

## 2 ПРИКЛАДНАЯ МЕХАНИКА

### К ВОПРОСУ О ВЫБОРЕ АППРОКСИМИРУЮЩИХ ФУНКЦИЙ ДЛЯ НЕЛИНЕЙНЫХ КОНЕЧНЫХ ЭЛЕМЕНТОВ В ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ

*Холодарь Б. Г., Найчук А. Я.  
Брестский политехнический институт*

В случае, когда рассматривается задача о теле, содержащем трещины, обычно используют нелинейные конечные элементы (КЭ), включающие шесть (треугольник) или восемь (четыреугольник) и более узловых точек. Сравнительно с линейными элементами это позволяет улучшить аппроксимацию напряженно-деформированного состояния, увеличить размеры самих элементов, описать криволинейные границы тела или берегов самих трещин.

На практике наиболее широкое применение получили так называемые изопараметрические КЭ, для которых аппроксимация геометрической формы элемента (его отображение на стандартный симплекс-элемент (СЭ)) выполняется с помощью функций, которые используются и для аппроксимации физических полей в элементе. Рассматриваются также суб- и суперпараметрические элементы. Наиболее целесообразным является увеличение точности внутренней аппроксимации (например, увеличивая порядок полиномов для аппроксимации физических полей), что приводит, однако, к усложнению вычислительных процедур и с этой точки зрения требует согласования используемого метода с конкретным типом рассматриваемой задачи на основании имеющегося опыта и рекомендаций [1,2,3].

В частности, использование изопараметрических квадратических элементов является корректным и для столь сложной задачи, какой является задача о вычислении коэффициентов интенсивности напряжений для тел с трещинами. При этом, правда, размеры элементов, непосредственно прилегающих к вершине трещины, должны быть достаточно малыми по сравнению с ее длиной [2], что объясняется наличием в вершине трещины особенности для поля напряжений вида  $\sqrt{1/r}$  (здесь  $r$  - расстояние

от вершины трещины). Одним из способов учета этой особенности является использование сингулярных КЭ, у которых два примыкающих к вершине трещины (сингулярной точке) промежуточных узла располагаются на расстоянии одной четверти длины ребра соответствующего СЭ.

Построение аппроксимирующих функций является неоднозначным даже при использовании полиномов одного порядка. "Гашение" соответствующих степеней свободы производится за счет наложения ограничений в выбранных некоторым образом внутренних точках области отображающего СЭ. Поэтому вдоль границ смежных КЭ сохраняется требуемая  $C^0$ -гладкость аппроксимации. Необходимым условием выбора аппроксимирующих функций  $F_i(\xi, \eta)$  является удовлетворение требованиям:

$$F_i(\xi_j, \eta_k) = 1 \quad i=j=k \quad (1a)$$

$$F_i(\xi_j, \eta_k) = 0 \quad i \neq j, i \neq k \quad (1b)$$

$$\sum F_i(\xi, \eta) = 1 \quad -1 \leq \xi, \eta \leq 1 \quad (2)$$

Здесь  $\xi, \eta$  - безразмерные локальные координаты отображающего СЭ,  $i, j, k$  - индексы узловых точек СЭ, расположенных на его границах.

Прием, который мы использовали для построения аппроксимирующей функции в каком-либо узле заключается в записи ее в виде константы, умноженной на произведение функций, являющихся левыми частями уравнений соответствующих прямых, проходящих через остальные узловые точки. Константа определяется из условия (1a), а условия (1b) и (2) выполняются при этом автоматически. Этот прием можно легко перенести на отображающие СЭ любой формы и порядка.

Построенные таким образом функции имеют вид (3a)-(3г). Обозначения узловых точек показаны на рис. 1.

Четырехугольный несингулярный: :

$$\begin{aligned}
 F_1(\xi, \eta) &= -1/4(1-\xi)(1-\eta)(1+\xi+\eta) \\
 F_3(\xi, \eta) &= 1/4(1+\xi)(1-\eta)(\xi-\eta-1) \\
 F_5(\xi, \eta) &= 1/4(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\
 F_7(\xi, \eta) &= -1/4(1-\xi)(1+\eta)(\xi-\eta+1) \\
 F_2(\xi, \eta) &= 1/2(1-\eta)(1-\xi) \\
 F_4(\xi, \eta) &= 1/2(1+\xi)(1-\eta^2) \\
 F_6(\xi, \eta) &= 1/2(1+\eta)(1-\xi^2) \\
 F_8(\xi, \eta) &= 1/2(1-\xi)(1-\eta^2)
 \end{aligned} \tag{3a}$$

Четырехугольный сингулярный

$$\begin{aligned}
 F_1(\xi, \eta) &= -1/2(1-\xi)(1-\eta)(3/2+\xi+\eta) \\
 F_3(\xi, \eta) &= -1/6(1+\xi)(1-\eta)(1-\xi+3/2\eta) \\
 F_5(\xi, \eta) &= 1/4(1+\xi)(1+\eta)(\xi+\eta-1) \\
 F_7(\xi, \eta) &= -1/6(1-\xi)(1+\eta)(1-\eta+3/2\xi) \\
 F_2(\xi, \eta) &= 2/3(1-\eta)(1-\xi^2) \\
 F_4(\xi, \eta) &= 1/2(1+\xi)(1-\eta^2) \\
 F_6(\xi, \eta) &= 1/2(1+\eta)(1-\xi^2) \\
 F_8(\xi, \eta) &= 2/3(1-\xi)(1-\eta^2)
 \end{aligned} \tag{3b}$$

Треугольный несингулярный:

$$\begin{aligned}
 F_1(\xi, \eta) &= -1/8(1 - 2\xi - \eta)(1 + 2\xi + \eta) \\
 F_3(\xi, \eta) &= -1/8(1 + 2\xi - \eta)(1 - 2\xi + \eta) \\
 F_5(\xi, \eta) &= 1/2\eta(1 + \eta) \\
 F_2(\xi, \eta) &= 1/4(1 - 2\xi - \eta)(1 + 2\xi - \eta) \\
 F_4(\xi, \eta) &= 1/2(1 + \eta)(1 + 2\xi - \eta) \\
 F_6(\xi, \eta) &= 1/2(1 + \eta)(1 - 2\xi - \eta)
 \end{aligned}
 \tag{3в}$$

Треугольный сингулярный:

$$\begin{aligned}
 F_7(\xi, \eta) &= -1/6(1 - \xi)(1 + \eta)(1 - \eta + 3/2\xi) \\
 F_3(\xi, \eta) &= -1/12(1 + 2\xi - \eta)(1 - 2\xi + 2\eta) \\
 F_5(\xi, \eta) &= 1/12(1 + \eta)(1 - 2\xi + 5\eta) \\
 F_2(\xi, \eta) &= 1/3(1 - 2\xi - \eta)(1 + 2\xi - \eta) \\
 F_4(\xi, \eta) &= 1/2(1 + \eta)(1 + 2\xi - \eta) \\
 F_6(\xi, \eta) &= 2/3(1 + \eta)(1 - 2\xi - \eta)
 \end{aligned}
 \tag{3г}$$

В качестве примера на рис. 1а приведены также линии, использованные для определения функций  $F_1$  и  $F_4$ , на рис. 1б - функции  $F_3$ , на рис. 1в - функций  $F_2$  и  $F_5$ .

Понятно, что использование квадрата или равнобедренного треуголь-

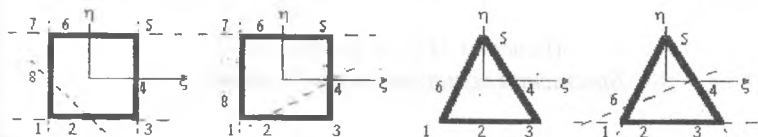


Рис. 1

ника в качестве отображающих СЭ не требует прямолинейности сторон исходных КЭ, поэтому функции (3а)-(3г) могут быть применены и для криволинейных областей.

Нетрудно видеть, что выписанные выше функции обладают полно-

той (3а и 3б - серендиповского типа, 3в и 3г - паскалевского типа). Применение указанных функций к ряду модельных задач для тел с трещинами показывает достоверность получаемых результатов.

Представляется, что следующим шагом для сингулярных элементов является введение для функции  $F_1(\xi, \eta)$  выражений:

$$\text{для четырехугольника } F_1(\xi, \eta) = -(1-\xi)(1-\eta)((1+\xi)^2 + (1+\eta)^2 - 1/4) \quad (4)$$

$$\text{для треугольника } F_1(\xi, \eta) = (1-2\xi-\eta)((1+\xi)^2 + (1-\eta)^2 - 1/4) \quad (5)$$

которые обеспечат для напряжений выполнение особенности  $\sqrt{1/r}$  на любом из радиальных направлений от вершины трещины. Геометрически последние сомножители в (4)-(5) соответствуют окружности радиуса  $R=1/2$ , построенной вокруг сингулярной точки. При этом КЭ превращаются в кубические, а тип полноты аппроксимации остается прежним.

#### Литература

1. О. Зенкевич, К. Морган. Конечные элементы и аппроксимация. М.: Мир, 1986,-318с.
2. Е.М. Морозов, Г.П. Никишков. Метод конечных элементов в механике разрушения. М.: Наука, 1990, -256с.
3. В.Н. Апанович. Метод внешних конечно-элементных аппроксимаций. Мн.: Выш. шк.,1991,-171с.

### РАСЧЁТ БРУСЬЕВ НА СЖАТИЕ И ВАЛОВ НА КРУЧЕНИЕ МЕТОДОМ ПРОДОЛЖЕНИЯ

*Мазырка М.В., Савченко В.А.*  
*Брестский политехнический институт*

В инженерной практике часто приходится осуществлять прочностной анализ элементов конструкций, расчетная схема которых может быть сведена к схеме бруса или вала переменной жесткости при различных условиях его опирания и нагружения. Получение аналитического решения для этих задач связано с определенными трудностями и является весьма проблематичным. Поэтому приходится прибегать к численным методам ре-