

**ПРЕДПОСЫЛКИ ДИНАМИЧЕСКОГО РАСЧЕТА ТОНКИХ  
ОБОЛОЧЕК НА ПРОИЗВОЛЬНОМ КОНТУРЕ**

Брикса В. П.

Брестский политехнический институт

В [1] изложена методика и алгоритм расчета собственных колебаний тонких оболочек на прямоугольном контуре. В основу расчета положен метод Бубнова-Галеркина с выбором системы координатных функций, аппроксимирующих контактное давление, в виде произведения тригонометрических функций

$$f_{ij}(x, y) = \sin \frac{i\pi x}{a} \sin \frac{j\pi y}{b} \quad (1)$$

где  $x, y$  - координаты;  $a, b$  - размеры контура оболочки.

Для оболочек на произвольном контуре основные трудности реализации вариационных принципов связаны именно с выбором системы координатных функций, отвечающих условиям полноты и ортогональности. Ниже предлагается один из возможных способов построения ортогональной системы функций для реализации вариационных принципов при расчете тонких оболочек на произвольном контуре.

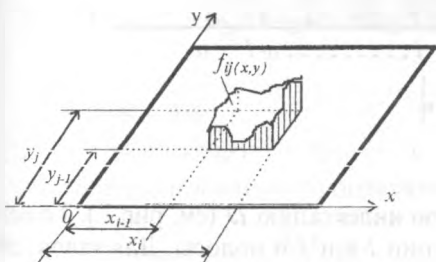


Рис. 1.

Предлагается в качестве функций, аппроксимирующих перемещение оболочки, принимать фи-

нитные функции  $f_{ij}(x, y)$ , подчиняющиеся условиям

$$f_{ij}(x, y) = \begin{cases} 0, & \text{при } x_{i-1} > x > x_i, \quad y_{j-1} > y > y_j; \\ f_{ij}(x, y), & \text{при } x_{i-1} \leq x \leq x_i, \quad y_{j-1} \leq y \leq y_j. \end{cases} \quad (2)$$

Схематический вид функции  $f_{ij}(x, y)$  для двумерных задач представлен на рис. 1.

Рассмотрим плоскость  $xoy$  (рис.2). При этом сделаем некоторые

уточнения, касающиеся нумерации координатных финитных функций.

Разобьем плоскость прямоугольной сеткой на  $n$  частей вдоль  $x$  и  $m$  частей вдоль  $y$ . Узлы сетки, попадающие на оси пронумеруем  $0, 1, 2, \dots$ ; отрезки, отсекаемые сеткой на осях также пронумеруем  $I, II, \dots$ . Таким образом, прямоугольная область разбита на прямоугольные элементы.

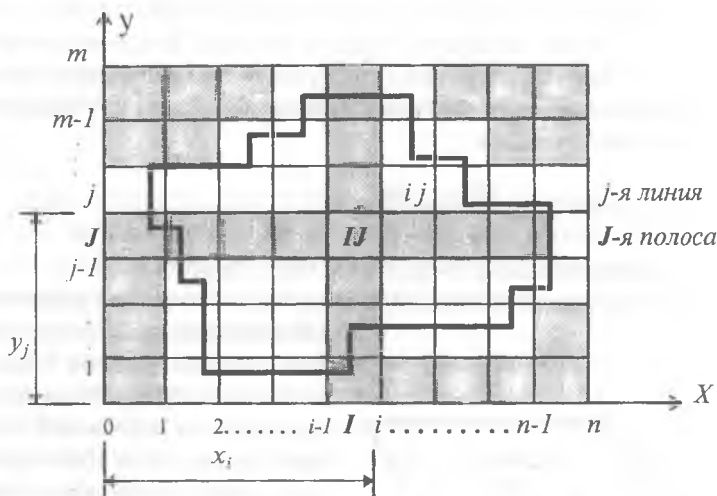


Рис. 2.

Для этих элементов примем двойную индексацию  $IJ$  (см. рис.2.). То есть  $IJ$ -й элемент находится на пересечении  $I$ -й и  $J$ -й полосы. Для узлов, образованных сеткой, также примем двойную индексацию  $ij$  (рис.2). То есть  $i$ -й узел находится на пересечении  $i$ -й и  $j$ -й линий.

На каждом элементе  $IJ$  задаем финитную функцию вида

$$f_{ij}(x, y) = (a_{1ij}x^2 + b_{1ij}x + c_{1ij})y^2 + (a_{2ij}x^2 + b_{2ij}x + c_{2ij})y + (a_{3ij}x^2 + b_{3ij}x + c_{3ij}). \quad (3)$$

Для функций  $f_{ij}(x, y)$  потребуем выполнения условий:

$$f_{ij}(x_i, y) = f_{(i+1)j}(x_i, y); \quad \frac{\partial}{\partial x} f_{ij}(x_i, y) = \frac{\partial}{\partial x} f_{(i+1)j}(x_i, y); \quad (4)$$

$$f_{ij}(x, y_j) = f_{i(j+1)}(x, y_j); \quad \frac{\partial}{\partial y} f_{ij}(x, y_j) = \frac{\partial}{\partial y} f_{i(j+1)}(x, y_j). \quad (5)$$

То есть при переходе через границы элементов должны совпадать зна-

чения и первые производные функций  $f_{ij}(x, y)$ ,  $f_{(i+1)j}(x, y)$  и  $f_{i(j+1)}(x, y)$ .

Покажем, что в случае задания  $f_{ij}(x, y)$  в форме (3), условия (4) и (5) позволяют получить для каждой области  $IJ$  8 соотношений между коэффициентами  $a_{1ij}$ ,  $b_{1ij}$ , ...,  $c_{3ij}$  ( $i=1, 2, \dots, n$ ;  $j=1, 2, \dots, m$ ), т.е. все  $b_{1ij}$ ,  $c_{1ij}$ , ...,  $c_{3ij}$  выразить через  $a_{1ij}$ .

Действительно, используя (4), получаем соотношения

$$c_{lij} = c_{l1j} - \sum_{k=1}^{i-1} x_k^2 (a_{lkj} - a_{l(k+1)j}); \quad b_{lij} = b_{l1j} + 2 \sum_{k=1}^{i-1} x_k (a_{lkj} - a_{l(k+1)j}); \quad (6)$$

$$l = 1, 2, 3; \quad i = 1, 2, \dots, n.$$

Используя граничные условия  $f_{1j}(x_0, y) = 0$ ;  $f_{nj}(x_n, y) = 0$  (7)

и соотношения (6),  $b_{lij}$  и  $c_{lij}$  можно выразить через  $a_{ij}$  ( $l=1, 2, 3$ ;  $i=1, 2, \dots, n$ ).

Таким образом, все  $b_{lij}$ ,  $c_{lij}$  ( $l=1, 2, 3$ ;  $i=1, 2, \dots, n$ ) выражаются через  $a_{ij}$  ( $l=1, 2, 3$ ;  $i=1, 2, \dots, n$ ).

Перепишем (3) в виде

$$f_{ij}(x, y) = (a_{1ij}y^2 + a_{2ij}y + a_{3ij})x^2 + (b_{1ij}y^2 + b_{2ij}y + b_{3ij})x + (c_{1ij}y^2 + c_{2ij}y + c_{3ij}). \quad (8)$$

Учитывая, что

$$b_{lij} = b_{lij}(a_{i1j}, a_{i2j}, \dots, a_{inj}), \quad c_{lij} = c_{lij}(a_{i1j}, a_{i2j}, \dots, a_{inj}),$$

после использования (5) получаем соотношения

$$a_{3ij} = a_{3i1} - \sum_{k=1}^{j-1} y_k^2 (a_{ik} - a_{i(k+1)});$$

$$a_{2ij} = a_{2i1} + 2 \sum_{k=1}^{j-1} y_k (a_{ik} - a_{i(k+1)}) \quad (9)$$

$$j = 1, 2, \dots, m.$$

Условия на границах  $f_{ij}(x, y_0) = 0$ ;  $f_{ij}(x, y_m) = 0$ , (10)

а также (9) при  $j=m$  позволяют выразить  $a_{2i1}$  и  $a_{3i1}$  через  $a_{ij}$  ( $j=1, 2, \dots, m$ ).

Таким образом, после использования соотношений (4), (5), граничных условий (7) и (10) в разложениях (3) или (8) независимыми коэффици-

ентами будут только  $a_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ;  $j=1,2,\dots,m$ ), то есть количество неизвестных равно количеству задаваемых финитных функций  $f_{ij}(x,y)$ .

Дифференциальные уравнения свободных колебаний гибких оболочек

$$L_{yn}[w(x,y,t)] + L_{ин}[w(x,y,t)] = 0 \quad (11)$$

решается одним из вариационных методов. В частности, используя метод Бубнова-Галеркина имеем

$$w(x,y) = \sum_{i=1}^n \sum_{j=1}^m f_{ij}(x,y), \quad \text{и}$$

$$\int_{x_{i-1}}^{x_i} \int_{y_{j-1}}^{y_j} [L_{yn}\{f_{ij}(x,y,t)\} + L_{ин}\{f_{ij}(x,y,t)\}] dx dy = 0 \quad (12)$$

$i=1,2,\dots,n; \quad j=1,2,\dots,m.$

В (11) обозначено:  $L_{yn}$  - дифференциальный оператор 2-го порядка, описывающий упругие силы;  $L_{ин}$  - дифференциальный оператор инерционных сил;  $w(x,y,t)$  - функция перемещений.

Уравнения (12) представляют собой систему однородных линейных алгебраических уравнений относительно  $a_{ij}$  ( $i=1,2,\dots,n$ ;  $j=1,2,\dots,m$ ). Таким образом, задача о свободных колебаниях тонких безмоментных оболочек в принципе решена.

Сделаем замечание о преимуществах аппроксимации перемещений финитными функциями перед аппроксимацией (1). Выше (рис.2) показана прямоугольная область, на которой задаются финитные аппроксимирующие функции, но область, занятая конструкцией, может быть любой. Главное, чтобы проекция контура конструкции попадала в указанную прямоугольную область (см.рис.3).

При этом все рассуждения, сделанные выше, остаются в силе, но при записи соотношений вида (6), (9) необходимо положить  $a_{ij}$ ,  $b_{ij}$  и  $c_{ij}$  на заштрихованных на рис.2 областях, не попадающих внутрь контура конструкции, равными нулю, тогда

$$c_{lij} = c_{li} \sigma_j - \sum_{k=i_0}^{i-1} x_k^2 (a_{lkj} - a_{l(k+1)j}); \quad b_{lij} = b_{li} \sigma_j + 2 \sum_{k=i_0}^{i-1} x_k (a_{lkj} - a_{l(k+1)j}); \quad (13)$$

$l=1,2,3; \quad i_0 = i_0, i_0 + 1, \dots, i_n$

$$a_{3ij} = a_{3ij_0} - \sum_{k=j_0}^{j-1} y_k^2 (a_{ik} - a_{i(k+1)}); \quad (14)$$

$$a_{2ij} = a_{2ij_0} + 2 \sum_{k=j_0}^{j-1} y_k (a_{ik} - a_{i(k+1)}),$$

$$j = j_0, j_0 + 1, \dots, j_m.$$

$z \{ i, i_r, j, j_m \}$  индексы элементов, через которые проходит проекция контура конструкции.

Граничные условия типа (7), (10) записываются соответственно для элементов, через которые проходит проекция контура конструкции.

Таким образом, предложенный выше подход позволит производить расчет тонких безмоментных оболочек с произвольным контуром.

### Литература

1. Попов Н.А., Брикса В.П. Численное определение динамических характеристик мембранных конструкций. - Динамика сооружений: Сб. научных трудов. - М.: ЦНИИСК, 1990.

## МОДЕЛИРОВАНИЕ ВОЛОКНИСТОЙ СТРУКТУРЫ И ТЕЧЕНИЯ НЕЛИНЕЙНО-ВЯЗКОЙ ЖИДКОСТИ ЧЕРЕЗ НЕЕ

*В.П. Ставров<sup>а</sup>, О.А. Кравченко<sup>б</sup>, В.М. Ткачев<sup>б</sup>, А.И. Столяров<sup>б</sup>*

*<sup>а</sup>Белорусский государственный технологический университет*

*<sup>б</sup>Гомельский политехнический институт им. П.О. Сухого*

В последние годы значительно возрос интерес к исследованию прочности волокнистых систем для высоковязких неньютоновских жидкостей в связи развитием одного из видов т.н. «высоких» технологий - процессов получения высокопрочных композитных материалов и изделий из них. Наиболее перспективные матричные материалы - термопластичные полимеры имеют в состоянии расплава очень высокую вязкость (на 2-4 порядка превышающую вязкость традиционных связующих на основе растворов термореактивных полимеров), существенно зависящую от скоростей сдвига. Многие известные результаты [1,2], полученные в