область определения" (*ЗООФ*) час-тичной скалярной переменной y_j называется пара $y_j=v_j|d_j$ полностью опреде-ленных переменной v_j значения и переменной d_j области определения, определяющих значения y следующим образом:

1) $y_j=0$, если $v_j=0$ и $d_j=1$,

$$2)\ y_j=1,\ \text{если}\ v_j=1\ \text{и}\ d_j=1,$$

$$3)\ y_j=\text{'-'},\ \text{если}\ v_j\in\{0,1\}\ \text{и}\ d_j=0.$$

ЗООФ кодирует трехзначную переменную y_j парой двухзначных переменных v_j и d_j. Это позволяет использовать частичную логику для эффективного решения задач полностью определенной логики и использовать полностью определенную логику для эффективного решения задач частичной логики.

Определение 2. Формой "значение / область определения" (ЗООФ) час-тичной векторной переменной y называется вектор пар $y=((v_1|d_1),\ldots,(v_m|d_m))$, в котором каждая скалярная компонента представлена в ЗООФ.

Определение 3. Формой "значение / область определения" (ЗООФ) час-тичной скалярной функции $z=f(y)$ называется представление $(v|d)=f'((v_1|d_1),\ldots,(v_m|d_m))$, в котором $z=(v|d)$, $y_j=v_j|d_j$ при $j=1,\ldots,m$, v и d - полностью определенные функции, зависящие от аргументов $v_1,d_1,\ldots, v_m,d_m$.

Если в частичной функции $g=(v|d)$ функции v и d являются полностью определенными функциями $v(x)$ и $d(x)$, зависящими от векторного аргумента $x=(x_1,\ldots,x_n)$, то функция g является неполностью определенной функцией $g(x)$: $B^n\text{->}\{0,1,-\}$. Для функции $g(x)$ выполняются соотношения $g^{on}=(v\&d)^{on}$, $g^{off}=(\sim v\&d)^{on}$, $g^{dc}=(\sim d)$.

Одноместные и двухместные операции являются базовыми в частичной логике. Они позволяют представить в виде формул все другие корректно определенные функции частичной логики. Существует 27 одноместных трехзначных операций. Только часть их является корретными частичными операциями. Пять операций, являющихся обобщением традиционных одноместных булевых операций, определены в табл. 1. Пусть единственный аргумент одноместной частичной операции представлен в ЗООФ $(v_1|d_1)$.

Таблица 1

Одноместные операции частичной логики

N	Имя операции	Значение 0 1 –	Обозначение
1	Константа 0	0 0 0	$c0(v_1\|d_1)$
2	Константа 1	1 1 1	$c1(v_1\|d_1)$
3	Константа –	– – –	$c–(v_1\|d_1)$
4	Тождество	0 1 –	$=(v_1\|d_1)$
5	Отрицание	1 0 –	$\sim(v_1\|d_1)$

Теорема 1. Результаты выполнения одноместных частичных операций определяются следующими выражениями в ЗООФ:

$$c0(v_1|d_1) = 0|1 \qquad (1)$$

$$c1(v_1|d_1) = 1|1 \qquad (2)$$

$$c–(v_1|d_1) = v_1|0 \qquad (3)$$

$$=(v_1|d_1) = v_1|d_1 \qquad (4)$$

$$\sim(v_1|d_1) = \sim v_1|\ d_1. \qquad (5)$$

Существует 19683 двухместных трехзначных операций, из которых только часть является корректными частичными операциями. Десять частичных операций, обобщающих традиционные двухместные полностью определенные булевы операции, определены в табл.2. Частичные операции обозначены теми же символами, что и традиционные операции. Пусть $v_1|d_1$ и $v_2|d_2$ - аргументы операций, представленные в ЗООФ.

Теорема 2. Результаты выполнения двухместных частичных операций определяются следующими выражениями в ЗООФ:

$$(v_1|d_1)\&(v_2|d_2) = (v_1\&v_2|d_1\&d_1+\sim v_1\&d_1+\sim v_2\&d_2), \qquad (6)$$

$$(v_1|d_1)+(v_2|d_2) = (v_1+v_2|d_1\&d_1+v_1\&d_1+v_2\&d_2), \qquad (7)$$

$$(v_1|d_1)/(v_2|d_2) = (v_1/v_2|d_1\&d_1+\sim v_1\&d_1+\sim v_2\&d_2), \quad (8)$$

$$(v_1|d_1)\downarrow(v_2|d_2) = (v_1\downarrow v_2|d_1\&d_1+v_1\&d_1+v_2\&d_2), \quad (9)$$

$$(v_1|d_1)\rightarrow(v_2|d_2) = (v_1\rightarrow v_2|d_1\&d_1+\sim v_1\&d_1+v_2\&d_2), \quad (10)$$

$$(v_1|d_1)\leftarrow(v_2|d_2) = (v_1\leftarrow v_2|d_1\&d_1+v_1\&d_1+\sim v_2\&d_2), \quad (11)$$

$$(v_1|d_1)\sim>(v_2|d_2) = (v_1\sim>v_2|d_1\&d_1+\sim v_1\&d_1+v_2\&d_2), \quad (12)$$

$$(v_1|d_1)<\sim(v_2|d_2) = (v_1<\sim v_2|d_1\&d_1+v_1\&d_1+\sim v_2\&d_2), \quad (13)$$

$$(v_1|d_1)\oplus(v_2|d_2) = (v_1\oplus v_2|d_1\&d_1), \quad (14)$$

$$(v_1|d_1)\equiv(v_2|d_2) = (v_1\equiv v_2|d_1\&d_1), \quad (15)$$

Из теорем 1, 2 следует, что благодаря ЗООФ операции частичной логики выражаются через полностью определенные операции булевой алгебры. Если $d_1=d_2=1$, то частичные операции становятся полностью определенными. Так, частичная конъюнкция $(v_1|1)\&(v_2|1)$ становится полностью определенной конъюнкцией $v_1\&v_2$, действительно, $(v_1|1)\&(v_2|1) = (v_1\&v_2|1+\sim v_1\&1+\sim v_2\&1) = (v_1\&v_2|1) = v_1\&v_2$. Другие частичные функции определяются формулами, построенными с использованием базовых частичных операций.

Таблица 2

Двухместные операции частичной логики

N	Имя операции	Значения	Обозначение
		0 1 – 0 1 – 0 1 – 0 0 0 1 1 1 – – –	
1	Конъюнкция	0 0 0 0 1 – 0 – –	$(v_1\|d_1)\&(v_2\|d_2)$
2	Дизъюнкция	0 1 – 1 1 1 – 1 –	$(v_1\|d_1)+(v_2\|d_2)$
3	Штрих Шеффера	1 1 1 1 0 – 1 – –	$(v_1\|d_1)/(v_2\|d_2)$
4	Стрелка Пирса	1 0 – 0 0 0 – 0 –	$(v_1\|d_1)\downarrow(v_2\|d_2)$
5	Импликация	1 0 – 1 1 1 1 – –	$(v_1\|d_1)\rightarrow(v_2\|d_2)$
6	Обратная импликация	1 1 1 0 1 – – 1 –	$(v_1\|d_1)\leftarrow(v_2\|d_2)$
7	Отрицание импликации	0 1 – 0 0 0 0 – –	$(v_1\|d_1)\sim>(v_2\|d_2)$
8	Отрицание обр.импликации	0 0 0 1 0 – – 0 –	$(v_1\|d_1)<\sim(v_2\|d_2)$
9	Исключающее или	0 1 – 1 0 – – – –	$(v_1\|d_1)\oplus(v_2\|d_2)$
10	Эквивалентность	1 0 – 0 1 – – – –	$(v_1\|d_1)\equiv(v_2\|d_2)$

Если в паре $v|d$ функция d фиксирована, то функция v может быть заменена другой функцией f, удовлетворяющей соотношению $(v|d)=(f|d)$ или соотношению $v\&d=f\&d$. Для функции f выполняется также соотношение $v^{on}\cap d^{on}\subseteq f^{on}\subseteq v^{on}\cup d^{off}$. Операция минимизации $f=min(v|d)$ вводится с целью генерирования представлений функции f, имеющих минимальную стоимость, выраженную в тех или иных единицах. Реализация операции зависит от формы представления полностью определенных функций v и d. Пример выполнения операции над диаграммами двоичных решений BDD приведен на (Рис.1). Минимизация BDD достигается за счет удаления некоторых нетерминальных вершин и частей диаграммы и дальнейшего упрощения результирующей BDD. Операция минимизации для других форм представления функций (ДНФ, КНФ, полином Жегалкина (форма Рида-Маллера) и др.) определяется аналогичным образом. Результаты выполнения операции зависят от порядка следования переменных в исходных представлениях *v* и *d*. Изменением порядка можно влиять на параметры представления минимизированной функции.

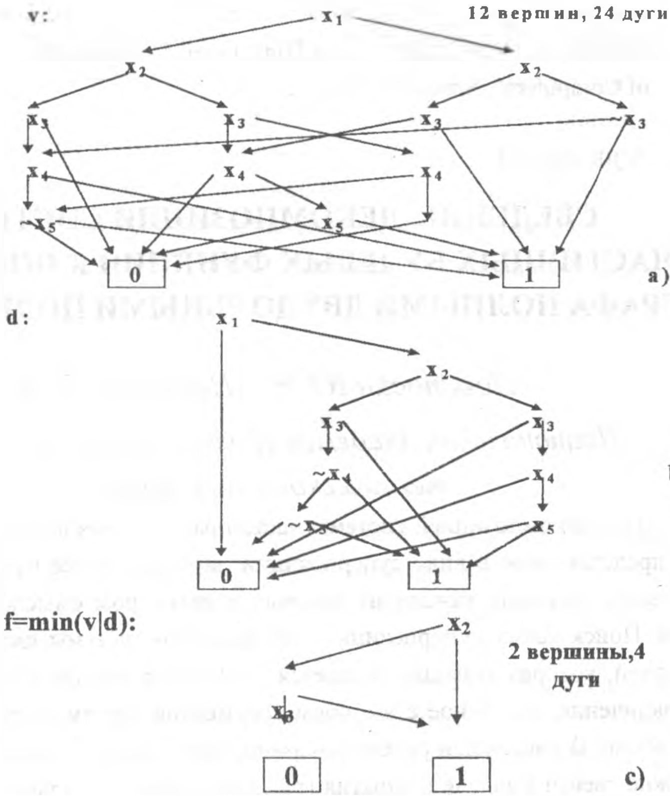

Рис.1. Минимизация функций, представленных ROBDD

Литература

1. Prihozhy A. If-Diagrams: Theory and Application, PATMOS'97: Proc. Int. Conf, 1997, UCL, Belgium, pp.369-378.
2. Прихожий А.А. Логический вывод в частичной логике. - Минск: Ин-т. техн. кибернетики АНБ, 1998. - 18 с.
3. Prihozhy A. Net Scheduling in High-Level Synthesis, IEEE Design & Test of Computers", Spring 1996, pp.26-35.

УДК 681.511

СВЕДЕНИЕ ДЕКОМПОЗИЦИИ СИСТЕМЫ ЧАСТИЧНЫХ БУЛЕВЫХ ФУНКЦИЙ К ПОКРЫТИЮ ГРАФА ПОЛНЫМИ ДВУДОЛЬНЫМИ ПОДГРАФАМИ

Поттосин Ю. В., Шестаков Е. А.

Национальная Академия Наук Беларуси, Институт технической кибернетики,

Под декомпозицией системы частичных булевых функций понимается ее представление в виде суперпозиции двух или более систем частичных булевых функций, каждая из которых в некотором смысле проще исходной. Поиск таких суперпозиций для заданной системы является сложной задачей, которая успешно решается [1–3], если вводится дополнительное ограничение, связанное с выбором аргументов систем, входящих в суперпозицию. В настоящей работе показано, что решение задачи декомпозиции можно свести к задаче покрытия графа полными двудольными подграфами [4]. При этом нет необходимости вводить указанное выше дополнительное ограничение.

Основные определения, постановка задачи. Пусть $\boldsymbol{h} = \boldsymbol{f}(\boldsymbol{x})$ – исходная система булевых функций, где $\boldsymbol{h} = (h_1, h_2, \ldots, h_m)$, $\boldsymbol{f}(\boldsymbol{x}) = (h_1(\boldsymbol{x}), h_2(\boldsymbol{x}), \ldots$