К МЕТОДУ СЕТОК ДЛЯ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ОБЫКНОВЕННЫХ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ

Б. А. Годунов

Факультет водоснабжения и гидромелиорации, БПИ
Брест, Республика Беларусь

Рассматривается алгоритм приближенного решения краевой задачи для обыкновенного линейного дифференциального уравнения второго порядка; изменения, внесенные в известную схему сведения исходной задачи к разностному аналогу, позволяют отыскивать решение методом последовательных приближений с оператором, обеспечивающим существенную простоту алгоритма, по сравнению с известными.

ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫЕ, ПРИБЛИЖЕНИЯ, СЕТЬ, РАЗНОСТНЫЙ АНАЛОГ, КРАЕВАЯ ЗАДАЧА

Рассмотрим краевую задачу отыскания решения $y(x)$ дифференциального уравнения

$$y'' + p(x)y' + q(x)y = f(x), \qquad (x \in [a,b]), \tag{1}$$

удовлетворяющего граничным условиям

$$y(a) = A, \quad y(b) = B. \tag{2}$$

На отрезке [a,b] рассмотрим сеть с равноотстоящими узлами $x_i\left(i = 0,1,2\ldots n\right)$, $x_0 = a$, $x_n = b$, $x_{i+1} - x_i = h$ для всех i. Решение задачи (1)...(2) на сети заключается в отыскании значений искомого решения ее в узлах сети, то есть $y(x_i)$. Будем считать, что задача (1)...(2) имеет единственное решение.

В [1] предлагается сведение этой задачи к разностному аналогу. При этом, погрешность аппроксимации имеет порядок h^4. Предлагаемый в [1] алгоритм отыскания y_i, близких к $y(x_i)$, требует достаточно сложных построений некоторой матрицы, не позволяющей применить метод последовательных приближений, и последующего решения системы линейных алгебраических уравнений относительно y_i $(i = 0,1,\ldots,n)$ с этой матрицей.

В данной работе при сохранении общей схемы перехода к разностному аналогу предлагается вместо $q(x)y$ писать $0.5q(x_i)(y(x_{i+1})+y(x_{i-1}))$, а не $q(x_i)y(x_i)$, как в [1]. Тогда из равенства, аналогичного (6.6.19) [1], можно найти $y(x_i)$

$$y(x_i)=c_{1i}y(x_{i-1})+c_{2i}y(x_{i+1})+c_{0i},\quad (i=1,2,\dots,n-1), \tag{3}$$

где $c_{1i}=0.25\left(2-p(x_i)h+q(x_i)h^2\right),\ c_{2i}=0.25\left(2+p(x_i)h+q(x_i)h^2\right),$
$c_{0i}=-0.5h^2f\left(x_i\right).$

Пусть, теперь $y_0=A,\ y_n=B,\ y_i$ — приближения к $y(x_i)\ (i=1,2,\dots,n-1)$. Рассмотрим векторы $Y=(A,y_1,y_2,\dots,y_{n-1},B)$ и $d=-0{,}5h^2(0,f\left(x_1\right),f\left(x_2\right),\dots,f\left(x_{n-1}\right),\ 0)$, оператор C, заданный постоянной матрицей

$$C=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ c_{11} & 0 & c_{21} & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & c_{12} & 0 & c_{22} & \dots & 0 & 0 & 0 & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & c_{1,n-2} & 0 & c_{2,n-2} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & c_{1,n-1} & 0 & c_{2,n-2} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \dots & 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Тогда система (3), относительно вектора Y, запишется в виде

$$Y=CY+b \tag{4}$$

Заметим, что матрица C устроена таким образом, что первая и последняя координаты векторов Y и CY совпадают, что позволяет определить последовательные приближения к решению задачи (1)...(2) на сети равенством

$$Y_{k+1}=CY_k+d,\quad (k=0,1,\dots), \tag{5}$$

где в качестве начального приближения следует выбрать вектор $Y_0=(A,y_{10},y_{20},\dots,y_{n-1,0},B)$, с некоторыми начальными приближениями

y_{i0} к $y(x_i)$ $(i = 1,2,\ldots,n-1)$. Такой вид Y_0 и матрицы C обеспечивают выполнение граничных условий у каждой итерации Y_k.

Далее заметим, что за счет выбора малого шага h числа c_{1i} и c_{2i}, при достаточно "хороших" p(x) и q(x) (например, $|p(x)| \le \alpha$, $|q(x)| \le \beta$, $x \in [a,b]$), можно сделать меньше единицы.

Тогда верна

Теорема. Если *h* достаточно мало, то последовательные приближения (5) сходятся к решению системы (3), при любом начальном приближении вида $Y_0 = (A, y_{10}, y_{20}, \ldots, y_{n-1\,0}, B)$, и, тем самым, будут достаточно близки к решению задачи (1)...(2) на сети.

Отметим, что наложение условий на $p(x)$ и $q(x)$ позволяет эффективно выписать границы малости шага сети h.

Кроме того, вид матрицы C позволяет модифицировать метод (5), используя, для отыскания очередной координаты вектора Y_{k+1}, уже найденные с меньшим или большим индексом *i*, что ускоряет процесс сходимости.

Литература

1 Крылов В. И., Бобков В. В., Монастырный П. И. Вычислительные методы высшей математики. Т. 2, Мн.: Выш. шк. 1975.

СВОЙСТВА РЕШЕНИЙ ПЕРВОГО УРАВНЕНИЯ ПЕНЛЕВЕ (P_1)

Н. П. Зизелюк

Факультет водоснабжения и гидромелиорации, БПИ
Брест, Республика Беларусь

Получено двухпараметрическое семейство решений первого уравнения Пенлеве с некоторыми начальными условиями.

УРАВНЕНИЕ, ПАРАМЕТРИЧЕСКОЕ, ПЕНЛЕВЕ

Для P_1
$$w'' = 6w^2 + z\ , \qquad (1)$$

в действительной области, построим двухпараметрическое семейство решений, обладающих некоторым свойством (8). Рассмотрим уравнение