

Struktury danych w realizacji techniki frontальной automatycznej dyskretyzacji

Tadusz Chyży, Andrzej Kazberuk
Mikołaj Syczewski, Rościsław Tribiło

Politechnika Białostocka

Streszczenie

W artykule przedstawiono koncepcję modelu informatycznego odwzorowania brzegu obszaru dwuwymiarowego. Uzyskana dynamiczna struktura danych o budowie pierścieniowej umożliwia zastosowanie jej do opisu przesuwanego się frontu — konstrukcji stosowanej w programach automatycznej generacji siatki metody elementów skończonych.

1 Wstęp

Rozwojowi metody elementów skończonych w rozwiązywaniu złożonych problemów pola towarzyszy zainteresowanie badaniem zagadnień automatycznej dyskretyzacji analizowanego obszaru. Opracowano wiele algorytmów generacji siatki o różnym stopniu automatyzacji procesu. Zwarty przegląd różnorodnych technik zawierają praca W.C.Thacker'a [10] dotycząca lat 1972-79 oraz monografia P.L.George'a [3] z roku 1991.

Wprowadzenie metod adaptacyjnych stanowiło kolejny etap zainteresowania badaczy generatorami siatek. Techniki automatycznej dyskretyzacji początkowej i re-dyskretyzacji stały się integralną częścią algorytmów numerycznej analizy konstrukcji. Zestawienie dorobku w tej dziedzinie zawiera praca P.R.Eisemana [2].

Jednym z najczęściej stosowanych algorytmów w pełni automatycznej dyskretyzacji jest technika frontalna. Front składa się z krawędzi, na których tworzone są elementy trójkątne. Na początku procesu, tworzą go odcinki aproksymujące brzeg obszaru. Przesuwanie frontu polega na konstruowaniu kolejnych elementów. W każdym kroku usuwa się i istniejących krawędzi frontu ($1 \leq i \leq 3$) i dodaje $3 - i$ nowych. Przyjmuje się, że krawędź będąca podstawą tworzonego trójkąta jest najkrótszym lub jednym z najkrótszych odcinków frontu. Na efektywność procesu generacji siatki wpływa konieczność każdorazowego wyboru najkrótszej spośród n

krawędzi frontu. Wyszukiwanie jej optymalizuje się stosując specjalizowane struktury danych - sterty i drzewa czwórkowe - zaproponowane przez R.Löhrnera [8]. Problemem jest także sposób konstrukcji trójkątów, tzn. strategia umieszczania wierzchołka tworzącego nowy element. Rozwiązania tego zagadnienia podają autorzy prac [1, 4, 6].

Technika "postępującego" frontu była pierwotnie metodą triangulacji. Zaproponowana oryginalnie przez S.H.Lo [7], rozwinięta przez J.Peraire [9], ostatnio została zaadoptowana do generacji siatek złożonych z elementów czworobocznych przez J.Z.Zhu i O.C.Zienkiewicza [12].

W pracy przedstawiono ideę realizacji komputerowej struktury frontu umożliwiającej znaczne polepszenie efektywności algorytmu generacji siatki oraz uproszczenie programów wykorzystujących technikę triangulacji frontalnej.

2 Front jako struktura pierścieniowa

Przyjęto, że każdy obszar określa się w sposób jednoznaczny definiując jego brzeg jako zbiór wektorów w przestrzeni dwuwymiarowej, tworzących łamaną zamkniętą. Zatem obszar, który definiowany jest przez podanie dwóch lub więcej rozłącznych zbiorów takich łamanych, rozumiany jest jako obszar wielospójny.

Traktując odcinek łamanej o początku w punkcie i i końcu w punkcie j jako wektor \vec{ij} , przyjmuje się dla tego wektora lokalny prawoskrętny układ współrzędnych kartezjańskich. Początek układu umieszcza się w punkcie i , a lokalną oś x orientuje zgodnie z kierunkiem i zwrotem wektora. Punkty, leżące na dodatniej półosi y , należą do wnętrza obszaru (rys. 1). Założenie to realizuje się, numerując węzły łamanej zewnętrznej przeciwnie do ruchu wskazówek zegara, zaś węzły łamanych wewnętrznych zgodnie z ruchem wskazówek zegara.

Powyższa definicja obejmuje zarówno obiekty z obszarami wewnętrznymi fizycznych pustek, jak i obiekty z wewnętrznymi nieciągłościami.

Obiekty, zbudowane z materiałów o odmiennych charakterystykach, traktuje się jako obszary złożone. Dyskretyzacja może przebiegać tu w oddzielnych fazach. Uzgodnienia wymaga liczba węzłów na krawędziach wewnętrznych.

Przyjmując, że do jednoznacznego określenia obszaru wystarcza zdefiniowanie jego brzegów oraz wskazanie punktów należących do jego wnętrza, należy rozszerzyć definicję brzegu.

Proponuje się rozpatrywać brzeg jako zbiór spójny obiektów o sprecyzowanej charakterystyce kierunkowej. Obiektami takimi mogą być np. wektory nieswobodne, dla których można wskazać punkt przyłożenia, kierunek, zwrot i miarę. Zapewnienie spójności takiego zbioru osiągnąć można porządkując go jako listę liniową jednokierunkową, której elementami byłyby opisywane obiekty. Dla każdego elementu takiej listy możliwe jest wskazanie elementu następnego. Ponieważ siatki generuje się w obszarach ograniczonych i zamkniętych a ich brzegi tworzone są z łamanych zamkniętych, logiczne jest przyjęcie jako modelu brzegu listy pierścieniowej. Podstawowe wiadomości dotyczące struktur danych listowych i pierścieniowych zawarte

są w pracy [11]. Tak zaprojektowany model brzegu pozwala na jednoznaczne zdefiniowanie obszaru jednospójnego.

Na rysunku 1 przedstawiono przykład wykorzystania powyższej definicji. Obszar ograniczony jest łamaną zamkniętą, składającą się z pięciu odcinków prostych. Ciągła numeracja wierzchołków i odcinków umożliwia konstrukcję struktury pierścieniowej. W ten sposób zapewniona jest spójność zbioru punktów tworzących brzeg. Kolejność w numeracji wierzchołków i odcinków przyjęto przeciwną do ruchu wskazówek zegara. Sprawdzenia czy punkt P należy do wnętrza obszaru można dokonać stosując algorytm parzystości lub obliczając sumę kątów pomiędzy półprostymi poprowadzonymi z punktu P przez wierzchołki wielokąta. Rys. 1

Starając się zastosować powyższy opis do definicji obszarów wielospójnych otrzymuje się rozłączny zbiór struktur pierścieniowych. Operacje przeprowadzane na takim zbiorze przestają być oczywiste. Aby odwołać się do krawędzi, należy znać nie tylko jej położenie w konkretnym pierścieniu, ale też i przechowywać informacje, dotyczące położenia samego pierścienia. Niedogodność taka występuje zawsze przy dyskretyzacji obszarów wielospójnych bądź rozłącznych. Można ją wyeliminować, tworząc logiczny pierścień brzegu, obejmujący wszystkie elementy, należące do poszczególnych łamanych brzegowych. Realizacja takiej koncepcji polega na wprowadzeniu dodatkowych (i również jednokierunkowych) powiązań pomiędzy elementami, tworzącymi listy pierścieniowe. Schemat takiego postępowania umieszczono na rys. 2. Rys. 2

Zaproponowana struktura logicznego pierścienia brzegu ma następujące właściwości:

- Elementy struktury tworzą zbiór spójny.
- Jednoznacznie określa wnętrze obszaru.

Logicznie, wytworzenie takiej struktury odpowiada dekompozycji obszaru wielospójnego na jednospójny. W realizacji komputerowej, procedury, obsługujące metodę generacji siatki, analizują i "widzą" jeden cały, spójny brzeg, posługując się odniesieniami do pierścienia logicznego. Informacje o cechach geometrycznych poszczególnych elementów tworzących brzeg i ich wzajemnych zależnościach, np. kątach wierzchołkowych pomiędzy odcinkami łamanej, obliczane są na podstawie danych pierścieni wewnętrznych - "fizycznych" przez procedury warstwy obsługi. Stosowanie takiej struktury zamiast tradycyjnego geometrycznego cięcia daje następujące korzyści:

- nie tworzy się sztucznych krawędzi wewnętrznych,
- jest w pełni automatyczne,
- przy zastosowaniu odpowiednich narzędzi implementacja struktury jest prosta.

3 Operacje podstawowe na strukturze brzegu

Przedstawiony model jest strukturą dynamiczną. Może zatem być użyty do opisu przemieszczającego się frontu krawędzi generowanych elementów. W tym celu należy zdefiniować podstawowe operacje przekształcające strukturę.

Dla ułatwienia opisu przyjęto, że poszczególne elementy składowe struktury pierścieniowej reprezentują odcinki łamanej brzegowej. Ponieważ odcinki te tworzą jednocześnie krawędzie generowanych elementów, pojęcia te są stosowane wymiennie. Ze względu na dynamiczny charakter modelu, bardziej właściwe jest używanie pojęcia front, zamiast brzeg.

Do obsługi powiązań elementów struktury wykorzystywane są następujące operacje:

- dodanie krawędzi,
- usunięcie krawędzi,
- reorganizacja pierścieni "geometrycznych".

Pierwsze dwie operacje zmieniają opisy relacji geometrycznych i logicznych. Trzecia operacja dotyczy tylko związków geometrycznych.

Rozszerzanie struktury frontu ma miejsce na wstępnym etapie konstrukcji modelu brzegu, na podstawie informacji dostarczonych z zewnątrz, oraz podczas generacji elementów.

Włączenie nowej krawędzi polega na utworzeniu nowego elementu, zawierającego jej opis i zmianie powiązań w istniejącej strukturze pierścienia frontu. Do wykonania takiej operacji niezbędna jest znajomość położenia w modelu elementu reprezentującego krawędź bezpośrednio poprzedzającą krawędź wstawianą. Oznaczając element poprzedzający jako i a nową krawędź jako j , dodanie elementu polega na wytworzeniu w opisie elementu j wskazań na element $i + 1$ jako następny i zamianie w opisie elementu i wskazania jako elementu następnego $i + 1$ na wskazanie na element j . Wymienione zmiany wskazań dokonywane są w sposób identyczny na logicznych i geometrycznych powiązaniach pierścienia.

Usunięcie elementu opisującego krawędź frontu ma miejsce jedynie podczas generacji elementów. Kryteria doboru kąta oraz długości krawędzi tworzących boki trójkąta zależą od konkretnej metody generacji siatki. Z uwagi na jednokierunkowy charakter listy pierścieniowej, w każdym elemencie tej listy przechowywane są informacje dotyczące powiązań jedynie z elementem następnym. Stąd wygodniej jest żądać usunięcia elementu następnego, tzn. $i + 1$ nie zaś i . Usunięcie elementu i wymagałoby modyfikacji opisu elementu $i - 1$ jako poprzedzającego. Wyznaczenie pozycji tego elementu możliwe byłoby jedynie po analizie całego pierścienia bądź zmianie modelu listy na dwukierunkową, co nie jest efektywne.

Żądanie usunięcia elementu $i + 1$ tj. następnego po aktualnie przetwarzanym elemencie i oznacza wskazanie w elemencie i elementu $i + 2$ jako następnego i usunięcie zbędnego opisu $i + 1$. Zmiany wskazań dotyczą pierścienia "logicznego" i "geometrycznego".

W trakcie przeprowadzania działań rozszerzenia i usunięcia krawędzi frontu aktualniana jest także całkowita liczba aktywnych jego krawędzi.

Konieczność zmiany organizacji wewnętrznych pierścieni odwzorowujących geometryczne powiązania krawędzi łamanej frontu następuje wówczas, gdy w trakcie generowania elementów, linie frontu przecinają się. Problem ten występuje zawsze w generacji siatki w obszarze niejednostopnym, jak i w przypadku obszarów jednostopnych niewypukłych. Działania na interesującym fragmencie struktury wyjaśniono na rys. 3 a) do c). Rysunek a) przedstawia sytuację wyjściową - dwa fragmenty łamanej frontu i odpowiadające im reprezentacje (po stronie prawej). Linia przerywaną zaznaczono projektowane położenie generowanego elementu trójkątnego. W obrębie łamanej dolnej następuje przemieszczenie jednej i dodanie nowej krawędzi tak, by front objął projektowany element (rys. 3 b)). Połączenie łamanych następuje w wierzchołku i jest to ich jedyny punkt wspólny. Odcinki reprezentowane w strukturze pierścieniowej należą do dwóch rozłącznych zbiorów. Tworzą się nowe wskazania w obrębie pierścieni geometrycznych odpowiadające zmienionej geometrii frontu (rys. 3 c)). Powiązania logiczne, utrzymujące spójność całego zbioru odcinków brzegu, nie ulegają zmianie.

Rys. 3

4 Realizacja komputerowa

Wszystkie struktury danych i procedury napisano w języku C [5] i uruchomiono na komputerze klasy PC, pracującym pod kontrolą systemu operacyjnego SCO UNIX.

Przyjęto dwa podstawowe typy danych opisujące punkt i wektor w przestrzeni dwuwymiarowej. Typy te używane są jako prymitywy do konstrukcji struktur złożonych oraz jako typy zmiennych roboczych.

```
typedef struct
{ double x, y; } POINT;
```

```
typedef struct
{ double x, y; } VECTOR;
```

Współrzędne wszystkich węzłów składowane są w postaci dynamicznej listy liniowej. Oprócz wyszczególnienia współrzędnych, opis zawiera numer porządkowy węzła. Uszeregowanie elementów w listę składającą się z elementów jednakowego typu umożliwia deklaracja rekurencyjna.

```
typedef struct t_coord /* wezel, */
{ POINT coord; /* - współrzędne globalne wezla,*/
int ipoin; /* - numer wezla. */
struct t_coord *succ;
} NGDE;
```

W identyczny sposób rozwiązano budowę listy elementów. Struktura zawiera odwołania do powyżej opisanej listy węzłów, numer i wskazanie na element następny na liście.

```
typedef struct t_elem
{ NODE          *i, *j, *k; /* - wezly elementu      */
  int           ielem;     /* - numer elementu      */
  struct t_elem *succ;
} ELEMENT;
```

Dodanie nowego elementu do opisywanych list odbywa się na zasadzie obsługi stosu. W zmiennych globalnych zapamiętuje się położenie ostatniego (tzn. najnowszego) elementu listy i tylko ten zapis podlega uaktualnieniu. Wydruk całego wykazu odbywa się w odwrotnej kolejności. Pierwszy wprowadzony opis węzła znajdzie się na pozycji ostatniej.

Element listy pierścieniowej tworzy następująca struktura danych:

```
typedef struct t_edge          /* krawedz pierścienia frontu */
{ NODE          *i, *j;      /* - współrzędne wezlow krawedzi*/

  VECTOR        n;          /* - współ. wektora normalnego, */
  double        d;          /* - długość,                    */
  double        a;          /* - kat przy wierzchołku j,     */
  int           m;          /* - znacznik używany m.in przez*/
                    .       /* proc. rin_analysis(), okre-*/
                    .       /* ślający aktualność paramet-*/
                    .       /* row n,d,a.                    */
                    .       /* = 0 - parametry mają war-    */
                    .       /* tości nieokreślone          */
  int           t;          /* - parametr klasyfikujący kat */
                    .       /* przy wierzchołku "j"        */

  struct t_edge *succ;      /* następny element lamanej     */
  struct t_edge *frnt;      /* następny element frontu      */
} EDGE;
```

Składowe tej struktury można podzielić na trzy grupy:

- kierunkowo uporządkowane odwołania do listy węzłów tworzących krawędź wielokąta brzegu,
- lista zmiennych pomocniczych, używanych przez różne procedury obsługi, wyznaczające długość krawędzi, kąty pomiędzy sąsiadującymi odcinkami, znaczniki procedur,

- wskazania na elementy następne
 - w łańcuchu łamanej frontu - tworzące pierścień zależności geometrycznych,
 - w logicznym, jednospójnym zbiorze krawędzi frontu.

Przekształcenie zaprezentowanej rekurencyjnej listy liniowej w pierścień następuje w procesie wprowadzania danych opisujących brzeg obszaru. Wczytanie pierwszego odcinka powoduje przydział pamięci dla struktury, odnotowanie w zmiennych globalnych jej adresu i ustawienie wskazań na nią samą jako, elementu następnego. Pozostałe odcinki zapamiętywane są na zasadzie rozszerzania już istniejącej struktury pierścieniowej.

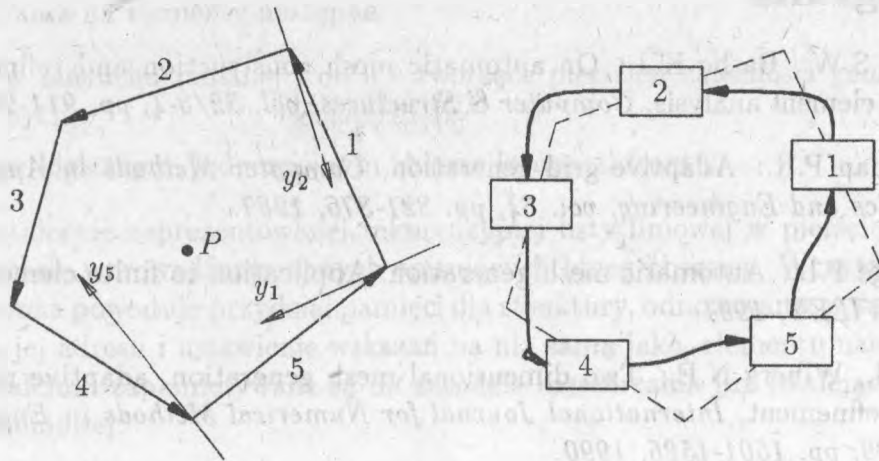
5 Wnioski

Przedstawiona struktura danych ma następujące właściwości:

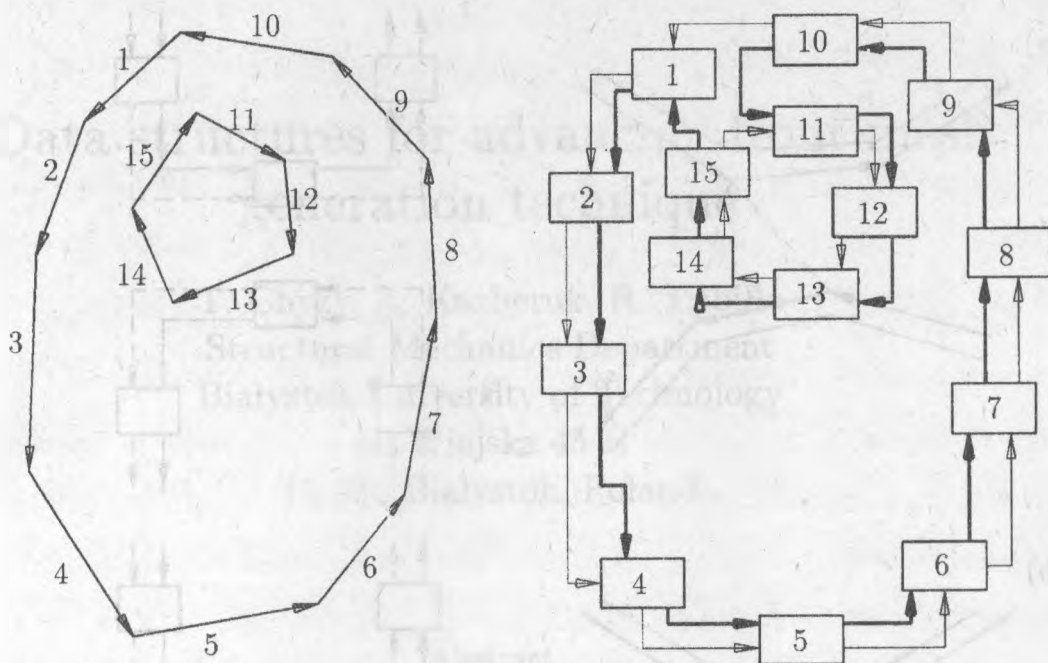
- Ujednocila formułę brzegu obszaru
 - uwzględnia jego specyfikę, tzn. fakt, że brzeg tworzą wzajemnie rozłączne zbiory spójne,
 - zawiera jednoznaczne informacje o wszystkich elementach brzegu, umożliwiające realizację procedur generacji węzłów i elementów,
 - umożliwia łatwą automodyfikację wówczas, gdy algorytmy generacji wykorzystują techniki frontalne.
- Zapewnia sprawny i niezależny od stosowanej techniki generacji algorytm wyszukiwania przecinających się krawędzi.
- Umożliwia uogólnienie jej na opisy obiektów trójwymiarowych.

Bibliografia

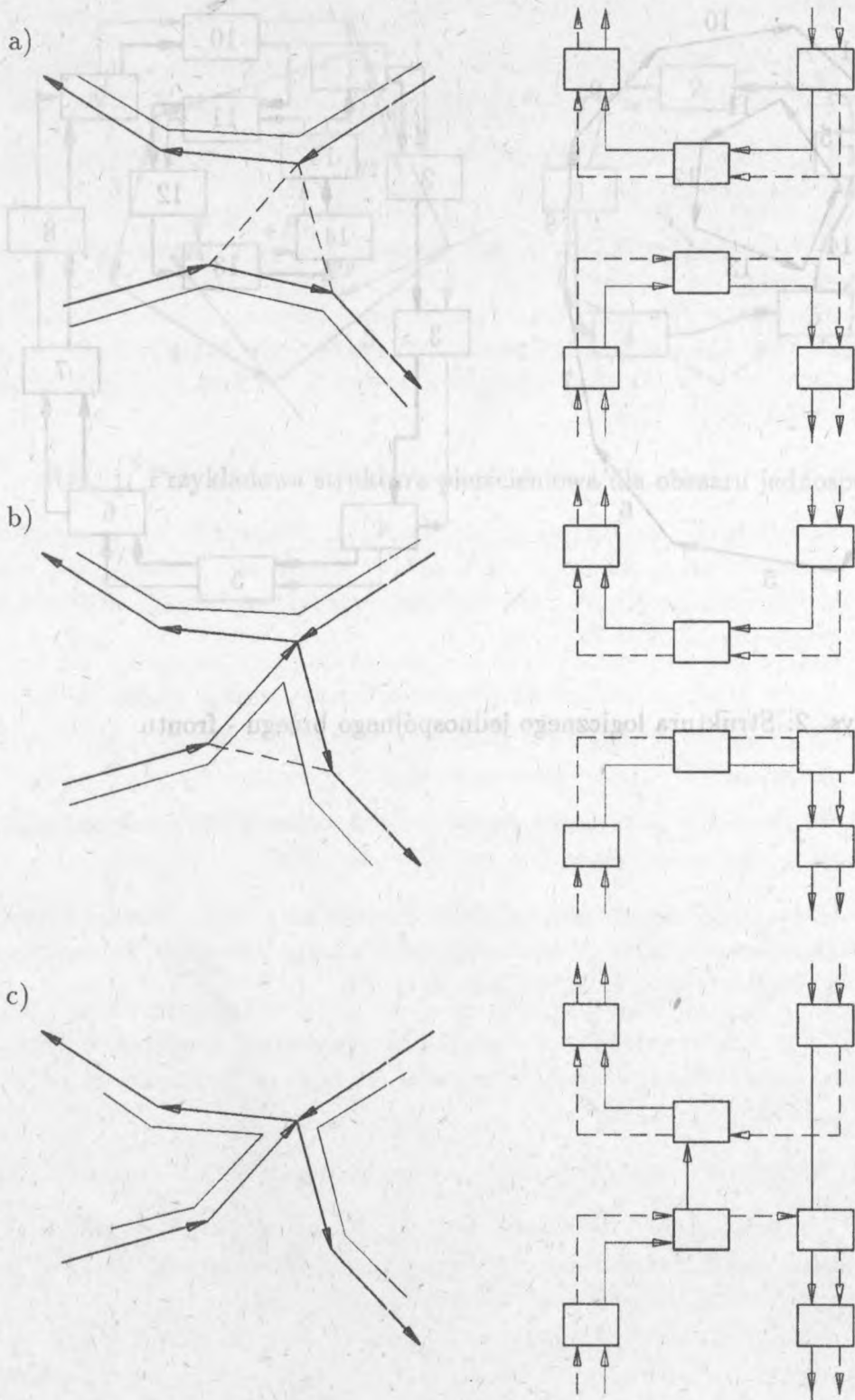
- [1] Chae S.W., Bathe K.J.: On automatic mesh construction and refinement in finite element analysis, *Computer & Structures*, vol. 32/3-4, pp. 911-936, 1989.
- [2] Eiseman P.R.: Adaptive grid generation, *Computer Methods in Applied Mechanics and Engineering*, vol. 64, pp. 321-376, 1987.
- [3] George P.L.: Automatic mesh generation. Application to finite element methods, *VILEY*, 1991.
- [4] Jin H., Wiberg N.E.: Two dimensional mesh generation, adaptive remeshing and refinement, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 29, pp. 1501-1526, 1990
- [5] Kernighan B.W., Ritchie D.M.: Język C, *WNT, Warszawa*, 1988.
- [6] Lewis R.W., Huang H.C., Usmani A.S., Cross J.T.: Finite element analysis of heat transfer and flow problems using adaptive remeshing including applications to solidification problems, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, 767-781, 1991.
- [7] Lo S.H.: A new mesh generation scheme for arbitrary planar domains, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 21, 1403-1426, 1985.
- [8] Löhner R.: Some useful data structures for the generation of unstructured grids, *Comm. appl. numer. methods*, vol. 4, pp. 123-135, 1988.
- [9] Peraire J., Peiro J., Formaggia L., Morgan K., Zienkiewicz O.C.: Finite element Euler computations in three dimensions, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 26, 2135-2159, 1988.
- [10] Thacker W.C.: A brief review of techniques for generating irregular computational grids, *International Journal Numerical Methods in Engineering*, vol.15, 1335-1341, 1980.
- [11] Wirth N.: Algorytmy + struktury danych = programy, *WNT, Warszawa* 1989.
- [12] Zhu J.Z., Zienkiewicz O.C., Hinton E., Wu J.: A new approach to the development of automatic quadrilateral mesh generation, *International Journal for Numerical Methods in Engineering*, vol. 32, 849-866, 1991.



Rys. 1: Przykładowa struktura pierścieniowa dla obszaru jednopójnego



Rys. 2: Struktura logicznego jednospójnego brzegu - frontu



Rys. 3: Zmiany w powiązaniach pierścieni spowodowane przecinaniem się łamanych frontu

Data structures for advancing front mesh generation technique

T. Chyży, A. Kazberuk, R. Tribiło
Structural Mechanics Department
Białystok University of Technology
ul. Wiejska 45 E
15-351 Białystok, Poland

Abstract

The computer model of the description of the boundaries of twodimensional area is presented in this paper. Obtained dynamic, ring-like data structure is proposed to implement advancing front — the structure often used in automatic finite element generation programs.