ных расчетов анизотропии концентрирования энергии, переносимой акустическими волнами в материале активной среды. Такого рода взаимосвязь между элементами технической и фундаментальной физики, очевидная на современном этапе, и в дальнейшем будет усиливаться. Эта тенденция, как видно из выше изложенного примера, стимулирует необходимость сочетания технической подготовки будущих инженеров, исследователей с подготовкой фундаментальной, свойственной, как правило, университетам. Естественный выход в реализации подобного рода задач лежит на пути создания технических университетов—симбиозов технических и фундаментальных знаний. Можно полагать, что и проводимая конференция вносит определенный вклад в решение этой проблемы.

**Литература**

1. М.М.Зверев, А.В.Кутковой, В.К.Якушин. Квантовая электроника, 1996, т. 23, N 4, с. 295-298.

2. В.В.Зубрицкий. В кн.: Труды III конф. по лазерной физике и спектроскопии. - Минск: ИФ НАНБ, 1997. -с. 267-269.

3. B.Taylor, H.J.Maris, C.Elbaum. Phys. Rev. B, 1971, vol. 3, no. 4, p. 1462-1472, J.P.Wolfe. Physics Today, 1995, vol. 48, no. 9, p. 34-40.

4. В.В.Зубрицкий. ФТТ, 1996, т. 38, N 1, с. 56-62.

5. Ф.И.Федоров. Теория упругих волн в кристаллах.-М.: Наука, 1965. —387 с.

## УЧЕТ ПОПРАВКИ НА СДВИГ ПРИ РАСЧЕТЕ ЧАСТОТ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЙ

*Холодарь Б.Г.*

*Брестский политехнический институт*

Расчет собственных частот поперечных колебаний валов, критических частот вращения роторов турбин с расположенными на них дисками является одним из наиболее ответственных моментов их проектирования.

Эти расчеты базируются на технической теории изгиба стержней, которая для участка стержня одинакового сечения дает уравнение [1]:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}+\rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}=0$$

где $E$ - модуль упругости материала стержня, $\rho$-его плотность, $J, F$ - момент инерции и площадь поперечного сечения, $y$ - прогиб стержня, $x$ - продольная координата сечения стержня, $t$ - время.

Уточнение расчетов может быть произведено путем учета влияния деформаций сдвига и инерции вращения сечений стержня, что приводит к более сложному уравнению (уравнение С.П.Тимошенко) [1,2]:

$$EJ\frac{\partial^4 y}{\partial x^4}-\rho J(1+\frac{E}{\kappa G})\frac{\partial^4 y}{\partial x^2\partial t^2}+\rho F\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}+\frac{\rho^2 J}{\kappa G}\frac{\partial^4 y}{\partial t^4}=0$$

где $G$ - модуль сдвига, $\kappa$ - коэффициент формы сечения, зависящий от характера распределения сдвигов по сечению и способа определения среднего значения для угла сдвига . Далее $\kappa$ определено по формуле

$$1/\kappa=\frac{F}{J^2}\int_F\left(\frac{S}{b}\right)^2 dF,$$

где $S=S(z)$ и $b=b(z)$ - соответственно статический момент и ширина сечения на высоте $z$ над нейтральной линией.

Частота поперечных колебаний, даваемая уточненой теорией, приближенно может быть представлена как [2]

$$p_m=p_{0m}\left(1-0.5\frac{\pi r^2}{\lambda_m^2}\left(1+\frac{E}{\kappa G}\right)\right) \qquad m=1,2,3,...$$

где $p_0$ - частота, найденная по технической теории, $r^2=J/F$ - радиус инерции сечения, $\lambda_m=l/m$ - длина полуволны. Из формулы видно, что поправка к расчету по технической теории на первых частотах невелика, но быстро нарастает с уменьшением длины волны, поэтому для валов роторов, где междисковые промежутки по длине вала невелики, ее учет становится необходимым. В большей степени это сказывается на полых валах, где роль касательных напряжений в деформированном состоянии материала более значительна. Роль поправки возрастает также для многоопорных валов.

На рис.1 показана разность логарифмов частот, определенных для шарнирно-опертого и консольного стержней по технической теории и по уточненной теории при $\kappa=0.9$ (сплошной вал) и $\kappa=0.67$ (для вала с отношением диаметров $u=d_{внутр}/d_{наруж}=0.9$. Для шарнирного крепления построенные кривые относятся к стержням любой длины, для консольных разной длины точки не ложатся на общую кривую (здесь построение относится к стержню длиной 1000 мм с наружным диаметром 100 мм и внутренним 90 мм).

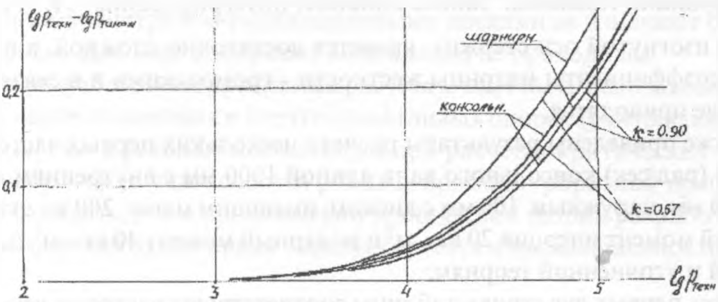


Рис.1

Особый интерес представляет рассмотрение вопроса для валов, несущих диски, так как здесь картина поперечных колебаний осложняется наличием гироскопических эффектов дисков.

Расчет частот колебаний валов переменного сечения при наличии нескольких опор выполняется обычно методом начальных параметров, который сводит задачу к перемножению матриц и определению корней характеристического многочлена. На каждом участке вала матрицы записываются в виде произведения матрицы концевых сосредоточенных нагрузок M и матрицы жесткости C, имеющих размеры 4*4.

Матрица M учитывает массово-инерционные характеристики дисков и жесткости податливых опор на конце участка. Если вал рассматривать как невесомый, учитывая его вес в весе дисков, то отличие от задачи, построенной на использовании технической теории, сводится к изменению коэффициентов $C_{14}$ и $C_{24}$ матрицы жесткости C. В случае же, когда вес вала принимается распределенным по длине стержня, изменяются все коэффициенты матрицы C. При этом задача существенно усложняется, так как в отличие от технической теории, где все члены матрицы C выражаются через функции Крылова, в данном случае характеристическое уравнение для участка стержня имеет два корня $(\alpha \text{ и } \beta)$, и поэтому форма прогиба описывается двухчастотной функцией вида

$$y = A_1 ch(\alpha x) + A_2 sh(\alpha x) + A_3 \cos(\beta x) + A_4 \sin(\beta x),$$

которая уже не обладают теми свойствами, что составляют достоинства функций Крылова. Запись констант интегрирования $A_1$ - $A_4$ уравнения изогнутой оси стержня является достаточно сложной, а получаемые коэффициенты матрицы жесткости - громоздкими и в связи с этим здесь не приводятся.

Ниже приведены результаты расчета нескольких первых частот колебаний (рад/сек) консольного вала длиной 1000 мм с внутренним диаметром 90 мм, наружным 100 мм с диском, имеющим массу 200 кг, экваториальный момент инерции 20 кг • м$^2$ и полярный момент 40 кг • м$^2$ по технической и уточненной теориям:

Здесь первых две строки таблицы соответствуют частотам невесомого

| Собственные частоты | Критические частоты (прямая прецессия) | Критические частоты (обратная прецессия) |
|---|---|---|
| 63.92 / | 79.84 / | 53.44 / |
| 289.30 / | ---- | 199.77 / |
| | | |
| 63.58 / 63.60 | 79.15 / 79.18 | 53.26 / 53.27 |
| 289.95 / 286.90 | ---- | 198.14 / 98.15 |
| 3838.15 / 3740.94 | 3820.57 / 3723.35 | 3832.27 / 735.05 |
| 10526.57 / 9642.87 | 10520.16 / 9636.42 | 10524.42 / 9640.72 |
| 20612.73 / 17437.75 | 20609.46 / 17434.40 | 20611.64 / 17436.64 |
| 34059.33 / 26381.80 | 34057.35 / 26379.71 | 34058.67 / 26381.10 |
| 50868.21 / 36015.23 | 50866.89 / 36013.78 | 50867.77 / 36014.74 |

вала, найденные по технической теории. На следующих строках приведены данные для вала с плотностью 7800 кг/м$^3$, причем первым числом идет полученное по технической теории, а через знак разделителя - по уточненной.

По результатам расчета можно сделать следующие выводы:

1) В критических режимах как техническая, так и уточненная теории

всегда дают частоты, соответствующие формам колебаний стержня, ниже, чем соответствующие собственные;

2) Уточненная теория во всех рассмотренных режимах по сравнению с технической теорией понижает частоты, соответствующие стержневым формам колебаний (причем это понижение следует графикам на рис.1) и практически не изменяет дисковые частоты, несколько их повышая.

Расчеты и анализ, проведенные для шарнирно-опертого вала с двумя и четырьмя симметрично-расположенными дисками не изменяют сделанные выводы. Для многоопорного вала анализ не проводился.

Сама разработанная программа расчета может быть использована для расчета валов на жестких и упруго-податливых опорах (учитываются как линейные, так и угловые жесткости), а при расчетах критических частот вращения роторов учитываются режимы прямой и обратной прецессии. Можно отметить, что в приближении технической теории разработанная программа в настоящее время эксплуатируется в промышленности.

**Литература**

1. Вибрации в технике. Справочник в 6-и томах. Т.1. Колебания линейных систем. Под ред. В.В.Болотина. М.: Машиностроение, 1978, -352с.

2. С.П.Тимошенко. Колебания в инженерном деле. М.: Наука, 1967, -444с.

## РЕШЕНИЕ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ НА ОСНОВЕ МЕТОДОВ АНАЛИТИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

*Крушевский А.Е., Кондратюк В.Ф., Севенюк А.З.*
*Брестский политехнический институт*

В статье на основе методов аналитической механики строится решение задачи о равновесии упругого прямоугольника, упругого конечного цилиндра при заданных на контуре и поверхности напряжениях.

Краевые условия рассматриваются как уравнения связей, решаемых совместно с вариационными уравнениями, согласно принципа Лагранжа.

В качестве примеров в точной постановке рассмотрены: 1) сжатие упругого квадрата двумя сосредоточенными силами; 2) сжатие упругого конечного цилиндра двумя сосредоточенными силами, действующего вдоль оси цилиндра; 3) вращение упругого конечного цилиндра с посто-