Подставив (8) и (7) в (3), получим искомое двухпараметрическое семейство решений уравнения P_1.

Литература

1 В. В. Голубев. Лекции по аналитической теории дифференциальных уравнений. М. Л. 1950.

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ РЕШЕНИЙ НЕЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

М. П. Сидоревич, И. М. Сидоревич

Факультет водоснабжения и гидромелиорации, БПИ
Брест, Республика Беларусь

Указано групповое свойство решений некоторых специальных нелинейных уравнений четвертого порядка и метод отыскания общего интеграла этих уравнений.

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ, УРАВНЕНИЯ, РЕШЕНИЕ, ГРУППОВЫЕ, СВОЙСТВА

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$2u''' + 24uu'' + 13u'^2 + 98u^2u' + 49u^4 = 0. \qquad (1)$$

Если (1) [1] имеет полярное решение

$$u(z) = \frac{\alpha_{-1}}{z - z_0} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n (z - z_0)^n ,$$

то вычет полюса z_0 равен: $\alpha_{-1} = 1; \frac{3}{7}; \frac{4}{7}$. Положим в (1) $xu = vx'$, где v — некоторое действительное число, получим

$$\begin{aligned} &2x^2x^{(IV)} + 8(3v-1)x^2x'x''' + (13v-6)x^2x''^2 + \\ &+ 2(7v-3)(7v-4)xx'^2x'' + (v-1)(7v-3)(7v-4)x'^4 = 0. \end{aligned} \qquad (2)$$

Отсюда при $v = 1$ будем иметь уравнение

$$2x^2x^{(IV)}+16xx'x'''+7xx''^2+24x'^2x''=0. \tag{3}$$

Если $v=3/7$, то (2) есть уравнение вида

$$14x^2x^{(IV)}+16x'x'''-3x''^2=0, \tag{4}$$

а при $v=4/7$ — уравнение

$$7x^2x^{(IV)}+20x'x'''+5x''^2=0. \tag{5}$$

Покажем, что уравнения (2)...(4) можно преобразовать друг в друга с помощью подстановки $x=w^k$, $w\neq 0$, $k\in R$. Действительно, эта подстановка переведет (3) в уравнение

$$\begin{aligned}&2w^3w^{(IV)}+8(3k-1)w^2w'w'''+(13k-6)w^2w''^2+\\&+2(7k-3)(7k-4)ww'^2w''+(k-1)(7k-3)(7k-4)w'^4=0.\end{aligned} \tag{6}$$

Теперь, очевидно, что, при $k=3/7$, из (6) получим относительно w уравнение (4), а при $k=4/7$ — уравнение (5).

Пусть далее в (4), $x=w^k$, тогда приходим к уравнению

$$\begin{aligned}&14w^3w^{(IV)}+8(9k-7)w^2w''w'''+3(13k-14)w^2w''^2+\\&+42(k-1)(3k-4)ww'^2w''+3(k-1)(3k-4)(3k-7)w'^4=0,\end{aligned} \tag{7}$$

откуда, при $k=7/3$ и $k=4/3$, получаем уравнения (3) и (5), соответственно.

Наконец, приняв в (5) $x=w^k$, будем иметь

$$\begin{aligned}&7w^3w^{(IV)}+4(12k-7)w^2w'w'''+(26k-21)w^2w''^2+\\&+28(k-1)(4k-3)ww'^2w''+2(k-1)(4k-3)(4k-7)w'^4=0.\end{aligned} \tag{8}$$

Ясно, что из (8) уравнения (3) и (4) получаются, соответственно, при $k=7/4;3/4$.

Таким образом, доказано следующее:

Теорема 1. Преобразование T: $(z, x) \to (z, w^k)$, где *к* определяется соответствующим элементом матрицы

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 3/7 & 4/7 \\ 7/3 & 1 & 4/3 \\ 7/4 & 3/4 & 1 \end{bmatrix},$$

переводит уравнения (3)...(5) друг в друга.

Заметим следующее: уравнение (2), при указанных выше значениях ν, инвариантно, относительно преобразования T. Кроме того, преобразование [1,2]

$$T^*:(z, u) \to \left(\frac{az+b}{cz+d}; \frac{u}{(cz+d)^2} + \frac{c}{cz+d}\right)$$

оставляет неизменным уравнение (1). Значит, если функция $\varphi(u)$ есть частное решение уравнения (1), то его общее решение имеет вид

$$u(z) = \frac{\varphi(t)}{(cz+d)^2} + \frac{c}{cz+d}, \quad t = \frac{az+b}{cz+d}. \tag{9}$$

Таким образом, справедлива

Теорема 2. Соотношение $\nu x'' = u(z)x$, где $u(z)$ определяется (9), есть общий интеграл уравнения (2).

В заключение отметим очевидный факт: при $k = 0$ уравнения (6)...(8) совпадают с уравнением

$x^3x^{(IV)} - 4x^2x'x''' - 3x^2x''^2 + 12xx'^2x'' - 6x'^4 = 0$.

Литература

1 Сидоревич М. П. Дифференциальные уравнения третьего порядка, разрешимые в классических трансцендентных функциях. Дис. ... канд. ф.-м. н. Брест, 1988.

2 Chazy J. // Acta Math., 1911, №34., P. 317-385.