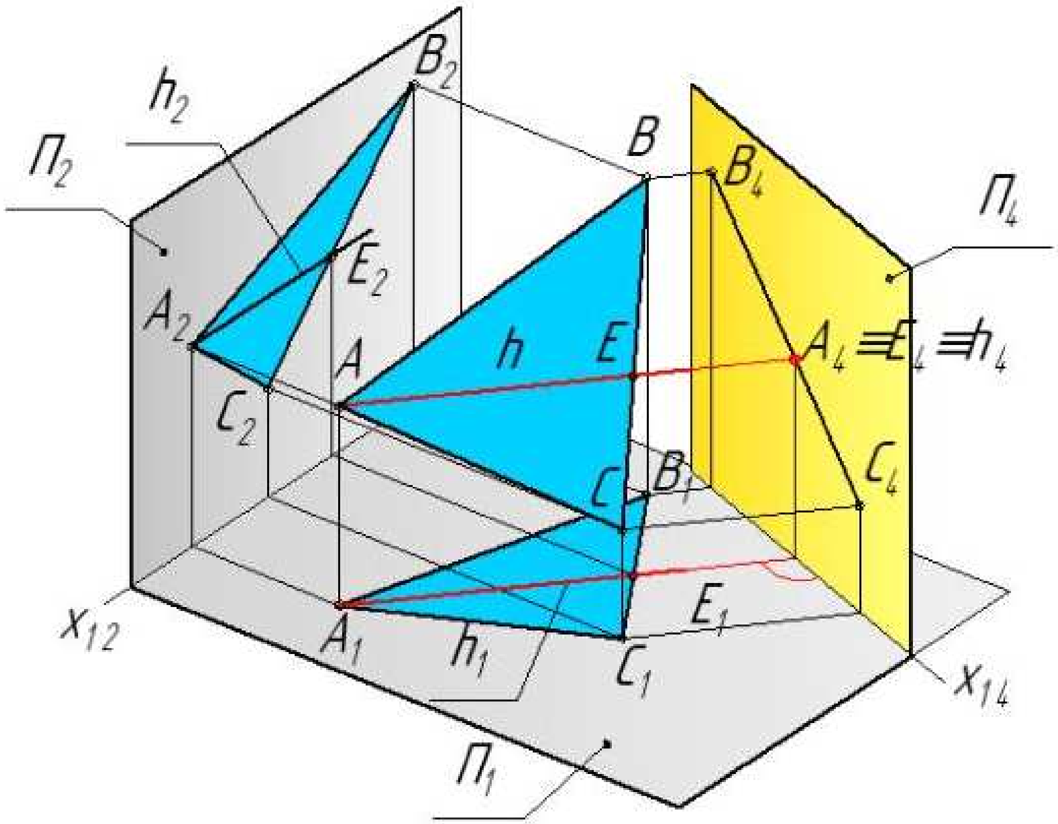
МИНИСТЕРСТВО ОБРАЗОВАНИЯ РЕСПУБЛИКИ БЕЛАРУСЬ

УЧРЕЖДЕНИЕ ОБРАЗОВАНИЯ
«БРЕСТСКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ ТЕХНИЧЕСКИЙ УНИВЕРСИТЕТ»

КАФЕДРА НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ И ИНЖЕНЕРНОЙ ГРАФИКИ

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

для студентов специальности
1 – 70 02 01 – промышленное и гражданское строительство



Брест 2019

УДК 515(076.8)

Методические указания предназначены для работы на лекциях, а также для самостоятельной работы студентов при подготовке к практическим занятиям, экзамену и при выполнении индивидуальных графических работ.

Данные методические указания освещают теоретические вопросы, даются рекомендации по решению задач курса «Начертательная геометрия», содержат методику выполнения заданий.

Составители: Базенков Т.Н. – к.т.н., доцент
Винник Н.С. – старший преподаватель
Морозова В.А. – старший преподаватель

Рецензент: П.В. Зеленый, к.т.н., доцент кафедры инженерной графики машиностроительного профиля УО «Белорусский национальный технический университет»

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРИНЯТЫЕ ОБОЗНАЧЕНИЯ

Точки в пространстве обозначаются прописными буквами латинского алфавита ***A, B, C*** или цифрами ***1, 2, 3*** и т. д.

Произвольные линии в пространстве – строчными буквами латинского алфавита ***a, b, c*** и т. д.

Прямые уровня: горизонтали – ***h***, фронтали – ***f***, профильные прямые – ***p***.

Плоскости общего положения обозначаются строчными буквами греческого алфавита ***α, β, γ*** и т. д.

Поверхности обозначаются заглавными буквами греческого алфавита ***Ψ, Ω, Σ*** и т. п.

Плоскости проекций – заглавной буквой греческого алфавита ***П*** с добавлением нижнего индекса ***1, 2, 3*** и т. д.

Проекции точек, прямых и плоскостей обозначаются на чертеже такими же буквами, как и в пространстве, только с добавлением нижнего индекса, соответствующего плоскости поекций, на которую они проецируются.

Совпадение отмечается знаком $\equiv$;

взаимная принадлежность – знаком $\in$;

пересечение – знаком $\cap$;

перпендикулярность – $\perp$;

параллельность – $||$.

Лекция 1

МЕТОДЫ ПРОЕЦИРОВАНИЯ. ТОЧКА. ПРЯМАЯ

Роль, предмет и задачи начертательной геометрии. Методы проецирования (центральное и параллельное). Проецирование точки. Эпюр Монжа. Прямая.

1.1. Роль, предмет и задачи курса

Начертательная геометрия входит в число дисциплин, составляющих основу инженерного образования.

Начертательная геометрия является лучшим средством развития у человека пространственного воображения, без которого немыслимо никакое инженерное творчество.

Целью начертательной геометрии является изучение пространственных форм объектов окружающего нас мира и взаимоотношений этих форм, познание соответствующих закономерностей и применение их к решению практических задач.

Чертежи имеют большое значение в жизни общества, это подтверждается широким их применением в конструкторских работах, в машиностроении, в архитектуре, в графических задачах механики и т. д. Без знания правил выполнения чертежа нельзя читать чертежи имеющихся конструкций и создавать чертежи новых машин и приборов.

Создатель первого систематического труда по начертательной геометрии, французский ученый и инженер Гаспар Монж, говорил: «Чертеж является языком техники». К этому русский профессор В. И. Курдюмов добавил, что начертательная геометрия является грамматикой этого языка. Однако, как показал опыт, значение начертательной геометрии несравненно шире.

Изучение и применение начертательной геометрии значительно способствует развитию пространственных представлений и воображения человека, а так же развитию его логических рассуждений. Умение же мысленно представлять предметы в их взаимном расположении имеет большое значение в творческой деятельности человека. Изучение начертательной геометрии, способствующее развитию пространственного мышления, делает возможным представлять геометрические образы по их изображению. Поэтому ни одна задача начертательной геометрии не решается механически.

Начертательная геометрия представляет собой науку:

- об изображениях пространственных предметов на плоскости – построение чертежа (прямая задача);
- о способах решения пространственных задач по плоским изображениям (обратная задача).

К таким задачам относятся:

- позиционные – задачи на взаимную принадлежность и пересечение фигур;
- метрические – на определение расстояний и натуральных величин геометрических фигур.

Основным средством изучения геометрических свойств предметов в начертательной геометрии является изображение. Однако не всякое изображение может быть принято для изучения геометрических свойств предметов. Существуют изображения предметов, которые являются лишь иллюстрационным, дополнительным материалом и не соответствуют полностью геометрическим формам объектов, не отражают геометрических свойств предметов.

Свойства геометрических объектов, таких как точка, прямая, плоскость, поверхность изучаются с помощью их проекций, в основе построения которых лежит метод проецирования. Геометрические объекты в пространстве называются оригиналами, а их изображения на плоскости – проекциями.

1.2. Методы проецирования

В основе правил построения изображений, рассматриваемых в начертательной геометрии и применяемых в техническом черчении, лежит метод проекций (от латинского ***projectio*** – бросание вперед, вдаль). Изучение его начинают с построения проекции точки, так как при построении изображения любой пространственной формы объекта рассматривается ряд точек, принадлежащих этой форме. Проекцией фигуры называется совокупность проекций всех ее точек.

В зависимости от способа проведения проецирующих лучей различают центральное и параллельное проецирование.

1.2.1 Центральное проецирование

При центральном проецировании (построении центральных проекций) задают плоскость проекций и центр проекций – точку, не лежащую в плоскости проекций. На рисунке 1.1 плоскость Π_1 – плоскость проекций, точка S – центр проекций.

Для проецирования произвольной точки через нее и центр проекций проводят прямую. Точка пересечения этой прямой с плоскостью проекций и является *центральной проекцией заданной точки* на выбранной плоскости проекций.

На рисунке 1.1 центральной проекцией точки A является точка A_1 пересечения прямой SA с плоскостью Π_1**.** Так же построены центральные проекции B_1, C_1, D_1 точек B, C, D на плоскости Π_1.

Прямые, проходящие через центр проекций и проецируемые точки, называют *проецирующими прямыми*.

Центральные проекции B_1 и C_1, двух различных точек B и C в пространстве, которые располагаются на одной проецирующей прямой, совпадают. Все множество точек пространства, принадлежащих одной проецирующей прямой, имеет при одном центре проецирования одну центральную проекцию на заданной плоскости проекций.

Следовательно, при заданной плоскости проекций и центре проецирования одна точка в пространстве имеет одну центральную проекцию. Но одна центральная проекция точки не позволяет однозначно определить положение точки в пространстве.

Объектов проецирования может быть множество, центр проецирования – один (рис. 1.1).

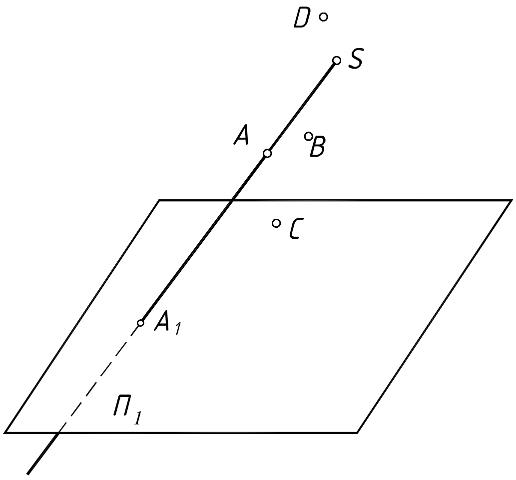


Рисунок 1.1

Множество лучей, проходящих через один центр проецирования (или точку зрения), образуют коническую поверхность. Отсюда этот метод еще называется коническим и на нем основано построение перспективных проекций.

Центральные проекции применяют для изображения предметов в перспективе. Изображения в центральных проекциях наглядны, но для технического черчения неудобны, так как не соблюдается метрика.

1.2.2 Параллельное проецирование

Параллельное проецирование (рис. 1.2) можно рассматривать как частный случай центрального проецирования, при котором центр проекций удален в бесконечность ***(S_∞)***. Направление проецирования указано стрелкой под углом ***$\alpha \neq 90^\circ$*** к плоскости проекций ***$П_1$***. При параллельном проецировании применяют параллельные проецирующие прямые, проведенные в заданном направлении относительно плоскости проекций. Если направление проецирования перпендикулярно плоскости проекций, то проекции называют прямоугольными или ортогональными (рис. 1.3), в остальных случаях – косоугольными.

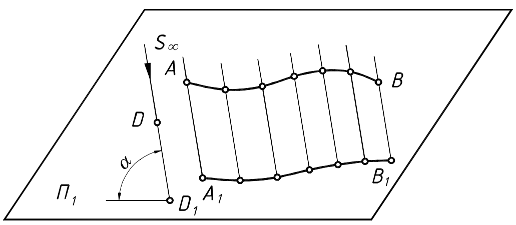


Рисунок 1.2

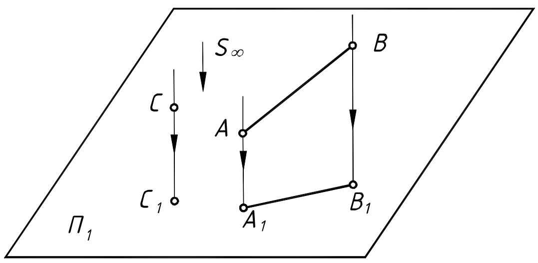


Рисунок 1.3

Аппарат проецирования: ***$П_1$*** – плоскость проекций, ***S*** – направление проецирования, ***A, B, C*** – объекты проецирования, ***A_1*** – проекция точки *A* на плоскость ***$П_1$***..

1.2.3 Свойства центрального и параллельного проецирования

1. Точка проецируется точкой, прямая – прямой.

2. Каждая точка и линия в пространстве имеют единственную свою проекцию.

3. Каждая точка на плоскости проекций может быть проекцией множества точек, если через них проходит общая для них проецирующая прямая.

4. Каждая линия на плоскости может быть проекцией множества линий, если она расположена на общей для них проецирующей плоскости. Для единственного решения требуются дополнительные условия (например, даны две проекции прямой).

5. Для построения проекций прямой достаточно спроецировать две ее точки и через полученные проекции этих точек провести прямую линию.

6. Если точка принадлежит прямой, то проекция точки принадлежит проекции этой прямой.

7. Если прямая параллельна направлению проецирования, то проекцией прямой (и любого его отрезка) является точка.

8. Отрезок прямой линии, параллельный плоскости проекций, проецируется на эту плоскость в натуральную величину.

1.3 Проецирование точки. Эпюр Монжа

1.3.1 Система двух взаимно перпендикулярных плоскостей проекций

Для удобства проецирования в качестве двух плоскостей проекций выбирают две взаимно перпендикулярные плоскости (рис. 1.4).

Пространство двумя пересекающимися плоскостями проекций делится на 4 части, которые называются четвертями пространства. Ось x делит горизонтальную плоскость проекций на переднюю и заднюю полу, а фронтальную плоскость проекций – на верхнюю и нижнюю полу (рис. 1.4).

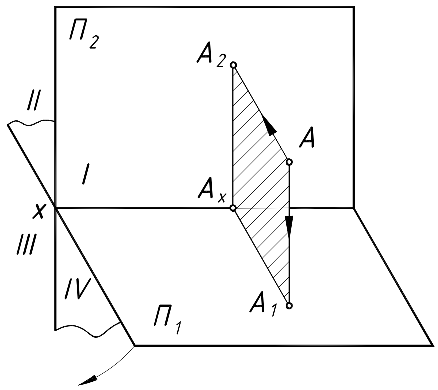


Рисунок 1.4

$\boldsymbol{\Pi_1}$ – горизонтальная плоскость проекций;
$\boldsymbol{\Pi_2}$ – фронтальная плоскость проекций;
$\boldsymbol{A_1}$ – горизонтальная проекция точки А;
$\boldsymbol{A_2}$ – фронтальная проекция точки А.

$\boldsymbol{x = \Pi_1 \cap \Pi_2}$

$\boldsymbol{A_2 A_X \perp x, A_1 A_X \perp x.}$

Рассмотрим преобразование наглядного изображения точки в системе $\boldsymbol{\Pi_1, \Pi_2}$ в плоский чертеж. Это преобразование осуществляют (рис. 1.4) путем поворота вокруг оси $\boldsymbol{x}$ плоскости $\boldsymbol{\Pi_1}$ на угол **90**° вниз. При этом отрезки $\mathbf{A_x = A_1}$ и $\mathbf{A_x = A_2}$ образуют один отрезок $A_1\ A_2$, перпендикулярный оси проекции, называемый *линией связи*. В результате указанного совмещения плоскостей $\boldsymbol{\Pi_1}$ и $\boldsymbol{\Pi_2}$ получается чертеж (рис. 1.5), известный под названием *эпюр* (от французского ***epure*** – *чертеж, проект*) или эпюр Монжа.

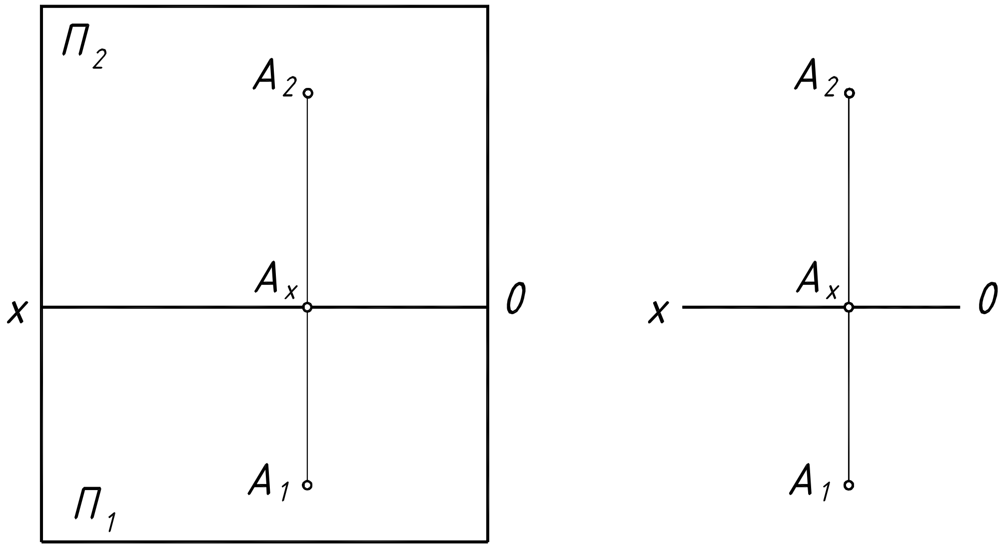
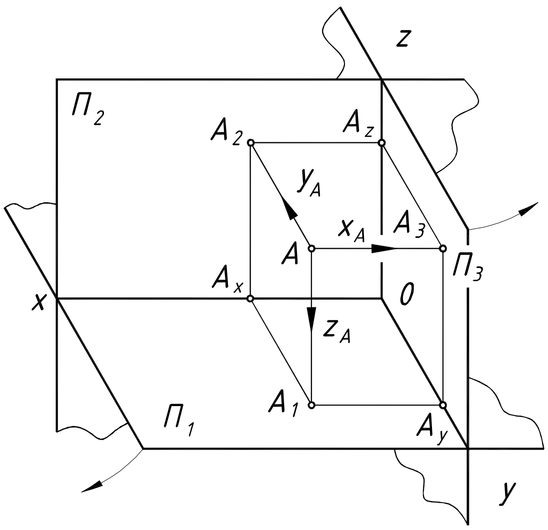


Рисунок 1.5

1.3.2 Система трех взаимно перпендикулярных плоскостей проекций

Для полного выявления наружных и внутренних форм сложных деталей и их соединений, для решения ряда задач бывает необходимо три и даже более изображений. Поэтому вводят три и более плоскостей проекций.

Введем в систему $\boldsymbol{\Pi_1}$, $\boldsymbol{\Pi_2}$ третью вертикальную плоскость проекций (рис. 1.6), перпендикулярную к оси $\boldsymbol{x}$ и соответственно к фронтальной и горизонтальной плоскостям проекций. Ее называют профильной плоскостью проекций и обозначают $\boldsymbol{\Pi_3}$.



$\boldsymbol{x = \Pi_1 \cap \Pi_2}$,

$\boldsymbol{y = \Pi_1 \cap \Pi_3}$,

$\boldsymbol{z = \Pi_2 \cap \Pi_3}$.

$\boldsymbol{\Pi_1}$ – горизонтальная плоскость проекций,
$\boldsymbol{\Pi_2}$ – фронтальная плоскость проекций,
$\boldsymbol{\Pi_3}$ – профильная плоскость проекций,
$\boldsymbol{A_1}$ – горизонтальная проекция точки А,
$\boldsymbol{A_2}$ – фронтальная проекция точки А,
$\boldsymbol{A_3}$ – профильная проекция точки А.

Рисунок 1.6

Чтобы построить профильную проекцию точки, необходимо через фронтальную проекцию точки провести прямую, перпендикулярную оси **z** (линия связи), и на этой прямой отложить координату $\boldsymbol{Y_A}$ данной точки вправо от оси **z**, если она положительна, и влево, если она отрицательна.

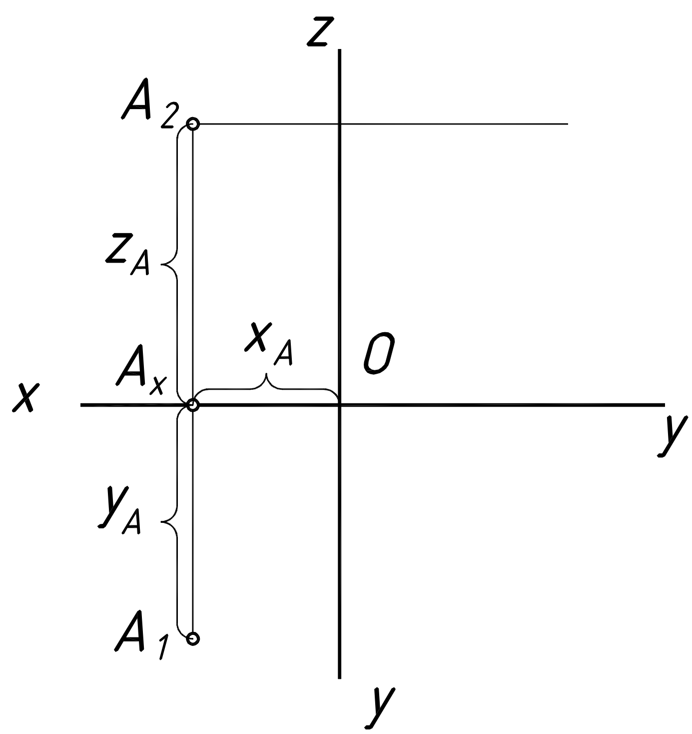


Рисунок 1.7

Система прямоугольных (декартовых) координат

Точка определена в пространстве тремя координатами:

X – расстояние от точки ***A*** до плоскости Π_3 (абсцисса точки ***A***),

Y – расстояние от точки ***A*** до плоскости Π_2 (ордината точки ***A***),

Z – расстояние от точки ***A*** до плоскости Π_1 (аппликата точки ***A***).

Таблица знаков

Октант	X	Y	Z
I	+	+	+
II	+	-	+
III	+	-	-
IV	+	+	-
V	-	+	+
VI	-	-	+
VII	-	-	-
VIII	-	+	-

Пример. Используя правило знаков, определить, в какой четверти находятся точки A, B и C.

A (+ + +) – ? четверть,

B (+ - -) – ? четверть,

C (+ - +) – ? четверть.

1.4 Прямая

1.4.1 Проекции прямой

Прямая линия – это совокупность последовательных положений точки, движущейся в пространстве. При ортогональном проецировании (в общем случае) согласно свойствам параллельного проецирования прямая проецируется в прямую. Для построения проекций прямой достаточно построить проекции двух нетождественных точек, принадлежащих данной прямой.

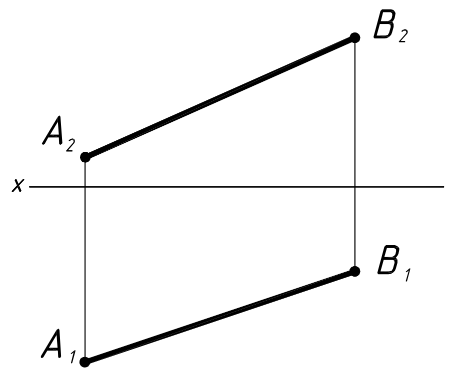


Рисунок 1.8

Прямую на эпюре можно задавать не только проекциями ее отрезка, но и проекциями некоторой произвольной части прямой. При этом проекцию обозначают одной буквой.

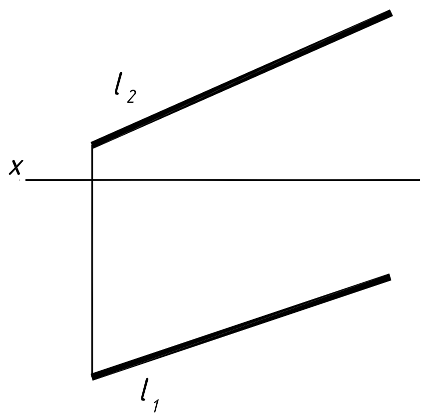


Рисунок 1.9

1.4.2 Классификация прямых

Относительно плоскостей проекций прямая может занимать различные положения:

не параллельна ни одной из плоскостей проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$, $\boldsymbol{\Pi_2}$, $\boldsymbol{\Pi_3}$;

параллельна одной из плоскостей проекций (прямая может и принадлежать этой плоскости);

перпендикулярна одной из плоскостей проекций и при этом параллельна двум другим.

Прямую, не параллельную ни одной из плоскостей проекций, называют прямой общего положения (рис. 1.8, 1.9).

К прямым частного положения относятся прямые, параллельные плоскостям проекций - *прямые уровня*, и прямые, перпендикулярные плоскостям проекций - *проецирующие прямые*.

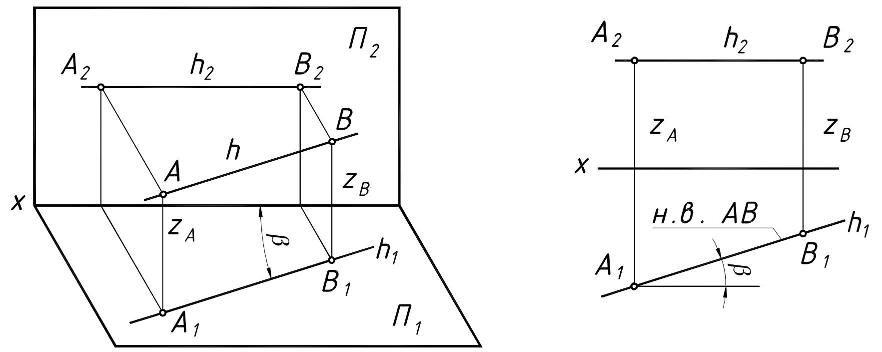
На рисунке 1.10 приведены наглядные изображения и чертежи отрезков прямых уровня – параллельных плоскостям проекций:

а) прямая $\boldsymbol{AB}$ параллельна плоскости $\boldsymbol{\Pi_1}$ (ее называют *горизонтальной прямой или прямой горизонтального уровня);* фронтальная проекция $\boldsymbol{A_2B_2}$ параллельна оси $\boldsymbol{x}$; длина горизонтальной проекции отрезка равна длине самого отрезка ($\boldsymbol{A_1B_1} = \boldsymbol{AB}$); угол $\boldsymbol{\beta}$, образованный горизонтальной проекцией и осью проекций, равен углу наклона прямой к фронтальной плоскости проекций;

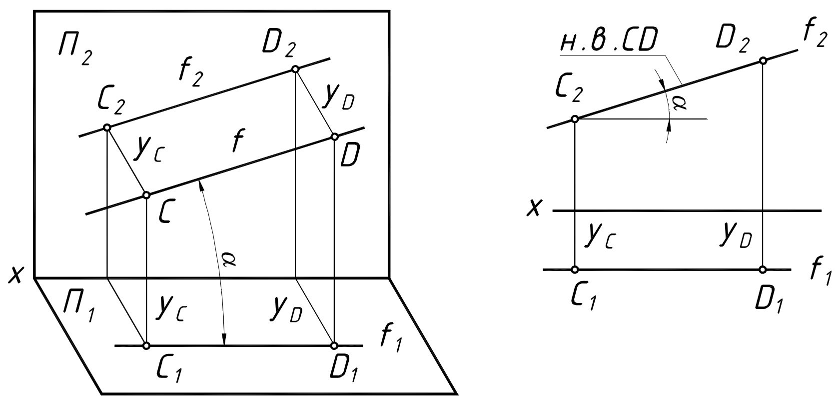
б) прямая $\boldsymbol{CD}$ параллельна плоскости $\boldsymbol{\Pi_2}$ (ее называют *фронтальной прямой или прямой фронтального уровня);* горизонтальная проекция $\boldsymbol{C_1D_1}$ параллельна оси $\boldsymbol{x}$, длина фронтальной проекции отрезка равна длине самого отрезка ($\boldsymbol{C_2D_2 = CD}$); угол $\boldsymbol{\alpha}$, образованный фронтальной проекцией и осью проекций, равен углу наклона прямой к горизонтальной плоскости проекций;

в) прямая $\boldsymbol{EF}$ параллельна плоскости $\boldsymbol{\Pi_3}$ (ее называют *профильной прямой*); ($\mathbf{E_2F_2}$ // $\boldsymbol{Oz}$ **и** $\mathbf{E_1F_1}$ // $\boldsymbol{Oy}$); длина профильной проекции отрезка равна длине самого отрезка ($\mathbf{E_3F_3}$ // $\boldsymbol{EF}$); углы $\boldsymbol{\beta}$ и $\boldsymbol{\alpha}$, образованные профильной проекцией с осями $\mathbf{z}$ и $\boldsymbol{y}$, равны углам наклона прямой к фронтальной и горизонтальной плоскостям проекций соответственно.

а)



б)



в)

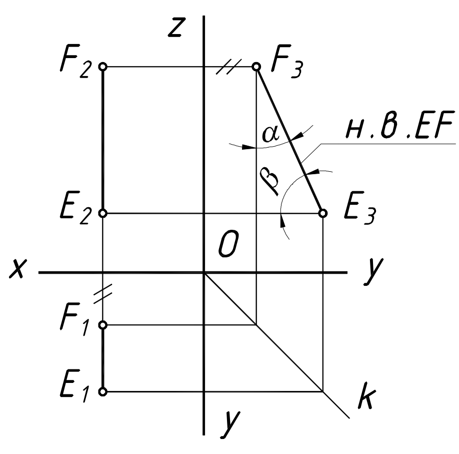


Рисунок 1.10

Прямые, перпендикулярные плоскостям проекций, называется *проецирующими прямыми.* Такие прямые проецируются в точку на ту плоскость проекций, которой эта прямая перпендикулярна.

На рисунке 1.11 приведены чертежи отрезков проецирующих прямых, перпендикулярных плоскостям проекций;

а) прямая перпендикулярна плоскости Π_1, ее проекция A_2B_2 перпендикулярна оси x, проекции A_1 и B_1 совпадают;

б) прямая перпендикулярна плоскости Π_2, ее проекция C_1D_1 перпендикулярна оси x, проекции C_2 и D_2 совпадают;

в) прямая перпендикулярна плоскости Π_3, ее проекции E_1F_1, E_2F_2 параллельны оси x, проекции E_3 и F_3 совпадают.

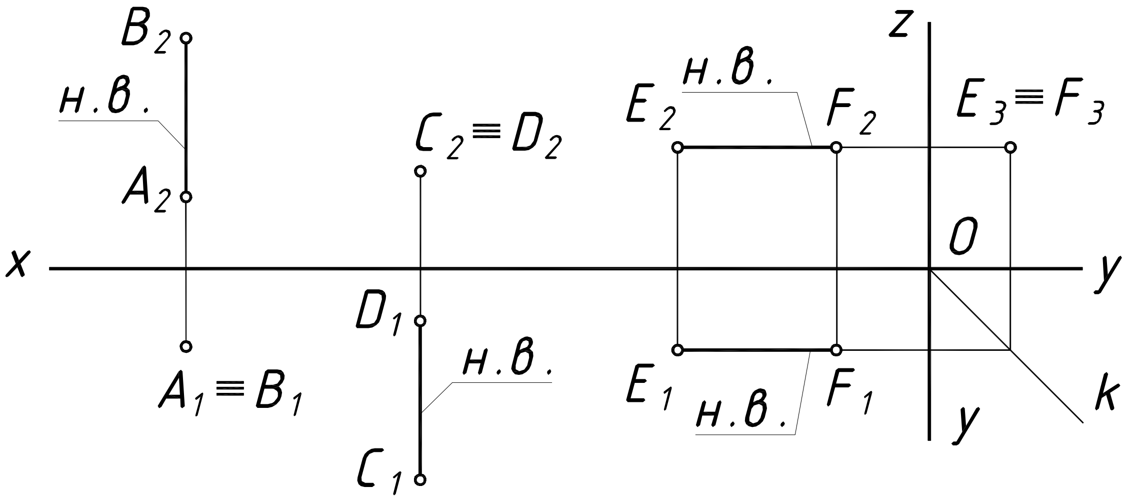
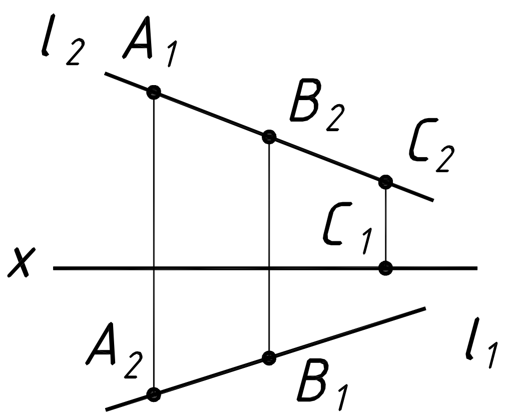


Рисунок 1.11

1.4.3 Точка на прямой

Аксиома (принадлежности). Если точка принадлежит прямой, то одноименные проекции точки принадлежат одноименным проекциям прямой.

Пример. Определить, какие из заданных точек $\in$ прямой L.



$B \in l$,

т. к. $B_1 \in l_1$, $B_2 \in l_2$

Рисунок 1.12

1.4.4 Деление отрезка в данном отношении

Если точка делит отрезок прямой в данном отношении, то проекции этой точки делят проекции данной прямой в том же отношении.

Пример. Разделить отрезок АВ точкой С в отношении 2:3, АС : СВ=2:3.

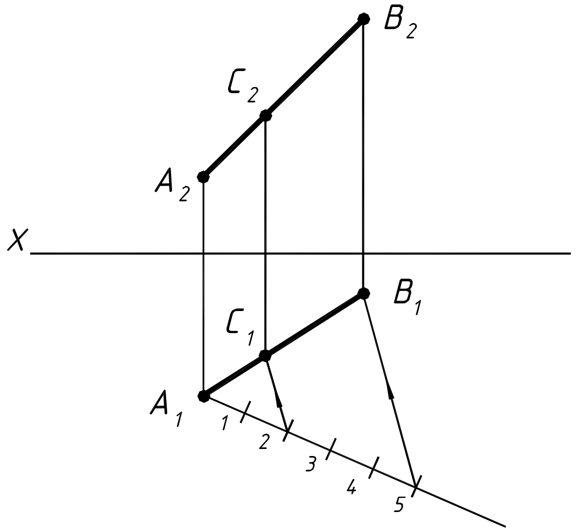


Рисунок 1.13

Пример построения проекций C_1 и C_2 точки C на чертеже, делящей отрезок с проекциями A_1B_1, A_2B_2 в отношении 2:3, показан на рисунке 1.13.

Для профильных прямых необходимо проверка по профильной проекции.

Лекция 2

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Следы прямой. Длина отрезка прямой и углы наклона плоскостям проекций. Плоскость. Способы задания плоскости. Следы плоскости. Классификация плоскостей. Прямые в плоскости. Главные линии плоскости.

2.1 Следы прямой

Следом прямой называется точка пересечения прямой с плоскостью проекций.

Прямая общего положения в системе трех плоскостей проекций имеет три следа: горизонтальный, фронтальный и профильный.

Точку пересечения прямой с горизонтальной плоскостью проекций Π_1 называют *горизонтальным следом прямой* и обозначают H.

Точку пересечения прямой с фронтальной плоскостью проекций Π_2 называют *фронтальным следом прямой* и обозначают F.

Точку пересечения прямой с профильной плоскостью проекций Π_3 называют профильным следом прямой.

Для построения горизонтального следа прямой необходимо продлить прямую до пересечения с горизонтальной плоскостью проекций Π_1, при этом горизонтальная проекция горизонтального следа H_1 совпадает с самим следом H, а фронтальная проекция горизонтального следа H_2 лежит на оси проекций x.

Аналогично, для построения фронтального следа F необходимо продолжить прямую до пересечения с фронтальной плоскостью проекций, при этом фронтальная проекция F_2 фронтального следа F совпадает с самим следом, а горизонтальная проекция фронтального следа F_1 лежит на оси проекций (рис.2.1).

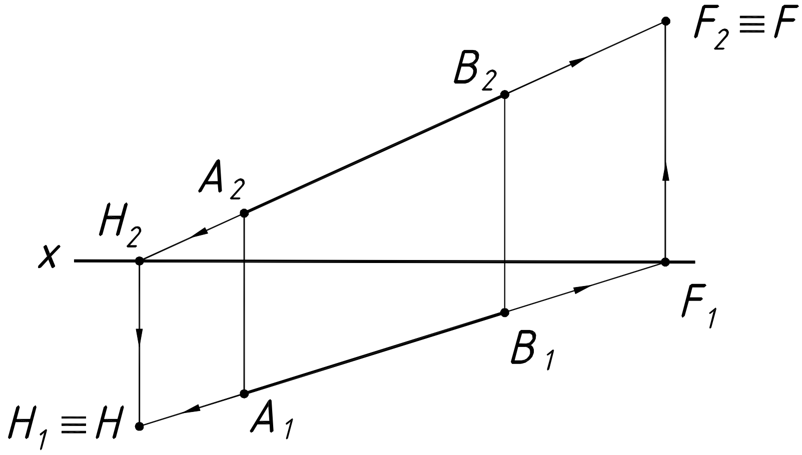


Рисунок 2.1

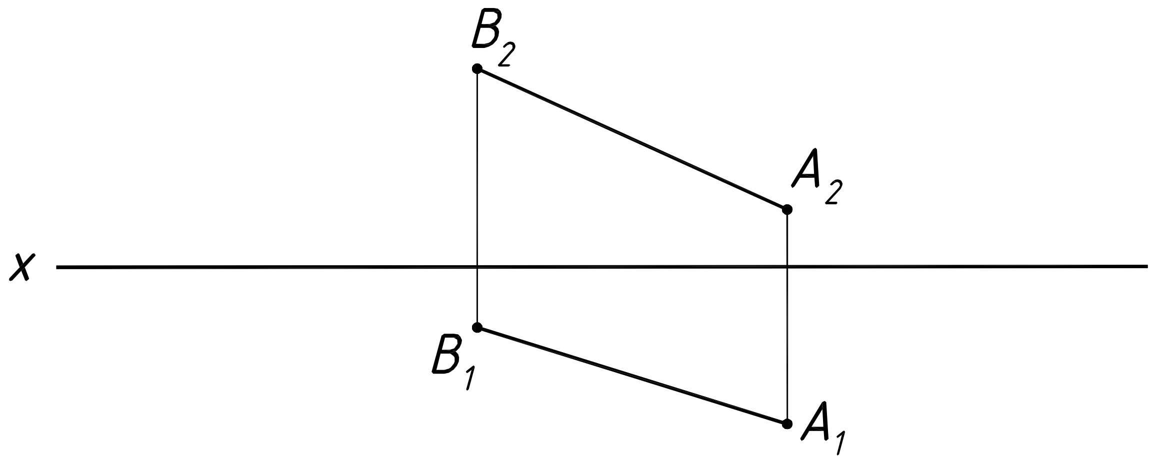


Рисунок 2.2

Следы прямой дают возможность задавать прямую, так как две точки прямой определяют её положение в пространстве. С помощью следов прямой можно установить, через какие четверти пространства проходит данная прямая. На рисунке 2.2 необходимо построить следы прямой самостоятельно.

2.2 Длина отрезка прямой и углы наклона его к плоскостям проекций

Для определения длины отрезка прямой и углов наклона его к плоскостям проекций необходимо построить прямоугольный треугольник, одним катетом которого является отрезок, равный по величине горизонтальной (фронтальной) проекции отрезка, а вторым катетом — отрезок, равный по величине алгебраической разности координат **z** ***(y)*** концов отрезка прямой. Гипотенуза построенного прямоугольного треугольника равна по величине отрезку прямой, а угол между гипотенузой и катетом, равным проекции отрезка, равен углу наклона отрезка к соответствующей плоскости проекций (рис.2.3).

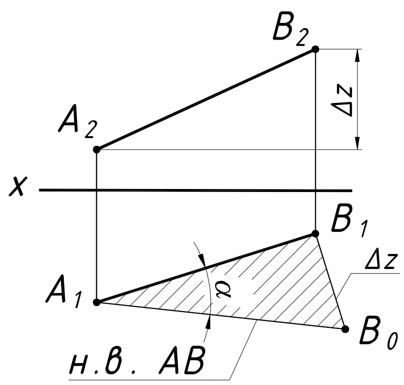


Рисунок 2.3

2.3 Взаимное положение прямых

Две прямые в пространстве могут быть пересекающимися, параллельными и скрещивающимися. Пересекающиеся прямые лежат в одной плоскости и имеют общую точку.

Если прямые пересекаются, то их одноименные проекции пересекаются между собой, а проекции точек пересечения лежат на одной линии связи (рис.2.4а).

Если в пространстве прямые параллельны, то их одноименные проекции параллельны между собой (рис.2.4б).

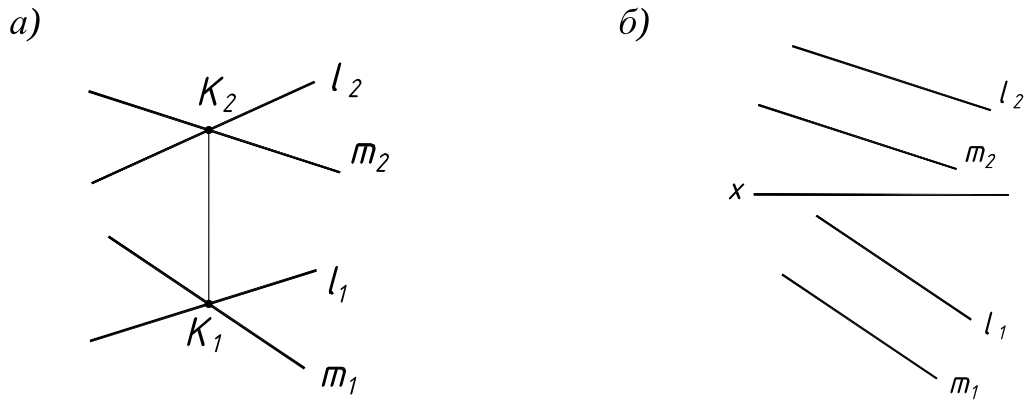


Рисунок 2.4

Скрещивающиеся прямые не имеют общих точек (рис.2.5).

Точки пересечения одноименных проекций скрещивающихся прямых не лежат на одной линии связи.

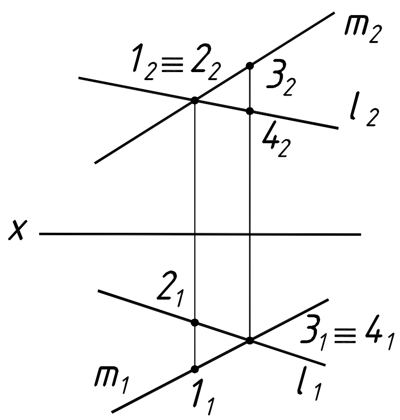


Рисунок 2.5

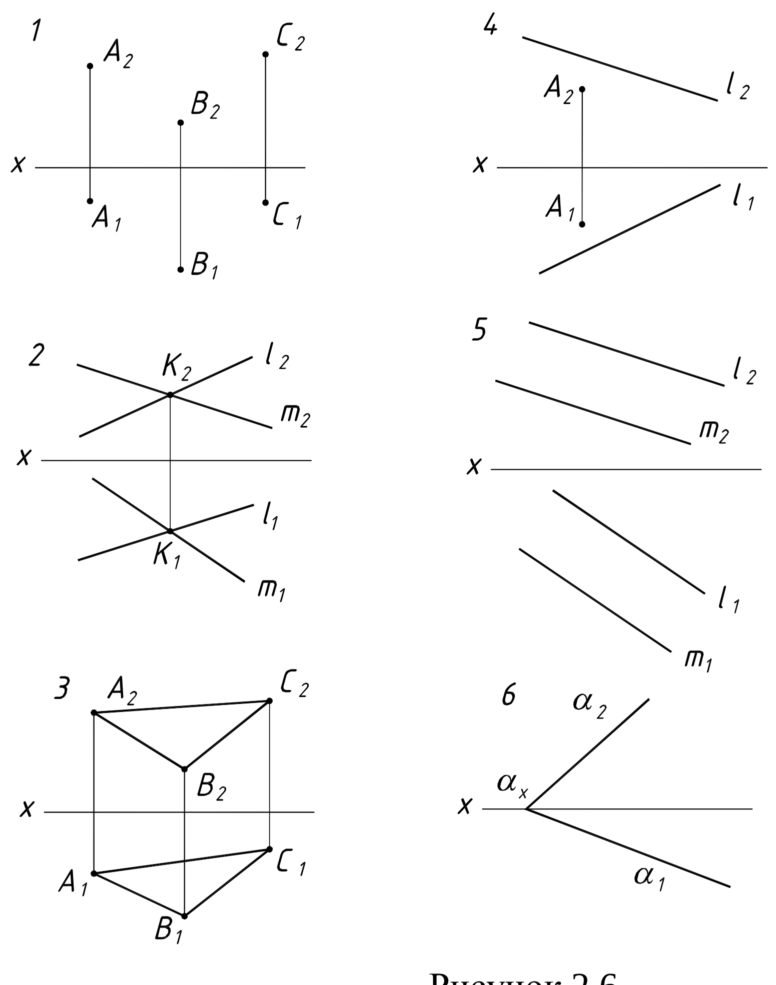
Для определения видимости на чертеже используют конкурирующие точки. На рис. 2.5 две пары таких точек: фронтально конкурирующие точки ***1*** и ***2*** и горизонтально конкурирующие ***3*** и ***4***.

Точка ***1***, лежащая на прямой ***m***, находится дальше от фронтальной плоскости проекций, чем точка ***2*** прямой ***l*** ($y_1 > y_2$). Поэтому на фронтальной плоскости проекций она будет «закрывать» собой точку ***2*** (наблюдателю будет видна точка ***1*** и не видна точка ***2***). Сравнивая относительное расположение точек ***3*** и ***4***, приходим к выводу, что на горизонтальной плоскости проекций точка ***3***, принадлежащая прямой ***m***, закрывает собой точку ***4***, лежащую на прямой ***l*** ($z_3 > z_4$).

2.4 Изображение плоскости

2.4.1 Способы задания плоскости

На чертеже плоскость задают проекциями некоторых геометрических фигур, принадлежащих этой плоскости. На рисунке 2.6 необходимо самостоятельно определить и написать способы задания плоскостей.



1 –

2 –

3 –

4 –

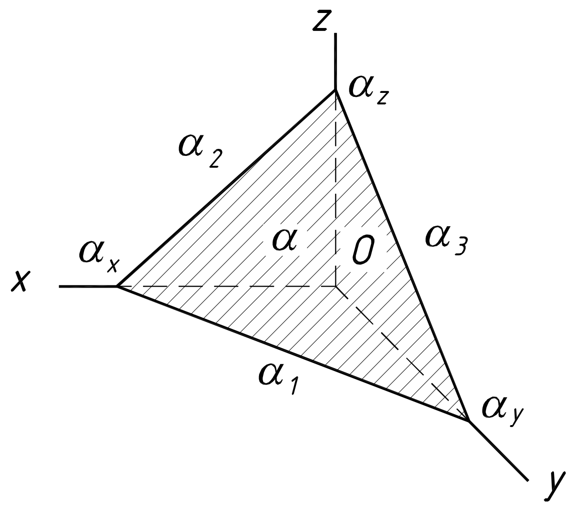
5 –

6 –

Рисунок 2.6

При решении задач можно перейти от одного способа задания плоскости к другому.

Следы плоскости



$\alpha_1 = \alpha \cap \Pi_1$

$\alpha_2 = \alpha \cap \Pi_2$

$\alpha_3 = \alpha \cap \Pi_3$

Рисунок 2.7

Следом плоскости называется линия пересечения плоскости с одной из плоскостей проекций (рис.2.7). Обозначаются следы строчными буквами греческого алфавита $\boldsymbol{\alpha}$, $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{\gamma}$ и т. п.

Плоскости общего положения в системе трех плоскостей проекций имеют три следа и точки схода следов на осях.

2.4.2 Плоскости общего положения

Плоскость, не параллельная и не перпендикулярная ни одной из плоскостей проекций, называется плоскостью общего положения. Задание таких плоскостей на чертеже представлено на рис. 2.6.

2.4.3. Проецирующие плоскости

Плоскость называется *проецирующей*, если она перпендикулярна какой-либо плоскости проекции. Ее проекция на эту плоскость вырождается в прямую, совпадающую со следом этой плоскости и называется *вырожденным следом*. Плоскость, перпендикулярная горизонтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ называется горизонтально-проецирующей, перпендикулярная фронтальной плоскости проекций $\boldsymbol{\Pi_2}$ - фронтально-проецирующей.

Горизонтальные проекции всех точек, линий, геометрических фигур, принадлежащих горизонтально-проецирующей плоскости, располагаются на горизонтальном следе плоскости (рис. 2.8).

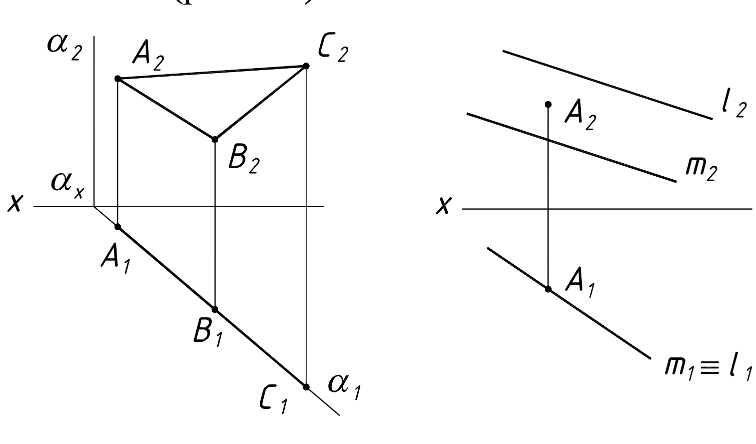


Рисунок 2.8

Фронтальные проекции всех точек, линий, геометрических фигур, принадлежащих фронтально-проецирующей плоскости, располагаются на фронтальном следе плоскости (рис. 2.9).

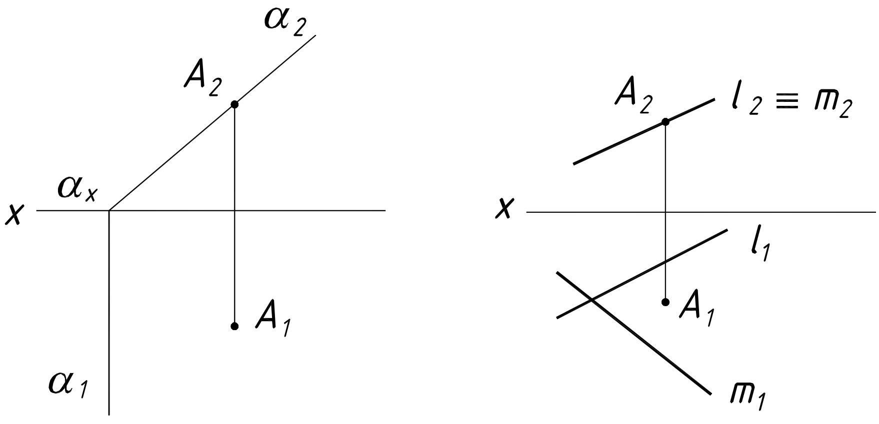


Рисунок 2.9

2.4.4 Плоскости уровня

Плоскостями уровня называются плоскости, параллельные плоскостям проекций. Следует обратить внимание, что плоскости уровня, будучи параллельными одной из плоскостей проекций, перпендикулярны двум другим плоскостям проекций. Плоскость, параллельную горизонтальной плоскости проекций, называют плоскостью горизонтального уровня (рис. 2.10). Всякая геометрическая фигура, лежащая в плоскости горизонтального уровня, проецируется на горизонтальную плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ без искажения, а на фронтальную плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_2}$ – в отрезок прямой, параллельной оси $\boldsymbol{x}$.

Плоскость, параллельную фронтальной плоскости проекций, называют плоскостью фронтального уровня (рис. 2.10). Всякая геометрическая фигура, лежащая в плоскости фронтального уровня, проецируется на фронтальную плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_2}$ без искажения, а на горизонтальную плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ – в отрезок прямой, параллельной оси $\boldsymbol{x}$.

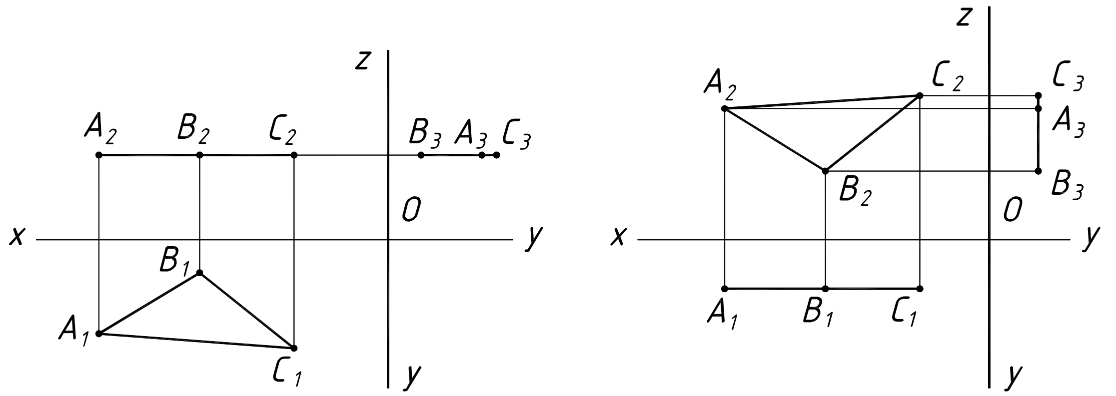


Рисунок 2.10

Плоскости частного положения обладают собирательным свойством: проекции точек, линий, плоских фигур, лежащих в плоскости, проецируются на соответствующие следы плоскости.

2.5 Прямая и точка, принадлежащие плоскости

Признак принадлежности точки плоскости: точка принадлежит плоскости, если она принадлежит прямой, лежащей в плоскости.

Признак принадлежности прямой плоскости: прямая принадлежит плоскости, если:

1) она имеет с плоскостью две общие точки;
2) она имеет с плоскостью одну общую точку и параллельна какой-либо прямой, лежащей в плоскости.

Если одноименные проекции точки $\in$ одноименным проекциям прямой, лежащей в заданной плоскости, то и точка $\in$ заданной плоскости.

Пример. Определить, $\in$ или нет точка ***D*** плоскости, заданной Δ***ABC*** (рис.2.11).

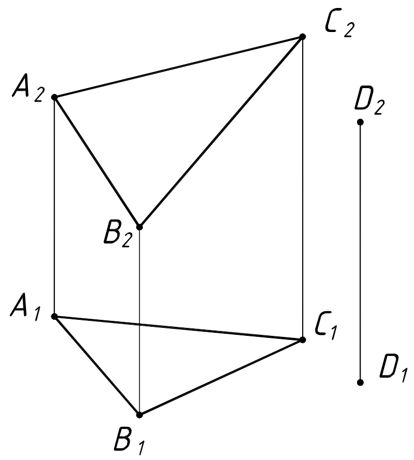


Рисунок 2.11

2.6 Главные линии плоскости

Горизонталь **h (h₁, h₂)** – прямая, лежащая в плоскости и параллельная горизонтальной плоскости проекций (линия уровня).

Фронталь ***f*** ***(f₁, f₂)*** – прямая, лежащая в плоскости и параллельная фронтальной плоскости проекций (линия уровня).

Профиль ***p*** ***(p₁, p₂)*** – прямая, лежащая в плоскости и параллельная профильной плоскости проекций (линия уровня).

Линия наибольшего ската ***n*** ***(n₁, n₂)*** – прямая, лежащая в заданной плоскости и $\perp$ одной из линий уровня плоскости (горизонтали ***h***) (рис. 2.16).

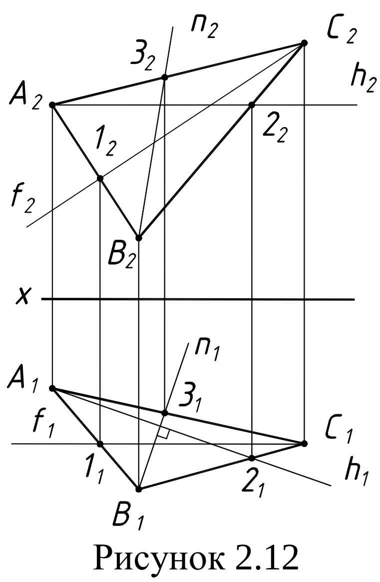


Рисунок 2.12

ПРЯМАЯ И ПЛОСКОСТЬ

Взаимное положение прямой и плоскости. Взаимное положение плоскостей. Линия пересечения плоскостей.

3.1 Параллельность прямой и плоскости

Признак параллельности прямой и плоскости: если плоскость содержит в себе прямую, параллельную данной, то данная прямая и плоскость взаимно параллельны.

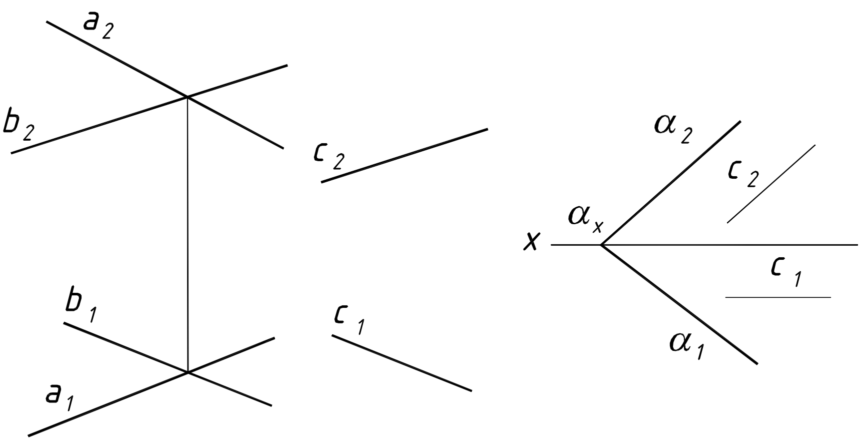


Рисунок 3.1

Пример. Через точку ***А*** провести прямую // заданной плоскости (рис.3.2).

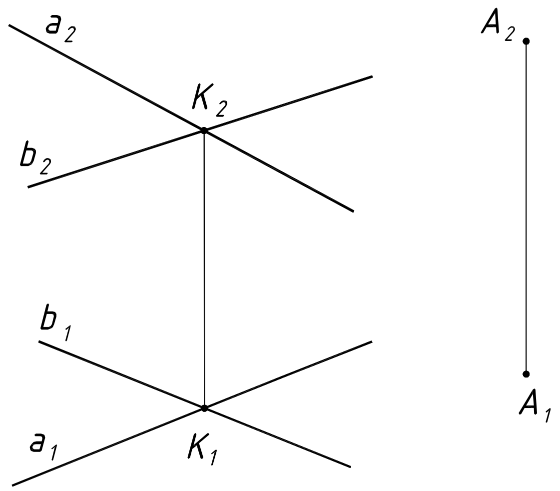


Рисунок 3.2

3.2 Параллельность двух плоскостей

Признак параллельности плоскостей: если две пересекающиеся прямые, принадлежащие одной плоскости, соответственно параллельны двум пересекающимся прямым, принадлежащим другой плоскости, то такие плоскости взаимно параллельны (рис.3.3).

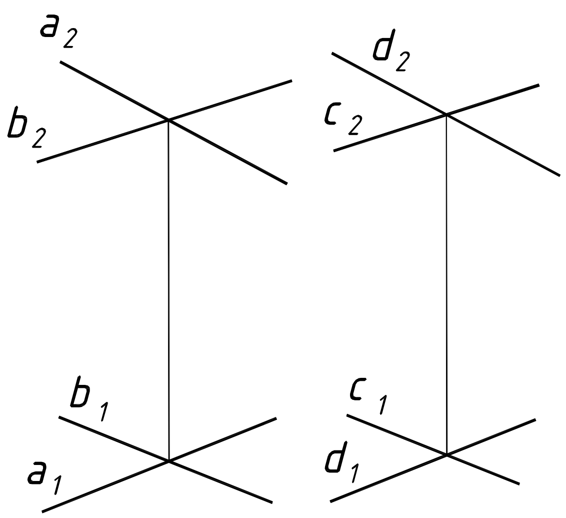


Рисунок 3.3

3.3 Теорема о проецировании прямого угла

Теорема. Прямой угол проецируется на плоскость проекций в натуральную величину (без искажения), если одна из его сторон параллельна этой плоскости проекций, а вторая не перпендикулярна к ней (рис. 3.4 а).

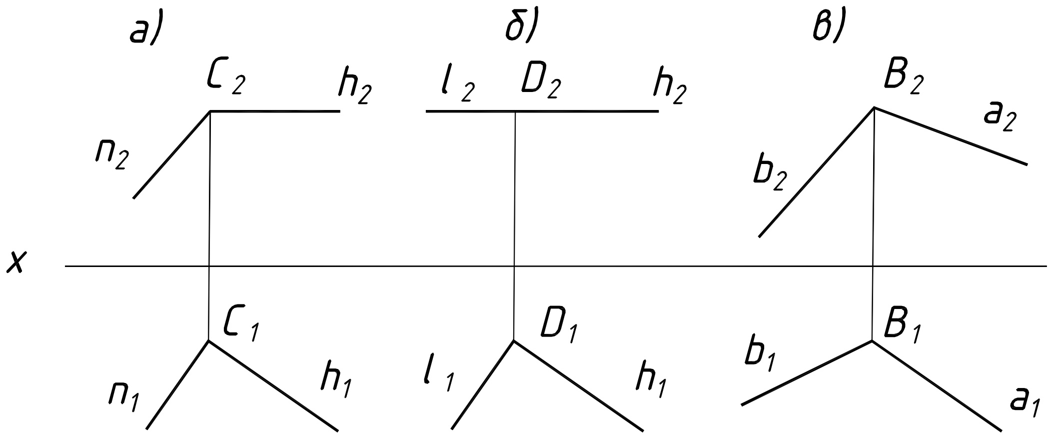


Рисунок 3.4

Возможны следующие случаи проецирования прямого угла.

Если обе стороны угла параллельны какой-либо плоскости проекций, то угол проецируется на эту плоскость в натуральную величину (рис. 3.4, б).

Если обе стороны прямого угла будут прямыми общего положения, то прямой угол проецируется на плоскости проекций с искажением (рис. 3.4, в).

3.4 Перпендикулярность прямой и плоскости

Теорема. Прямая перпендикулярна плоскости, если она перпендикулярна двум пересекающимся прямым, принадлежащим данной плоскости (рис.3.5).

В качестве пересекающихся прямых плоскости выбирают произвольные горизонтали и фронтали этой плоскости.

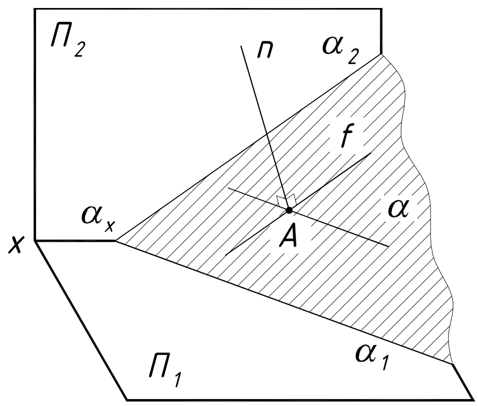


Рисунок 3.5

Следствие: Если прямая ⊥ плоскости, то горизонтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна горизонтальной проекции горизонтали, а фронтальная проекция перпендикуляра перпендикулярна фронтальной проекции фронтали (рис.3.6).

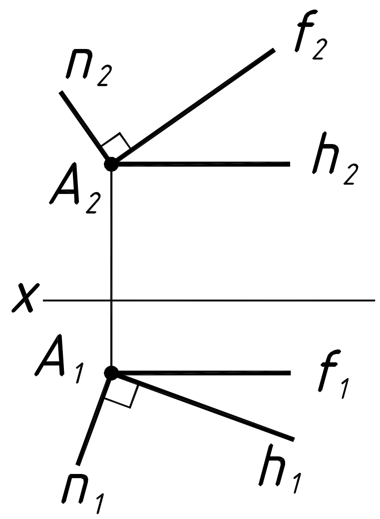


Рисунок 3.6

Пример. Из точки ***A*** восстановить перпендикуляр к плоскости ***Δ ABC*** (рис.3.7).

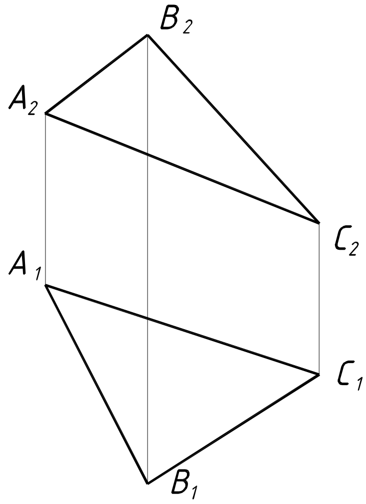


Рисунок 3.7

3.5 Перпендикулярность двух плоскостей

Признак перпендикулярности двух плоскостей: если одна из плоскостей содержит в себе прямую, перпендикулярную второй плоскости, то такие плоскости взаимно перпендикулярны.

Пример. Через точку $\boldsymbol{K}$ построить плоскость $\boldsymbol{\beta}$, перпендикулярную плоскости $\boldsymbol{\alpha(m \cap n)}$ (рис.3.8).

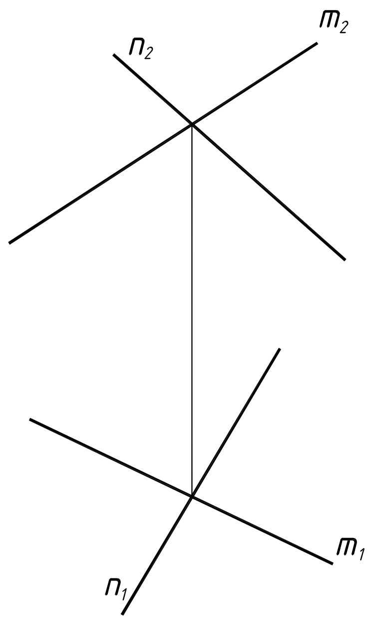


Рисунок 3.8

3.6 Пересекающиеся плоскости

Две плоскости пересекаются по прямой, для построения которой необходимо определить две точки, принадлежащие одновременно каждой из пересекающихся плоскостей, либо одну общую точку, если известно направление линии пересечения.

1. Обе плоскости перпендикулярны одной и той же плоскости проекций (рис.3.9).
2. Плоскости перпендикулярны разным плоскостям проекций (рис.3.10).
3. Одна из плоскостей перпендикулярна плоскости проекций, а вторая общего положения (рис.3.11, 3.12).
4. Обе плоскости общего положения (рис.3.13).

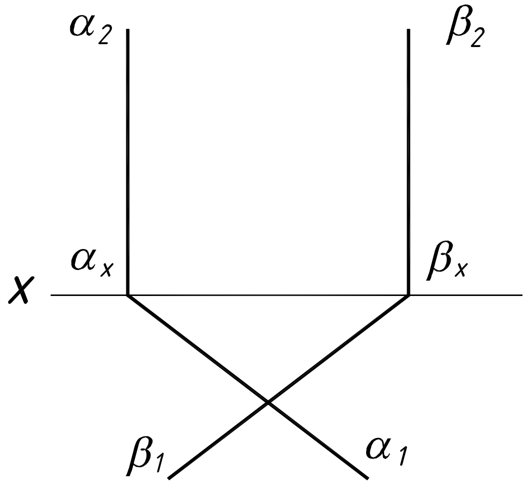


Рисунок 3.9

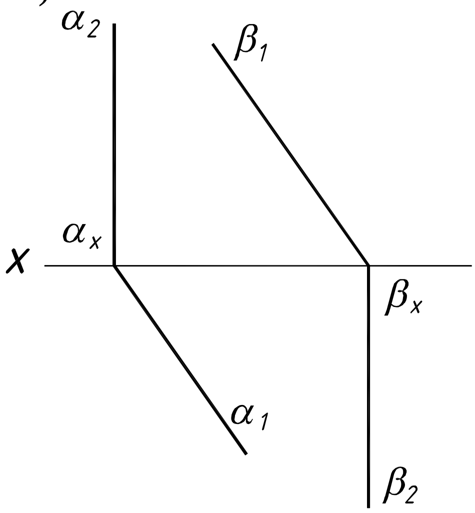


Рисунок 3.10

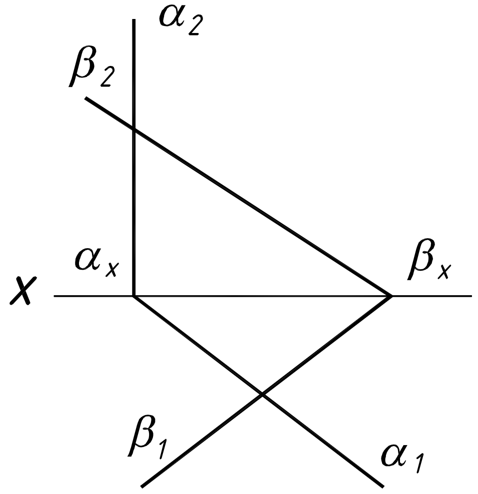


Рисунок 3.11

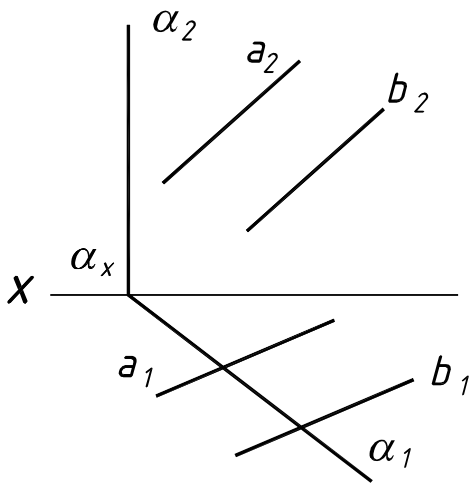


Рисунок 3.12

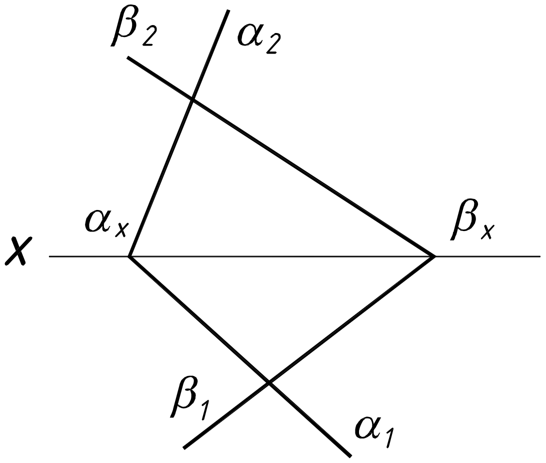


Рисунок 3.13

Пример. Построить линию пересечения плоскостей $\boldsymbol{\alpha}$ ***(***$\boldsymbol{\alpha_1}$***,*** $\boldsymbol{\alpha_2}$***)*** и $\boldsymbol{\beta}$ ***(***$\boldsymbol{\Delta ABC}$***)*** (рис.3.14).

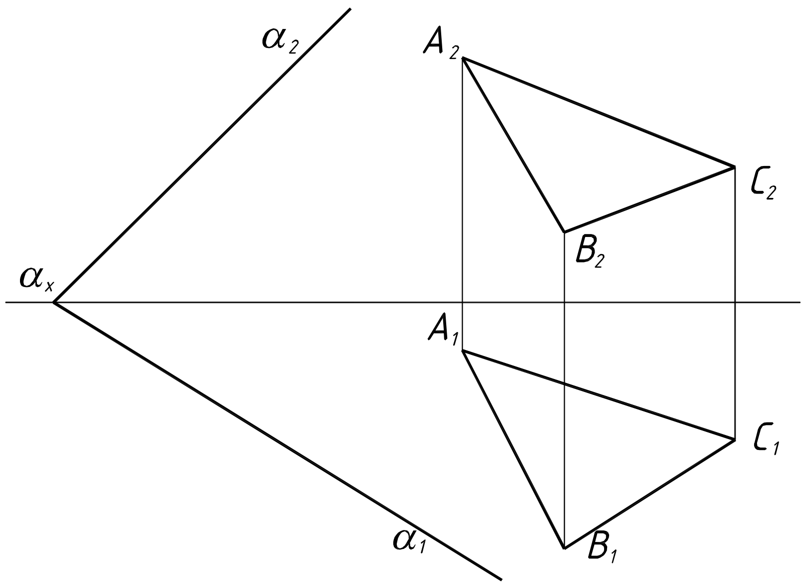


Рисунок 3.14

Ход решения:

1. Вводим плоскость-посредник γ (обычно плоскость частного положения, уровня или проецирующую).

2. Находим проекции линии пересечения плоскостей γ и α.

3. Находим проекции линии пересечения плоскостей γ и β.

4. Находим проекции точки ***К***. ***К*** – точка общая для 3-х плоскостей α, β и γ.

Повторяем алгоритм решения задачи, вводим плоскость - посредник δ.

Определяем вторую общую точку, например, ***М***.

3.7 Пересечение прямой с плоскостью

При решении задач можно выделить три случая:

1. Прямая общего положения и плоскость частного положения.
2. Прямая частного положения и плоскость общего положения.
3. Прямая и плоскость общего положения.

Определим точку встречи прямой с плоскостью в первых двух случаях (рис.3.15).

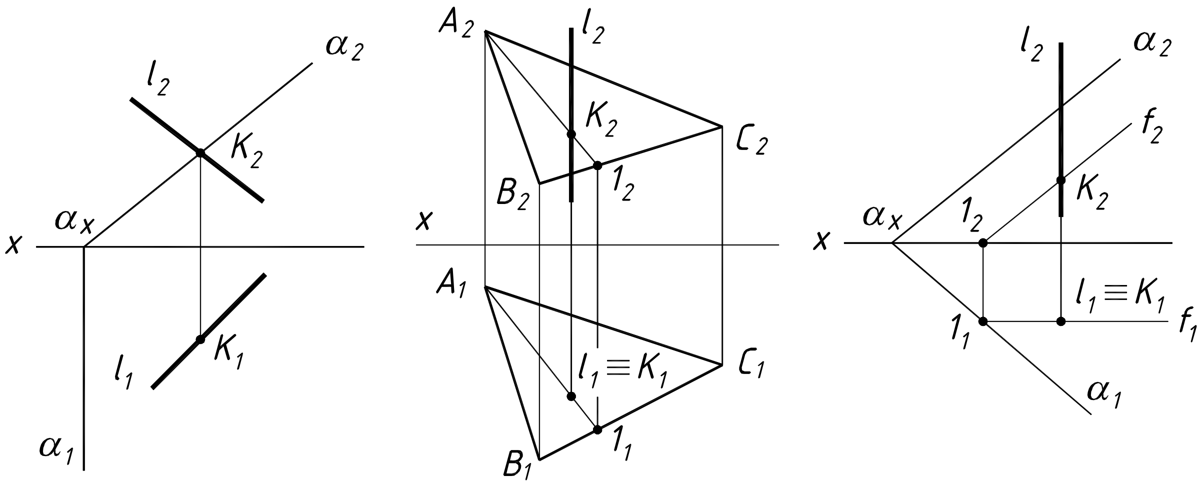


Рисунок 3.15

В первом примере используем свойство проецирующих плоскостей: (любой геометрический образ, ппринадлежащий плоскости частного положения, проецируется на след этой плоскости). Во втором примере горизонтальная проекция точки пересечения совпадает с горизонтальной проекцией прямой (K_1 = l_1). Для нахождения фронтальной проекции точки K_2 проводим через точку ***К*** прямую,принадлежащую плоскости, например***, n*** (n_1, n_2). Третий пример аналогичен второму (для решения используем фронталь ***f***).

Рассмотрим третий общий случай. Задача по определению точки пересечения (встречи) прямой с плоскостью носит название основной задачи начертательной геометрии.

Алгоритм решения задачи:

1. Заключаем прямую во вспомогательную плоскость (частного положения).
2. Определяем линию пересечения заданной плоскости со вспомогательной плоскостью.
3. Определяем точку пересечения прямой заданной с прямой, построенной в пункте 2.
4. Решаем вопрос видимости на чертеже.

Пример. Определить точку пересечения прямой $\boldsymbol{l}$ с плоскостью $\boldsymbol{\beta\ (m \parallel n)}$ (рис. 3.16).

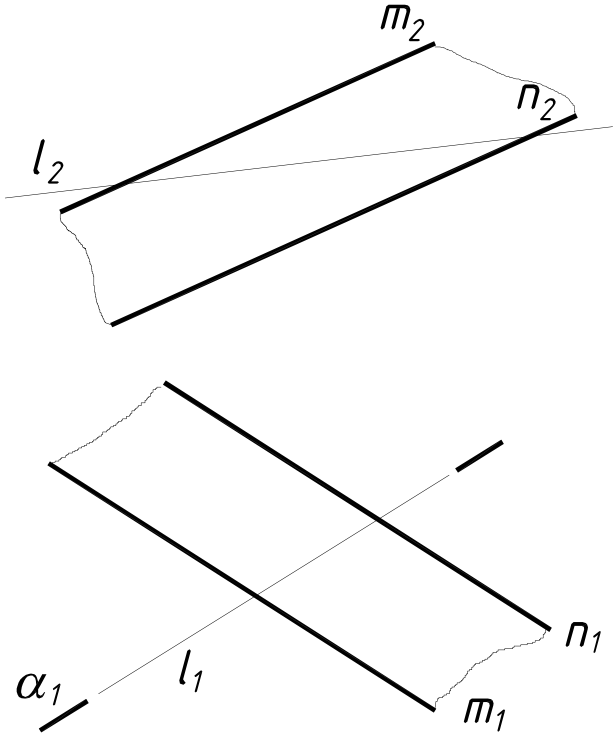


Рисунок 3.16

В этом случае решение задачи сводится к следующему алгоритму:

1. Заключаем прямую $\boldsymbol{l}$ во вспомогательную горизонтально-проецирующую плоскость $\alpha \perp \Pi_1$, при этом $\alpha_1 \subset l_1$ (совпадает).
2. Находим проекции линии пересечения плоскости α и $\boldsymbol{\beta\ (m \parallel n) = 1_1,\ 2_1}$ и $\boldsymbol{1_2\ 2_2}$.
3. Определяем проекции точки $\boldsymbol{K\ (K_1, K_2)}$. $\boldsymbol{K_2 = l_2 \cap 1_2, 2_2}$, $\boldsymbol{K_1 \in l_1}$.
4. Определяем видимость прямой.

Точка $\boldsymbol{K}$ – всегда видимая (т. к. является общей для геометрических образов). Для определения видимости на фронтальной проекции возьмем пару фронтально-конкурирующих точек, например, ***4*** и ***5***. Эти точки лежат на фронтально-проецирующем луче. Фронтальные проекции точек совпадают $\boldsymbol{4_2 \equiv 5_2}$, а горизонтальная проекция точки ***5*** расположена ближе к наблюдателю, чем точки ***1***, значит прямая ***l*** расположена ближе, чем прямая ***1***, ***2***, а следовательно, на фронтальной проекции прямая ***l*** до точки ***К*** будет видна.

Для определения видимости на горизонтальной плоскости проекций поступаем аналогично, выбирая горизонтально-конкурирующую пару точек (***1, 3***).

Пример. Определить точку пересечения прямой с плоскостью, заданной следами (общий случай). Применяем алгоритм решения основной задачи начертательной геометрии (рис. 3.17). Видимость определяется аналогично.

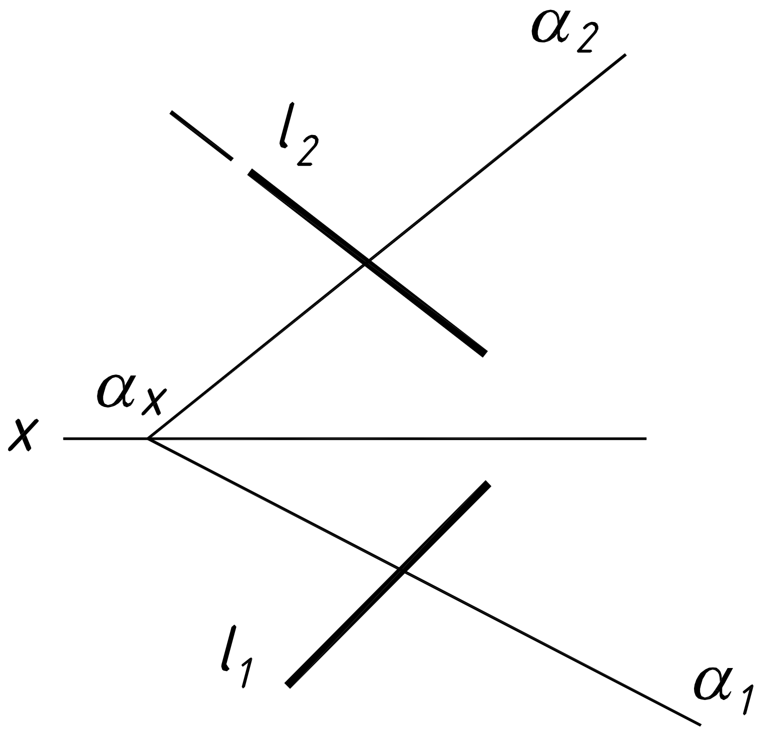


Рисунок 3.17

Лекция 4

ПОВЕРХНОСТИ

Классификация плоскостей. Гранные поверхности и многогранники. Кривые поверхности. Точка и линия на поверхности.

4.1 Классификация поверхностей

В зависимости от вида образующей все поверхности можно подразделить на две группы:

- Линейчатые – образующей которых является прямая линия.
- Нелинейчатые – поверхности с криволинейной образующей.

Линейчатые поверхности подразделяются на:

- Развертываемые – это такие поверхности, которые можно совместить с плоскостью без разрыва и складок.
- Неразвертываемые (невозможно совместить).

4.2 Гранные поверхности и многогранники

Гранные поверхности – это поверхности, образованные перемещением прямолинейной образующей по ломаной линии. Примером могут служить:

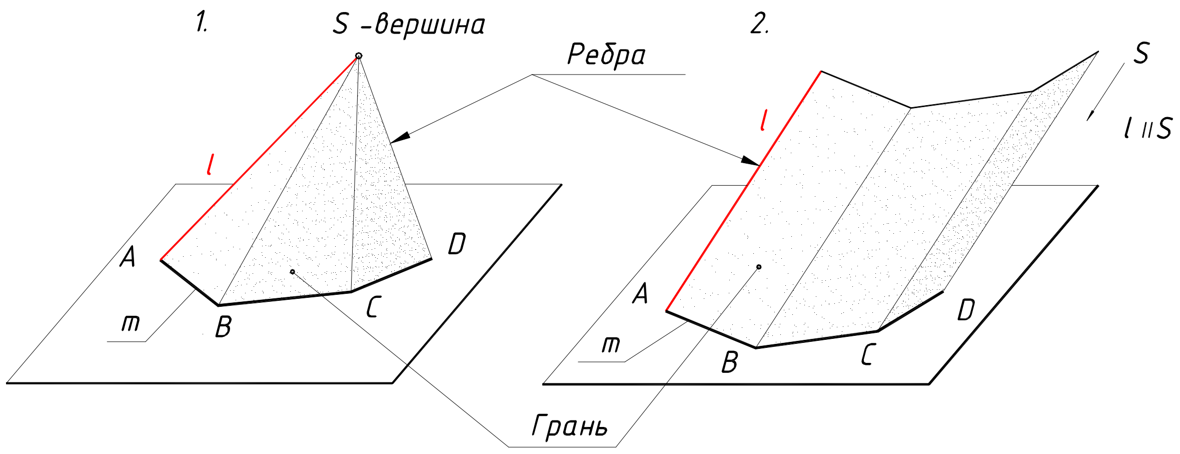


Рисунок 4.1

Элементы поверхностей: ***m*** - направляющая (ломаная); ***l*** - образующая (прямая); ***S*** - вершина; ***ABS*** - грань (часть плоскости); ***SA, SB***- ребра (линии пересечения смежных граней).

Часть пространства, ограниченная со всех сторон поверхностью, называется телом.

Многогранники – это замкнутые поверхности, образованные некоторым количеством граней.

Пирамида – многогранник, у которого одна грань, принимаемая за основание, является произвольным многоугольником, а остальные грани (боковые)- треугольниками с общей точкой, называемой вершиной.

В зависимости от количества вершин у многоугольника основания различают треугольные, четырехугольные, пятиугольные и т. д. пирамиды.

Призма - многогранник, у которого две грани-основания одинаковые и взаимопараллельные многоугольники, а остальные грани – параллелограммы. В зависимости от числа вершин у многоугольника основания призмы, так же как и пирамиды, называют трехгранными, четырехгранными и т. д.

Призма называется *прямой*, если ее ребра перпендикулярны к плоскости основания, и *наклонной*, если не перпендикулярны. Призма, основанием которой является параллелограмм, называется *параллелепипедом*. Прямоугольный параллелепипед, все ребра которого конгруэнтны между собой, называется *кубом*.

4.2.1 Проецирование многогранников. Точка и линия на поверхности многогранников

Точка принадлежит поверхности, если она принадлежит прямой линии, лежащей на этой поверхности. Прямая принадлежит поверхности, если она проходит через 2 точки, принадлежащие поверхности (рис.4.2). Точка ***1*** принадлежит поверхности, так как принадлежит прямой ***SE*** на этой поверхности. Аналогично строится точка ***2***.

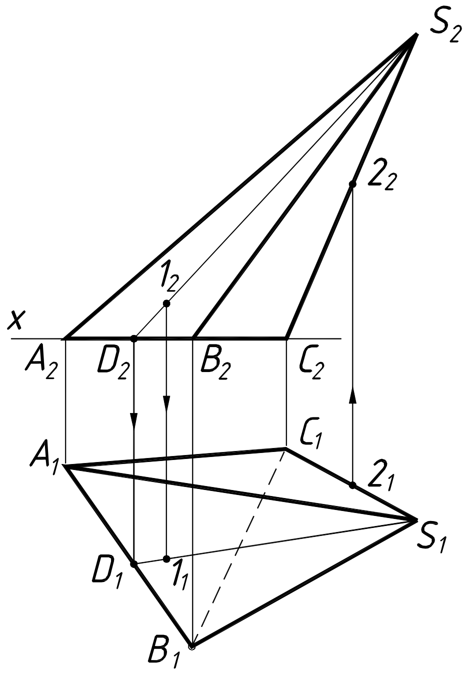


Рисунок 4.2

4.3 Кривые поверхности

Рассмотрим образование конической и цилиндрической поверхностей.

Конусом называется тело, ограниченное частью конической поверхности, расположенной по одну сторону от вершины, и плоскостью, пересекающей все образующие по ту же сторону от вершины.

Цилиндром называется тело, ограниченное цилиндрической поверхностью и двумя параллельными плоскостями, называемыми основаниями. Основания кругового цилиндра - это конгруэнтные круги. Цилиндр может быть прямым (если образующие перпендикулярны основанию) и наклонным, если не перпендикулярны.

Конус и цилиндр можно рассматривать как поверхности вращения (рис.4.3). Конус как тело, образованное вращением прямоугольного треугольника ***SOA*** вокруг катета ***SO***, принятого за ось вращения. Цилиндр - как тело, образованное вращением прямоугольника ***OBAC*** вокруг стороны ***CO***, принятой за ось вращения.

К поверхностям вращения относятся также поверхности сферы (шара) и поверхности тора (кольца).

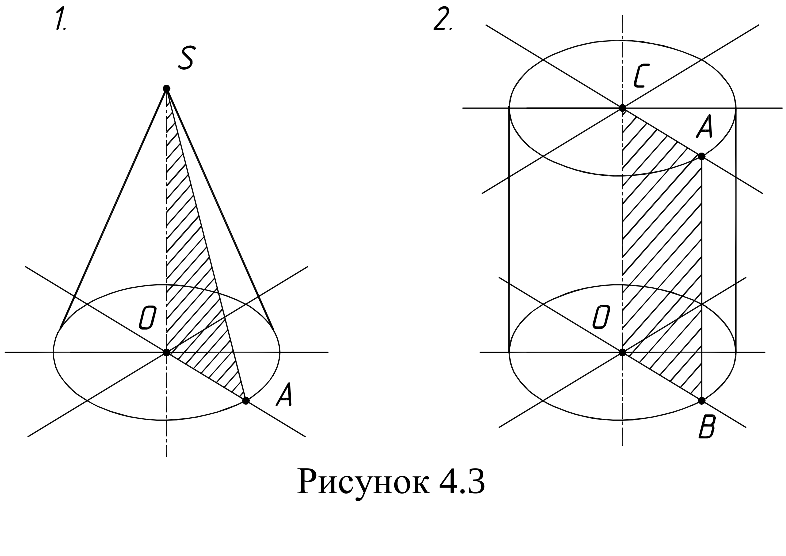


Рисунок 4.3

4.3.1 Проецирование поверхностей вращения. Точка и линия на поверхности вращения

Пример. Достроить недостающие проекции точек, расположенных на заданных поверхностях.

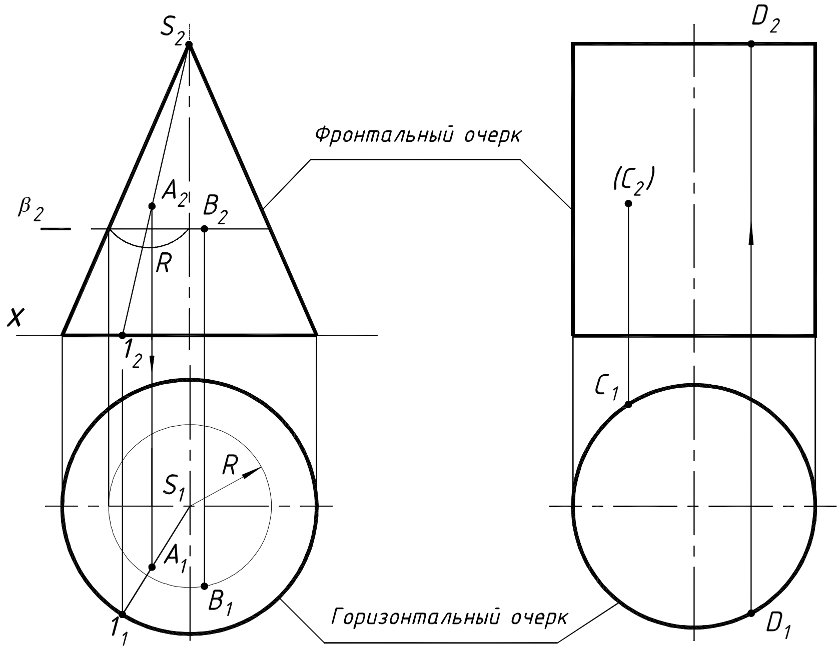


Рисунок 4.4

Для построения фронтальной проекции точки ***A*** - A_2 по заданной A_1 необходимо через горизонтальную проекцию точки ***A*** провести горизонтальную проекцию образующей $S_1 1_1$. Определяем фронтальную проекцию образующей $S_2 1_2$. Точка $A \in$ поверхности конуса, так как $\in$ образующей ***S1*** конуса (рис.4.4).

Для построения B_2 через проекцию точки B_1 проводят секущую плоскость β – горизонтального уровня, которая пересекает конус по окружности радиуса R. $B_1 \in$ горизонтальной проекции этой окружности и так как видимая - находится ближе к наблюдателю.

По заданной фронтальной проекции точки ***C*** строим горизонтальную. Цилиндр занимает проецирующее положение, значит C_1 будет лежать на очерке цилиндра. Так как точка – невидимая (C_2), то находится дальше от наблюдателя. Аналогично строят проекции точки ***D***.

Контурная линия - это линия, по которой касаются проецирующие лучи при проецировании поверхности. *Очерк* – это проекция контурной линии на плоскости проекций.

Лекция 5

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТИ ПЛОСКОСТЬЮ. РАЗВЕРТКА

Пересечение поверхности плоскостью. Способ ребер. Способ граней. Способ вспомогательных секущих плоскостей. Развертывание поверхностей. Способы построения разверток. Способ треугольников. Способ нормального сечения. Способ раскатки.

5.1 Пересечение поверхности плоскостью

В общем случае, при пересечении поверхности плоскостью, определяют ряд общих точек, принадлежащих одновременно поверхности и плоскости. Полученные точки соединяют *ломаной* линией, если поверхность гранная, и плавной *лекальной кривой*, если поверхность криволинейная. В результате получается фигура, которая называется сечением. Для построения точек, принадлежащих линии сечения, используют следующие способы:

1. Способ ребер.
2. Способ граней.
3. Способ вспомогательных секущих плоскостей.

Рассмотрим случаи, когда секущая плоскость занимает частное положение.

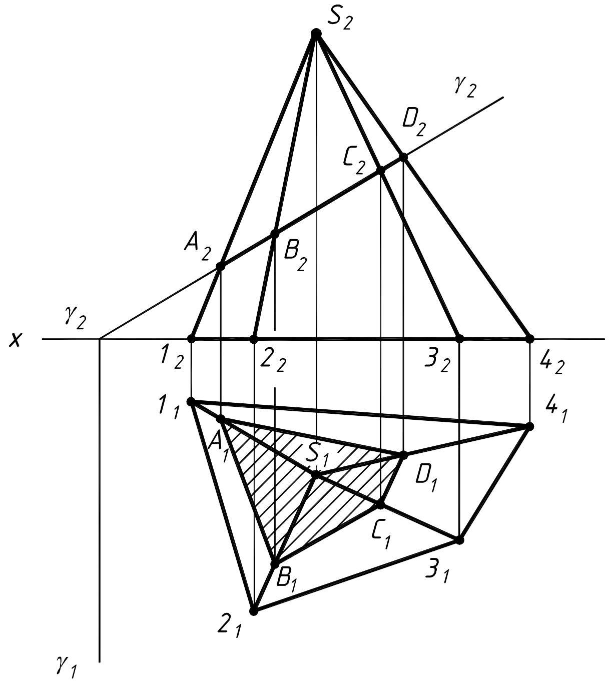


Рисунок 5.1

Плоскость $\boldsymbol{\gamma}$ занимает фронтально-проецирующее положение ($\boldsymbol{\gamma} \perp \boldsymbol{\Pi_2}$) и обладает собирательным свойством, следовательно фронтальная проекция линии сечения совпадает со следом плоскости $\boldsymbol{\gamma_2}$ – это проекция $\boldsymbol{A_2\ B_2\ C_2\ D_2}$. Вторая проекция линии сечения $\boldsymbol{A_1\ B_1\ C_1\ D_1}$ строится при помощи линий проекционной связи на горизонтальных проекциях соответствующих ребер.

Для построения линий сечения конуса плоскостью рассмотрим сначала конические сечения (рис.5.2):

Окружность – секущая плоскость параллельна плоскости основания;

Эллипс - секущая плоскость наклонена к плоскости основания;

Треугольник – секущая плоскость проходит через вершину и основание конуса;

Точка – секущая плоскость проходит через вершину конуса;

Парабола – секущая плоскость параллельна образующей конуса;

Гипербола – секущая плоскость параллельна оси вращения.

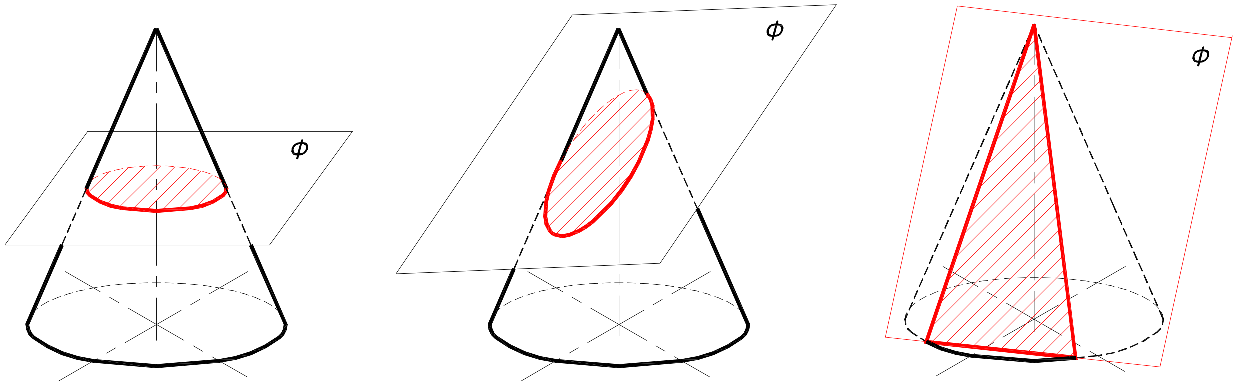


Рисунок 5.2

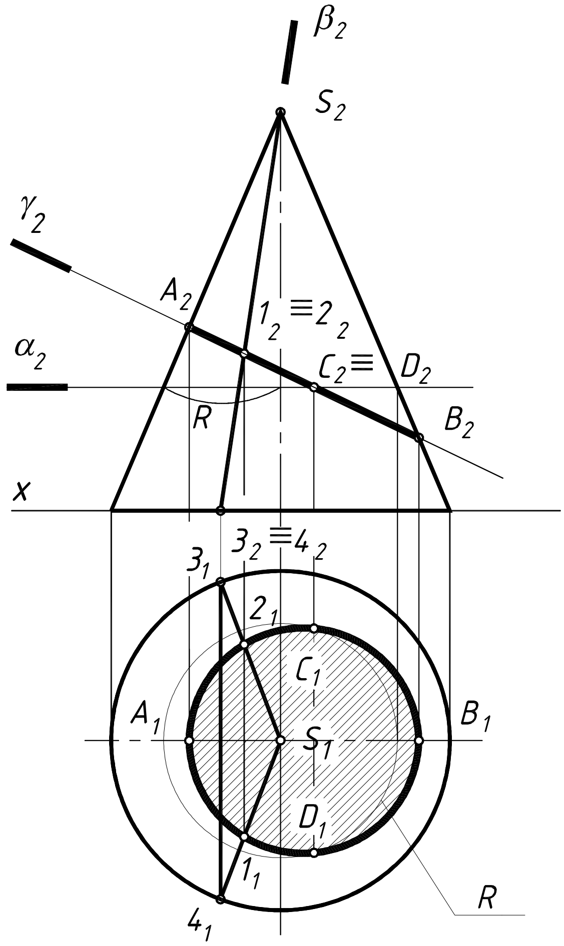


Рисунок 5.3

Построение сечения конуса плоскостью ***γ*** (рис.5.3) начинаем с опорных точек: очерковые, высшая, низшая и т. д. Фронтальная проекция эллипса совпадает с фронтальным следом плоскости γ_2. Горизонтальную проекцию можно построить по большой и малой оси или при помощи промежуточных точек.

АВ - большая ось эллипса, точки ***A*** и ***B*** принадлежат очерковым образующим. ***C*** и ***D*** принадлежат малой оси эллипса, точки ***1***, ***2*** принадлежат промежуточным образующим.

Пример. Построить проекции линии пересечения цилиндра плоскостью (рис.5.4).

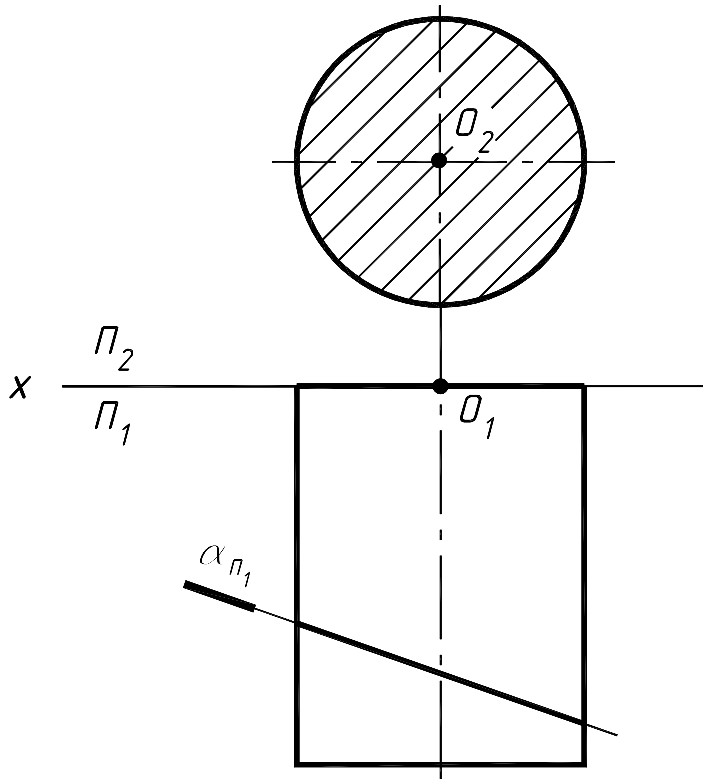


Рисунок 5.4

В данном случае плоскость $\alpha \perp \Pi_1$. Следовательно, горизонтальная проекция линии сечения совпадает с горизонтальным следом плоскости. Кроме того, так как цилиндр занимает проецирующее положение, то фронтальная проекция линии сечения совпадает с очерком цилиндра на фронтальной плоскости проекций.

Рассмотрим случаи пересечения поверхности плоскостью, когда плоскость занимает общее положение.

5.1.1 Способ ребер

Суть способа ребер заключается в том, что определяются точки пересечения ребер (или образующих поверхности) с заданной секущей плоскостью, т. е. задача сводится к решению задачи п нахождению точки пересечения прямой с плоскостью. Полученные точки соединяют либо в ломаную линию, либо в лекальную кривую.

Пример. Построить проекции линии пересечения пирамиды плоскостью (рис.5.5).

В данном примере точки ***E*** и ***F*** принадлежат основанию пирамиды, так как след γ_1 пересекает горизонтальную проекцию основания пирамиды 1, 2, 3. Поэтому необходимо определить точку ***К*** на ребре ***S3,*** и линией пересечения пирамиды плоскостью будет Δ ***EKF***.

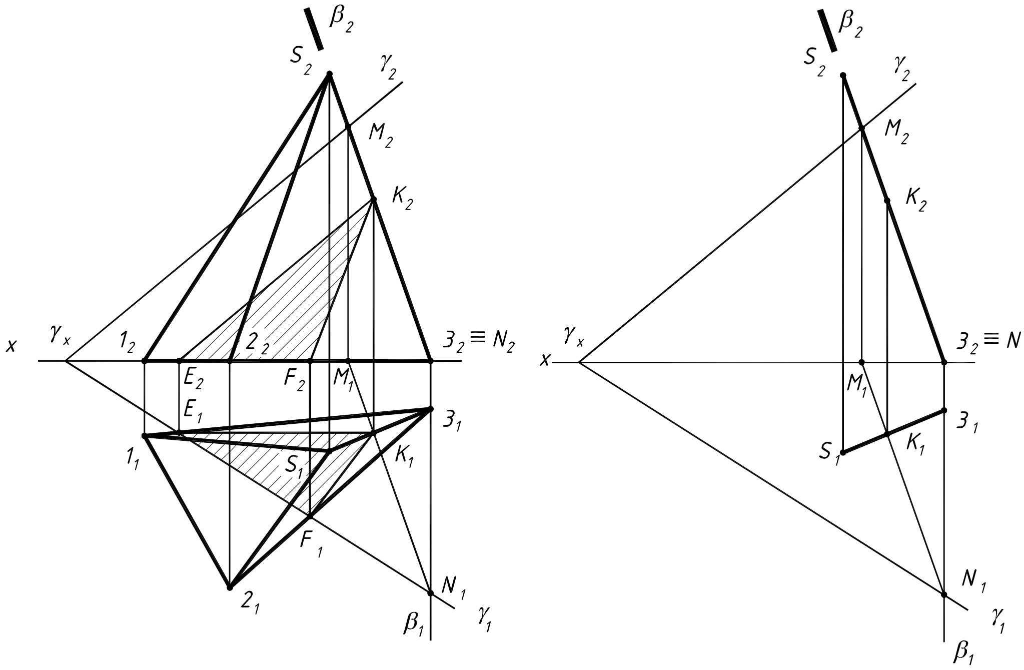


Рисунок 5.5

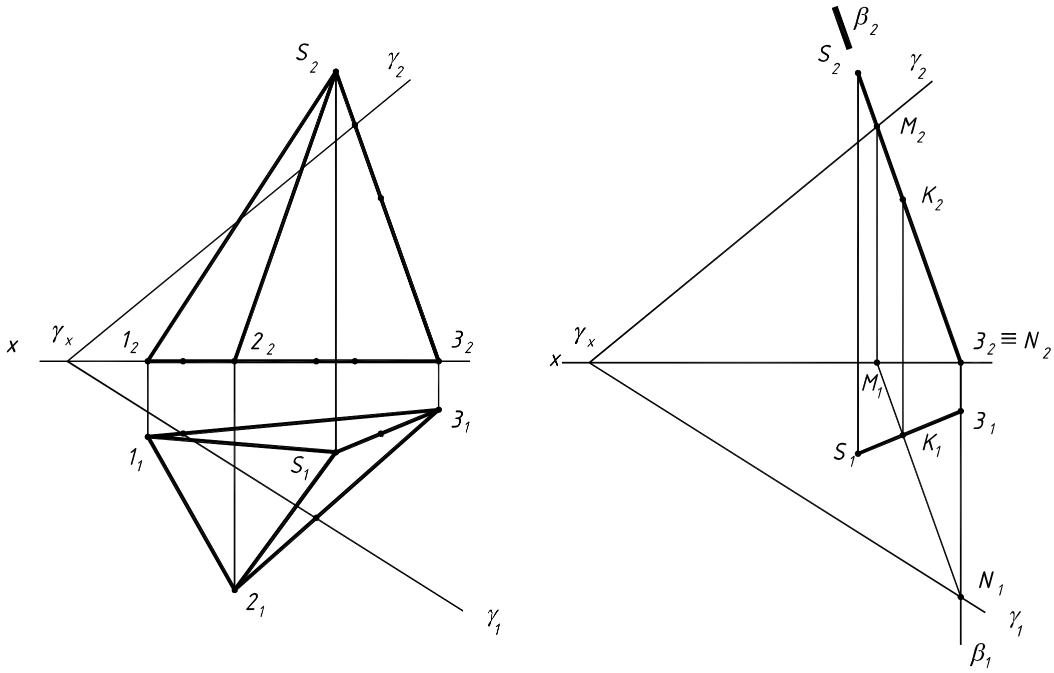


Рисунок 5.6

Для определения точки $\boldsymbol{K}$ на ребре $\boldsymbol{S3}$ необходимо:

1. Заключить ребро S3 во вспомогательную фронтально-проецирующую плоскость $\beta \perp \Pi_2$ (рис. 5.6, б).

2. Затем находим проекции линии пересечения плоскости β и $\alpha = M_1N_1$ и M_2N_2.

3. Определяем проекции точки K (K_1, K_2) на пересечении $S_1 3_1$ и M_1N_1 - K_1, и $K_2 \in S_2 3_2$.

4. Соединяем точки $\boldsymbol{FE}$ и $\boldsymbol{K}$ с учетом видимости на горизонтальной и фронтальной проекциях.

Аналогично решаем задачу, если задана поверхность конуса. В качестве ребер используют образующие.

5.1.2 Способ граней

Способ граней применяется в том случае, когда заданная поверхность гранная и проецирующая. В этом случае определяют линию пересечения каждой грани с данной плоскостью.

Пример. Построить проекции линии пересечения прямой призмы плоскостью (рис.5.7).

Так как призма занимает горизонтально-проецирующее положение, линия сечения поверхности плоскостью на горизонтальной проекции будет совпадать с проекцией основания ABCD. Необходимо поочередно заключить грани в плоскости-посредники и найти две пары точек, принадлежащих линии сечения.

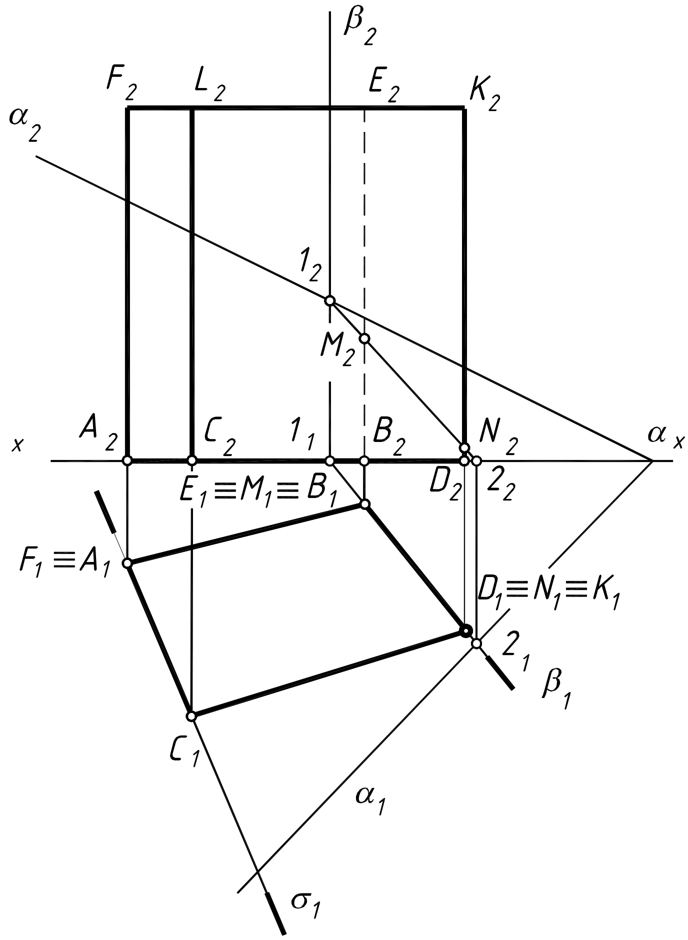


Рисунок 5.7

1. Заключаем грань ***BDKE*** в горизонтально-проецирующую плоскость $\boldsymbol{\beta}$. След плоскости $\boldsymbol{\beta_1}$ совпадает при этом с горизонтальной проекцией грани $\boldsymbol{B_1D_1K_1E_1}$.

2. Определяем линию пересечения плоскостями $\boldsymbol{\alpha}$ и $\boldsymbol{\beta}$, $\boldsymbol{1, 2 = \alpha \cap \beta}$.

3. Определяем линию пересечения грани ***BDEK*** плоскостью $\boldsymbol{\alpha}$ – линия ***MN.***

Аналогично определяем линию пересечения грани ***ACLF***.

5.2 Развертывание поверхностей. Способы построения разверток

Развертка представляет собой фигуру на плоскости, в которую преобразуется поверхность.

Развертывающимися называются поверхности, которые без складок и разрывов можно совместить с плоскостью. Все гранные поверхности являются развертываемыми. В зависимости от вида поверхностей для построения развертки применяют нижеперечисленные способы.

5.2.1 Способ треугольников

Этот способ, в основном, применяют для построения разверток пирамидальных и конических поверхностей.

Пример. Построить развертку усеченной части пирамиды (рис.5.8).

При построении развертки этим способом определяют натуральные величины (н.в.) всех ребер или образующих, а также натуральную величину основания. В данной задаче н. в. образующих определяют вращением вокруг проецирующей оси $\boldsymbol{i} \perp \boldsymbol{\Pi_1}$ и проходящую через вершину $\boldsymbol{S}$. Основание сразу проецируется в данном случае в н. в.

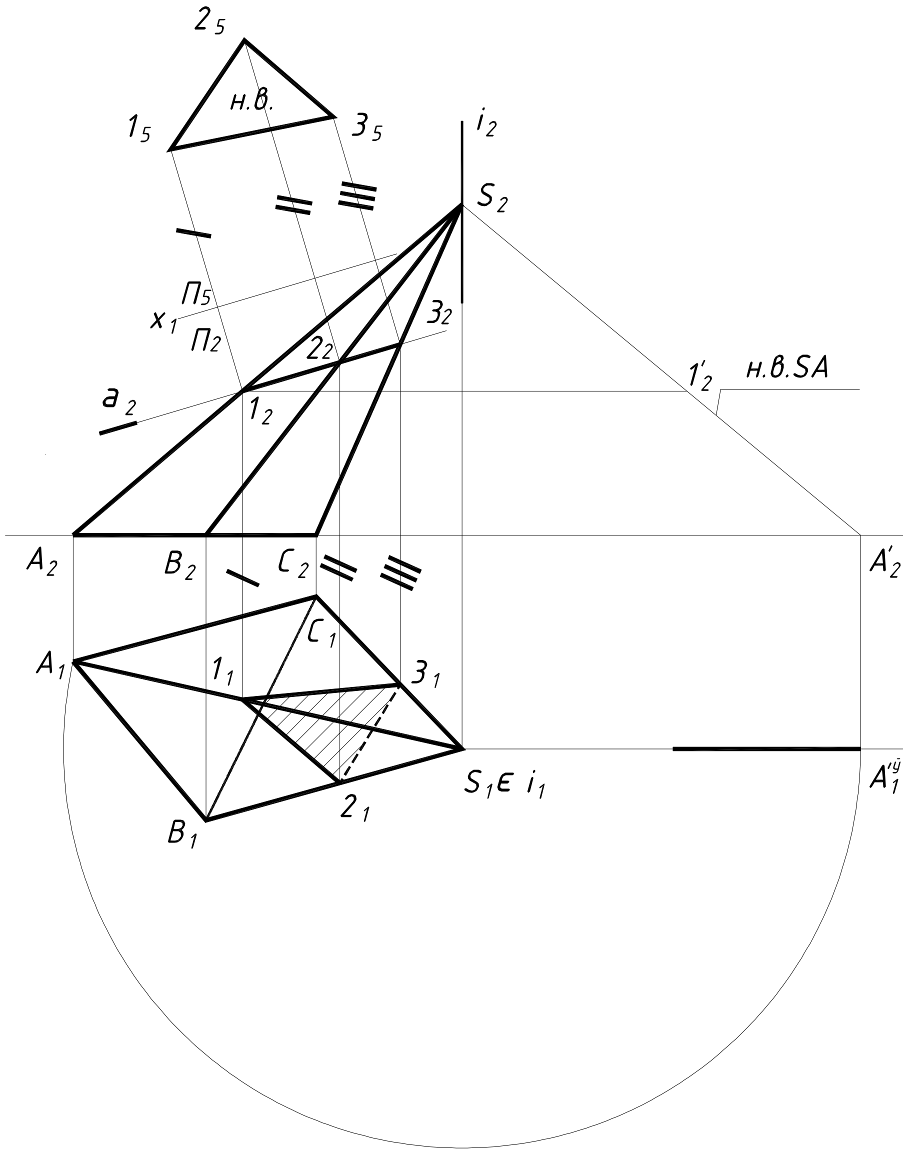


Рисунок 5.8

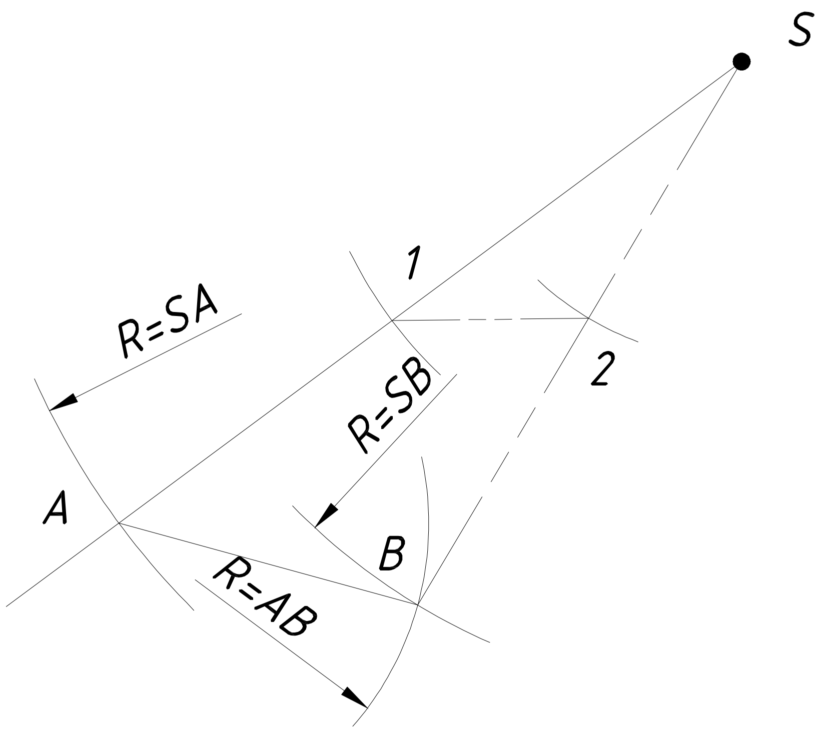


Рисунок 5.9

На свободном поле чертежа (рис. 5.9), используя способ засечек, строят треугольники граней и основание. Наносят линию сечения пирамиды плоскостью и достраивают н. в. сечения.

Аналогично строят развертку конической поверхности, предварительно разделив поверхность на 12 образующих.

5.2.2 Способ нормального сечения

Применяют для построения разверток призм и цилиндров, ребра или образующие которых занимают положение уровня.

Пример. Построить развертку усеченной части наклонной призмы (рис. 5.10).

В данной призме треугольники основания на горизонтальную плоскость проекций проецируются в натуральную величину. Ребра на фронтальную плоскость проекций проецируются в натуральную величину.

В любом месте по высоте призмы проводим нормальное сечение (перпендикулярное всем ребрам призмы).

Достраиваем горизонтальную проекцию сечения и находим натуральную величину способом плоскопараллельного перемещения.

На свободном поле чертежа проводим прямую горизонтальную линию, на которой откладываем периметр нормального сечения с отметкой характерных точек.

В каждой характерной точке восстанавливают ⊥ и на нем откладывают соответственно длины ребер, лежащие по обе стороны от нормального сечения.

Полученные точки соединяют линией (прямой или кривой).

Достраиваются верхнее и нижнее основания.

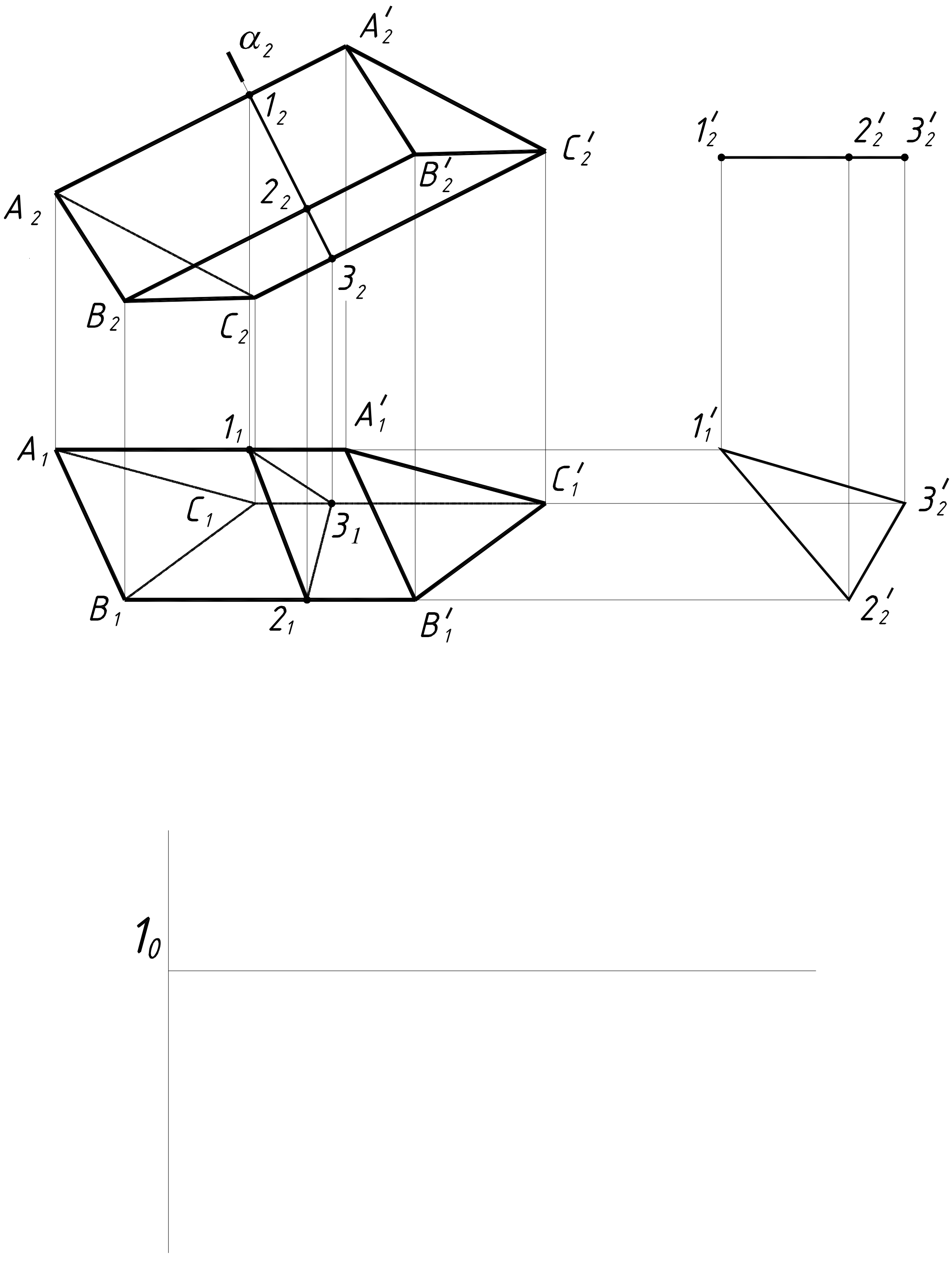


Рисунок 5.10

5.2.3 Способ раскатки

Способ раскатки применяют для наклонных призм и цилиндров (рис.5.11).

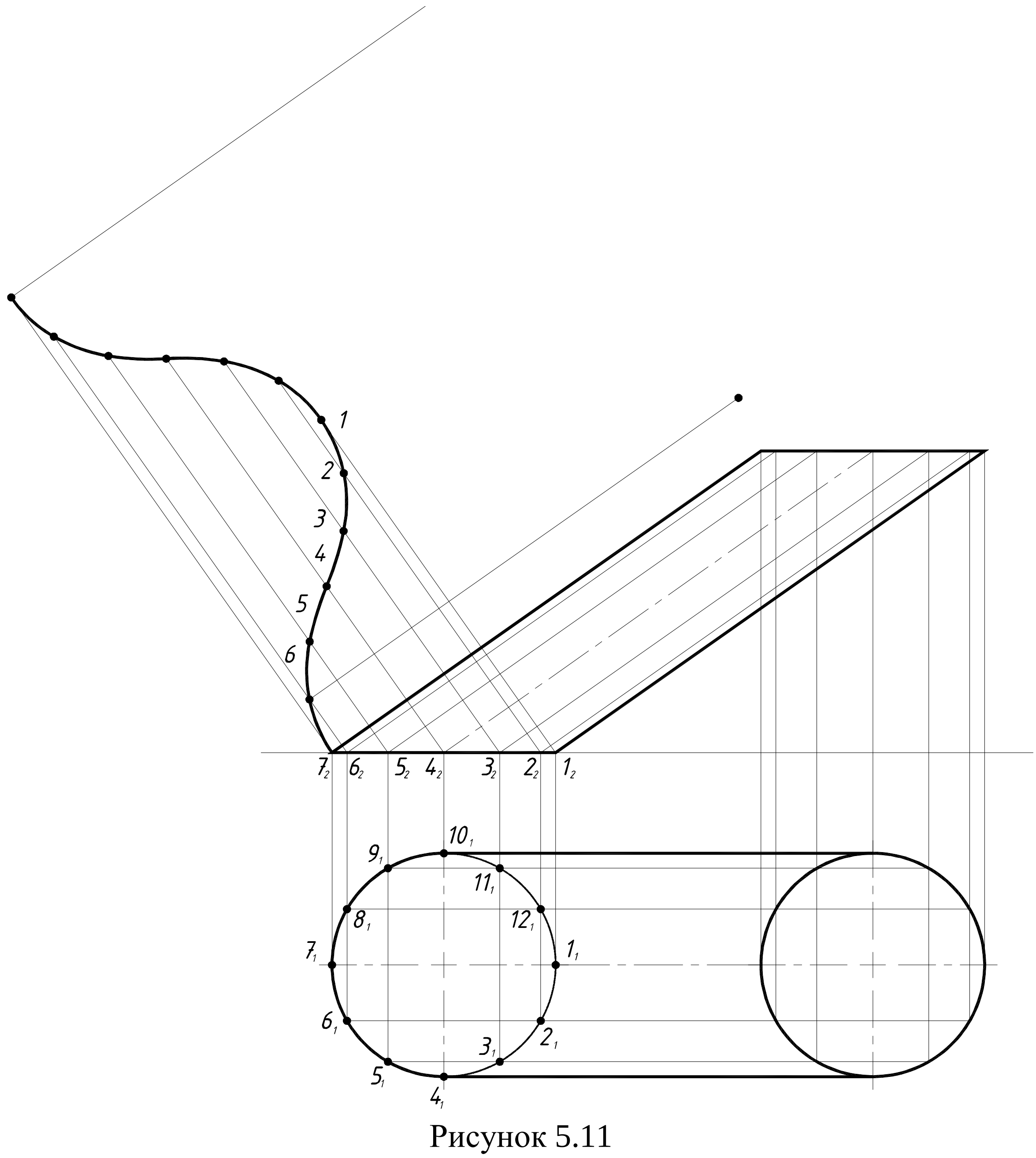


Рисунок 5.11

Для применения данного способа поверхность должна занимать положение уровня.

Цилиндр преобразуется в 12-гранную призму, для этого основание цилиндра делится на 12 частей и проводятся 12 образующих.

Из каждой точки деления основания восстанавливают перпендикуляр к натуральной величине образующих (на фронтальной проекции).

На этих перпендикулярах откладываются при помощи засечек длины сторон двенадцатиугольника, вписанного в окружность основания.

ПЕРЕСЕЧЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ

Общие сведения о пересечении поверхностей. Методы, используемые при нахождении линии пресечения поверхностей: метод вспомогательных секущих плоскостей - посредников; метод вспомогательных концентрических сфер - посредников.

6.1 Пересечение поверхностей. Общий алгоритм

1. Определяем зону пересечения поверхностей (рис.6.1).

2. Определяем характерные точки, принадлежащие линии пересечения: опорные точки (наивысшая и наинизшая точки на очерковых образующих).

3. Определяем промежуточные точки:

3.1. Заданные поверхности $\boldsymbol{\Phi}$ (фи) и $\boldsymbol{\Psi}$ (пси) пересекаем поверхностью-посредником Σ (сигма).

3.2. Находим линии пересечения каждой из заданных поверхностей ($\boldsymbol{\Phi}$, $\boldsymbol{\Psi}$) посредником $\boldsymbol{\Sigma}$ - $\boldsymbol{m}$ и $\boldsymbol{n}$.

3.3. Определяем точки взаимного пересечения линий m и n – точки 1 и 2.

Для нахождения необходимого количества точек линии пересечения – повторяем пункты 2-3 алгоритма необходимое количество раз.

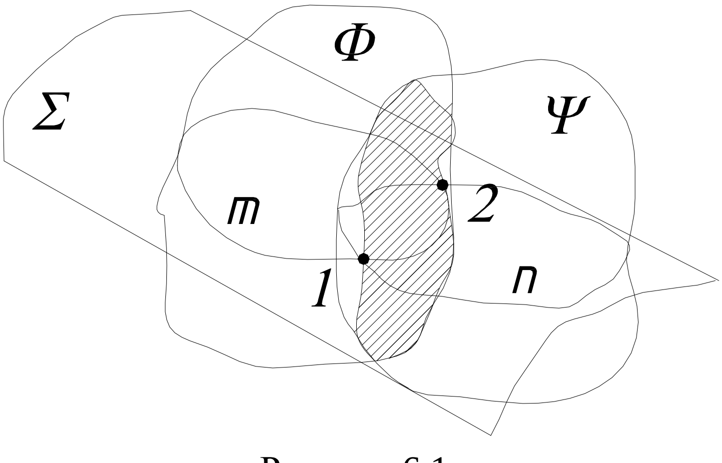


Рисунок 6.1

Зона пересечения поверхностей представляет собой замкнутую область, образованную очерковыми образующими пересекающихся поверхностей. Характерные точки ищем в зоне пересечения поверхностей на пересечении очерков образующих и осях, при условии, если они лежат в одной плоскости.

В качестве поверхностей -посредников, в зависимости от геометрических особенностей тел и характера их пересечения, можно выбрать:

а) вспомогательные плоскости частного положения;

б) плоскости общего положения;

в) вспомогательные секущие сферы (концентрические и эксцентрические).

При выборе поверхности-посредника руководствуемся простотой получаемых линий при пересечении заданных поверхностей плоскостью-посредником.

Различают три основные комбинации пересечения двух поверхностей:

а) пересечение двух многогранников – в сечении позволяет получить одну или две ломаные линии;

б) пересечение двух поверхностей вращения – позволяет получить одну или две плавные кривые линии;

в) пересечение «гранной» и «кривой» поверхностей – позволяет получить одну или две плавные пространственные кривые линии с изломом на рёбрах.

6.1.1 Методы, используемые при нахождении линии пресечения поверхностей

Нами будут рассмотрены два метода используемые при нахождении линии пресечения поверхностей:

- метод вспомогательных секущих плоскостей-посредников;
- метод вспомогательных концентрических сфер-посредников.

Алгоритм решения каждым из методов будет рассмотрен на конкретном примере.

Возможны три случая расположения пересекающихся поверхностей относительно плоскостей проекций:

- пересекающиеся поверхности занимают проецирующее положение;
- одна из пересекающихся поверхностей занимает общее положение, вторая частное;
- обе поверхности общего положения.

Выбор посредников зависит от заданных поверхностей и их взаимного положения.

6.2 Метод вспомогательных секущих плоскостей

***Пример**:* Построить линию пересечения поверхностей (рис.6.2) сферы и конуса (обе поверхности занимают общее положение).

Применяем общий алгоритм решения:

1. Определяем зону пересечения поверхностей.
2. Определяем характерные точки, принадлежащие линии пересечения:

опорные точки (наивысшая – точка ***1*** и наинизшая - точка ***2*** на очерковых образующих).

3. Определяем промежуточные точки. В качестве «посредников» выбираем плоскости частного положения (плоскости горизонтального уровня), которые пересекает сферу и конус по окружностям. Секущие плоскости проводим в зоне пересечения поверхностей.
4. Полученные точки соединяем плавной кривой. Точность аппроксимации линии пересечения зависит от принятого количества секущих плоскостей-посредников.
5. Видимость полученной линии пересечения поверхностей решаем методом конкурирующих точек.

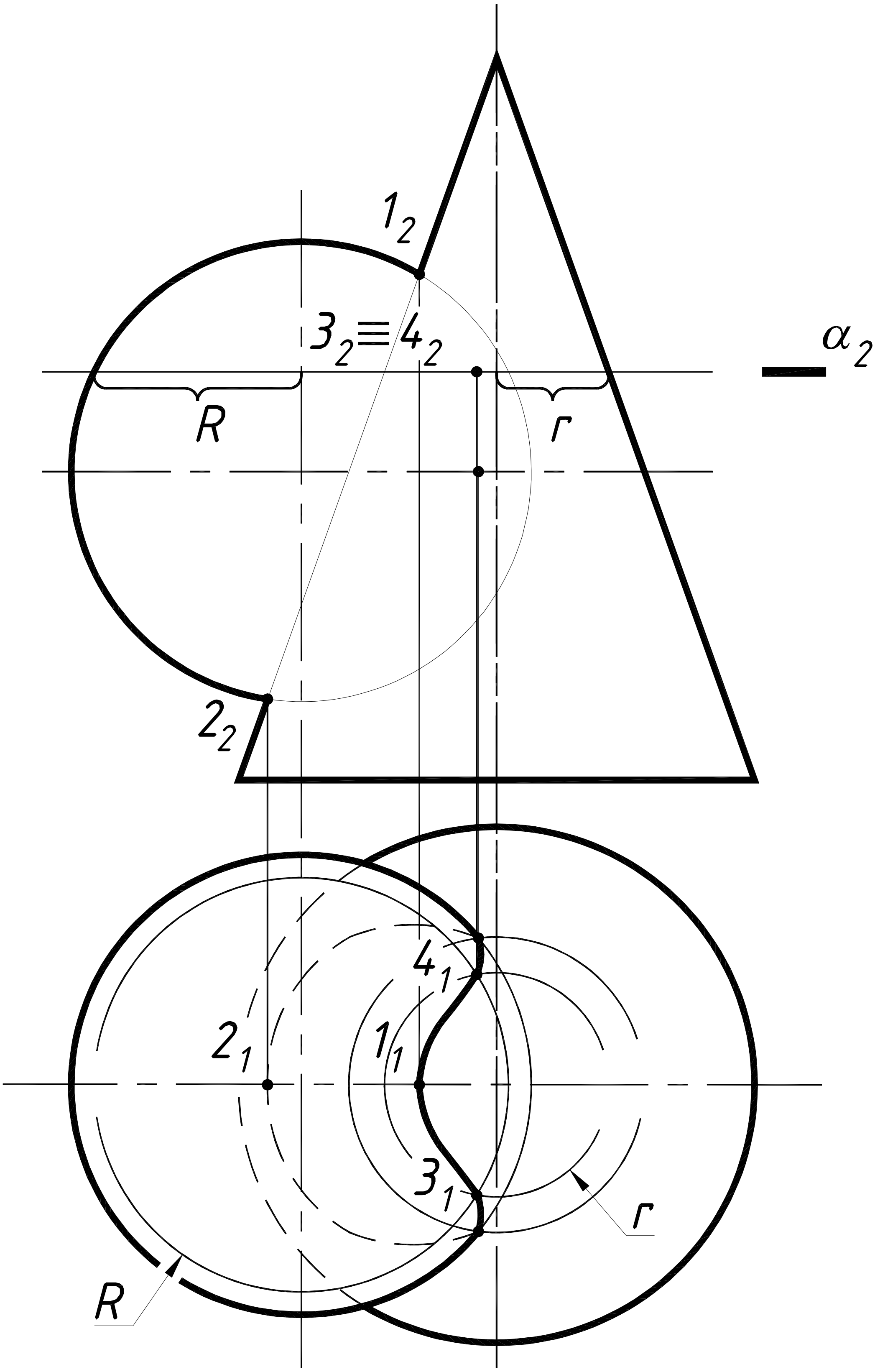


Рисунок 6.2

Примечание: если одна из поверхностей занимает проецирующее (частное) положение, то одна из проекций линии пересечения уже известна.

6.3 Способ вспомогательных секущих сфер (концентрических сфер - посредников)

Сфера, если центр ее расположен на оси поверхности вращения, пересекает эту поверхность по окружностям ***a*** и ***b*** (рис.6.3). Поэтому вспомогательные секущие сферы используют для построения линии пресечения поверхностей.

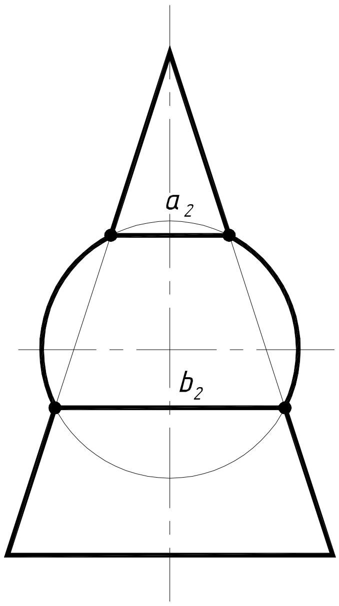


Рисунок 6.3

Способ концентрических секущих сфер-посредников применяется в случае, если:

- пересекающиеся поверхности являются поверхностями вращения;
- оси вращения поверхностей пересекаются;
- оси вращения пересекающихся поверхностей параллельны одной из плоскостей проекций.

Поверхности вращения – поверхности, образованные в результате вращения образующей вокруг оси.

Пример: Построить линию пересечения поверхностей двух конусов (обе поверхности занимают общее положение) (рис.6.4).

При решении поставленной задачи выполняем пункты 1-3 общего алгоритма (область пересечения, характерные точки).

При поиске промежуточных точек используем в качестве поверхностей - посредников концентрические сферы. Центр, через который проводятся концентрические секущие сферы (на чертеже - O_2), является центром пересечения осей симметрии поверхностей. Предварительно находим максимальный и минимальный радиусы секущих сфер.

Rmin – радиус сферы от центра пересечения осей до наименее удаленной точки области пересечения поверхностей. Сфера минимального радиуса должна касаться одной поверхности и пересекать другую.

Rmax – радиус сферы от центра пересечения осей до наиболее удаленной точки области пересечения поверхностей.

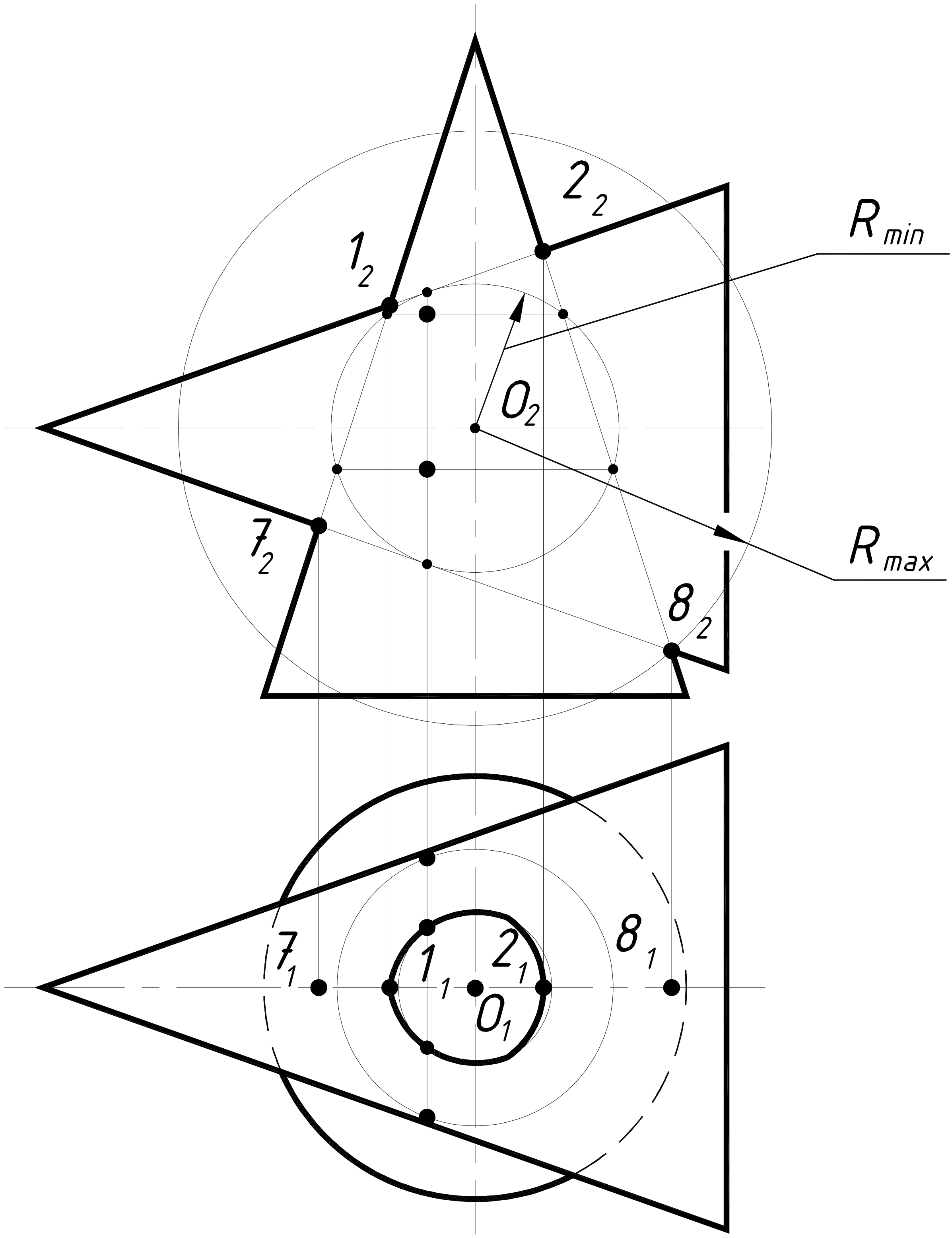


Рисунок 6.4

Полученные точки соединяем плавной кривой. Точность аппроксимации линии пересечения поверхностей зависит от принятого количества вспомогательных концентрических сфер-посредников. Определяем видимость полученной кривой.

ПЕРСПЕКТИВА. МЕТОД АРХИТЕКТОРОВ

Основные понятия. Аппарат линейной перспективы. Перспектива точки. Построение перспективы геометрического объема методом архитекторов.

7.1 Основные понятия. Аппарат линейной перспективы

Перспектива представляет собой способ изображения тел и плоских фигур, основанный на применении центрального проецирования. Для построения перспективы предмета (рис.7.1) из точки зрения S проводят лучи ко всем точкам изображаемого предмета. На пути проецирующих лучей располагают картинную плоскость, на которой строят искомое изображение, определяя точки пересечения лучей с поверхностью картины.

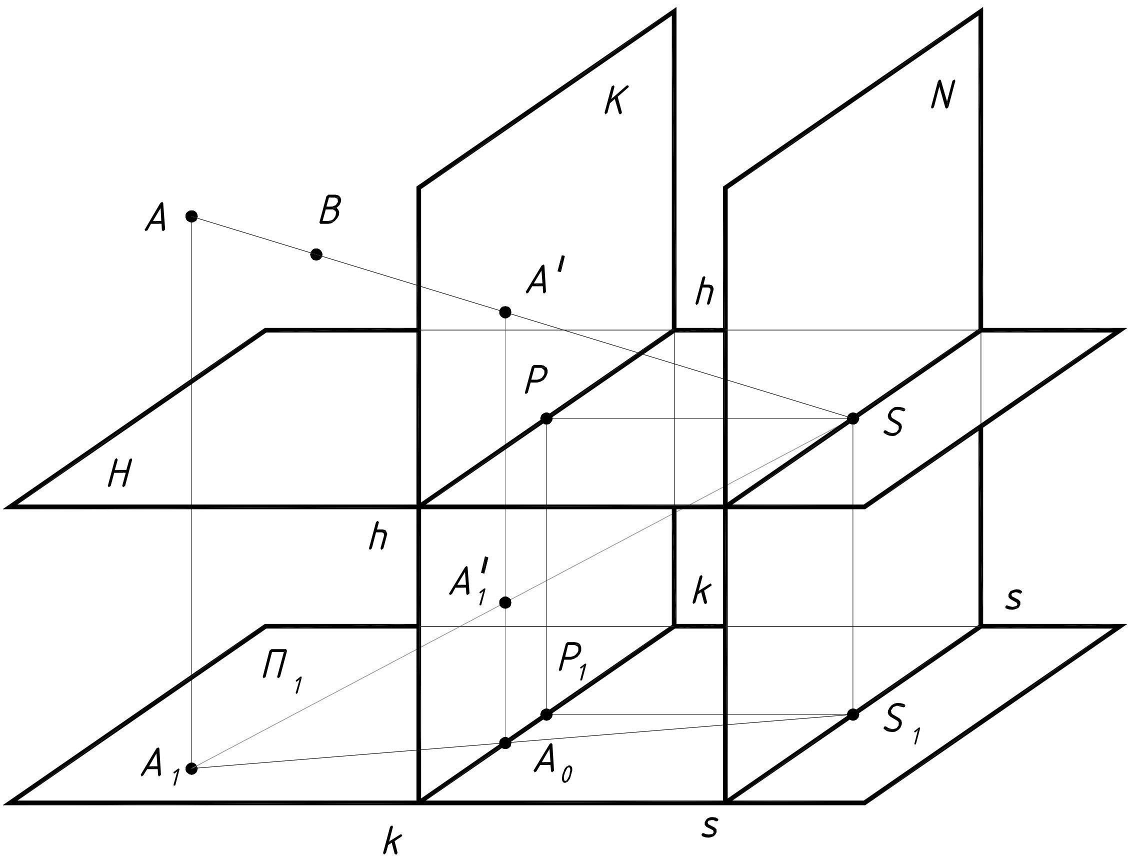


Рисунок 7.1

S – точка зрения;
S₁ – основание точки зрения (точка стояния);
P – главная точка картины;
P₁ – основание главной точки картины;
A – объект проецирования;
A₁ – основание точки А;
П₁ – предметная плоскость;
H // ***П₁*** – плоскость горизонта;

K – картинная плоскость, $\boldsymbol{K} \perp \boldsymbol{H}$ и $\boldsymbol{\Pi_1}$;

N – нейтральная плоскость;

SP – главный луч, $\boldsymbol{SP} \perp \boldsymbol{K}$;

$\boldsymbol{S_1\ P_1}$ – основание главного луча (проекция главного луча на предметную плоскость);

kk – основание картины;

hh – линия горизонта;

$\boldsymbol{S\ S_1}$ – линия стояния.

7.2 Перспектива точки

Перспективой точки называется точка пересечения проецирующего луча, проходящего через точку зрения с картинной плоскостью (рис.7.2). Для построения перспективы точки необходимо заключить проецирующий луч ***SA*** в горизонтально-проецирующую плоскость ***α,*** горизонтальным следом этой плоскости будет прямая $\boldsymbol{S_1 A_1}$. Плоскость ***α*** пересекает картинную плоскость по прямой $\boldsymbol{A^I\ A_0}$. Точка пересечения этой прямой с проецирующим лучом ***SA*** является искомой перспективой $\boldsymbol{A^I}$ точки ***A***.

$\boldsymbol{A^I_1}$ – вторичная проекция точки А, или перспектива горизонтальной проекции точки ***A*** (рис 10.2).

Задание только одной перспективы точки не определяет ее положение в пространстве. Перспективное изображение точки обратимо, если оно дополнено вторичной проекцией.

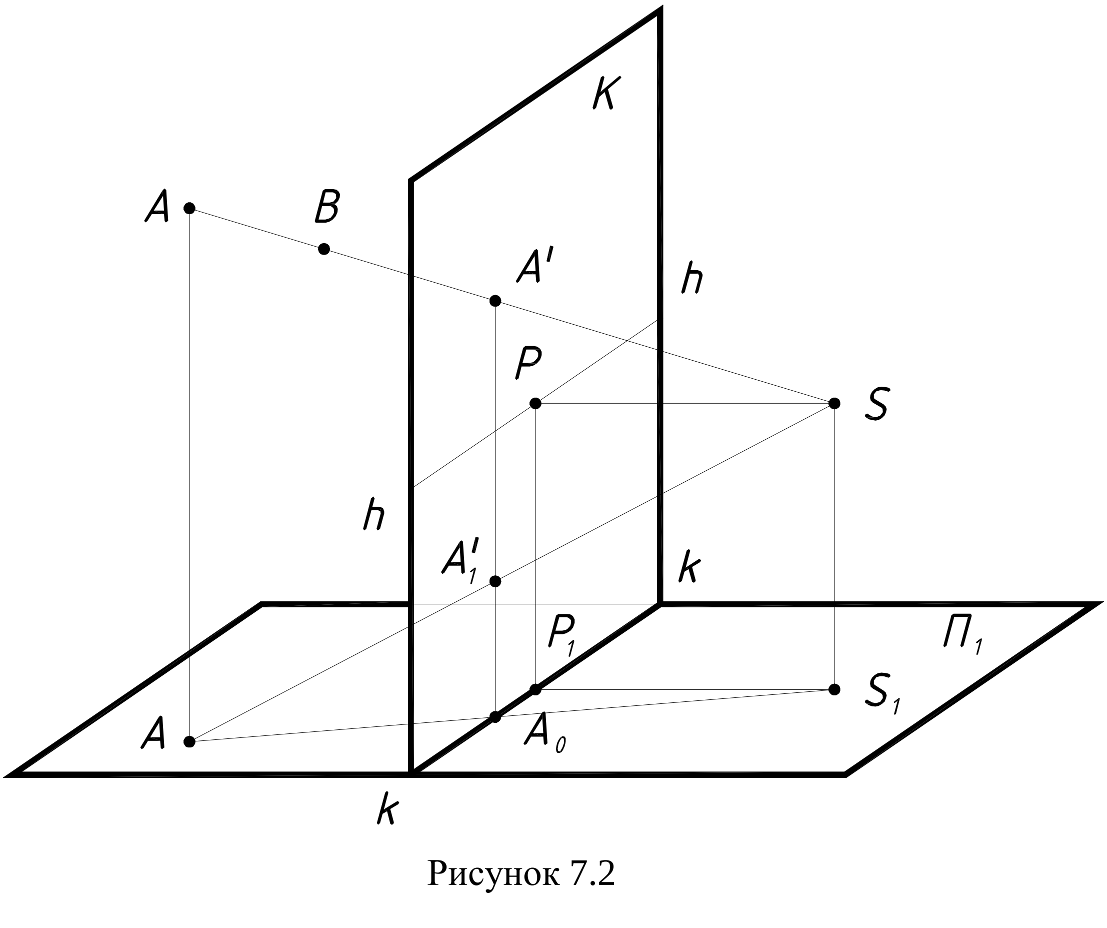


Рисунок 7.2

7.3 Перспектива геометрического объема. Метод архитекторов

Существует несколько способов построения перспективы (радиальный метод, метод сеток, метод архитекторов и др.).

Данный метод (способ) широко применяется для построения перспективных изображений с использованием точек схода параллельных прямых. Перспективы параллельных прямых пересекаются. Точка пересечения связки параллельных прямых называется точкой схода. Когда параллельные прямые горизонтальны, их точка схода должна быть на линии горизонта.

Пример. Построить перспективу геометрического объема способом архитекторов.

Выбор точки зрения – подготовительная работа (рис.7.3).

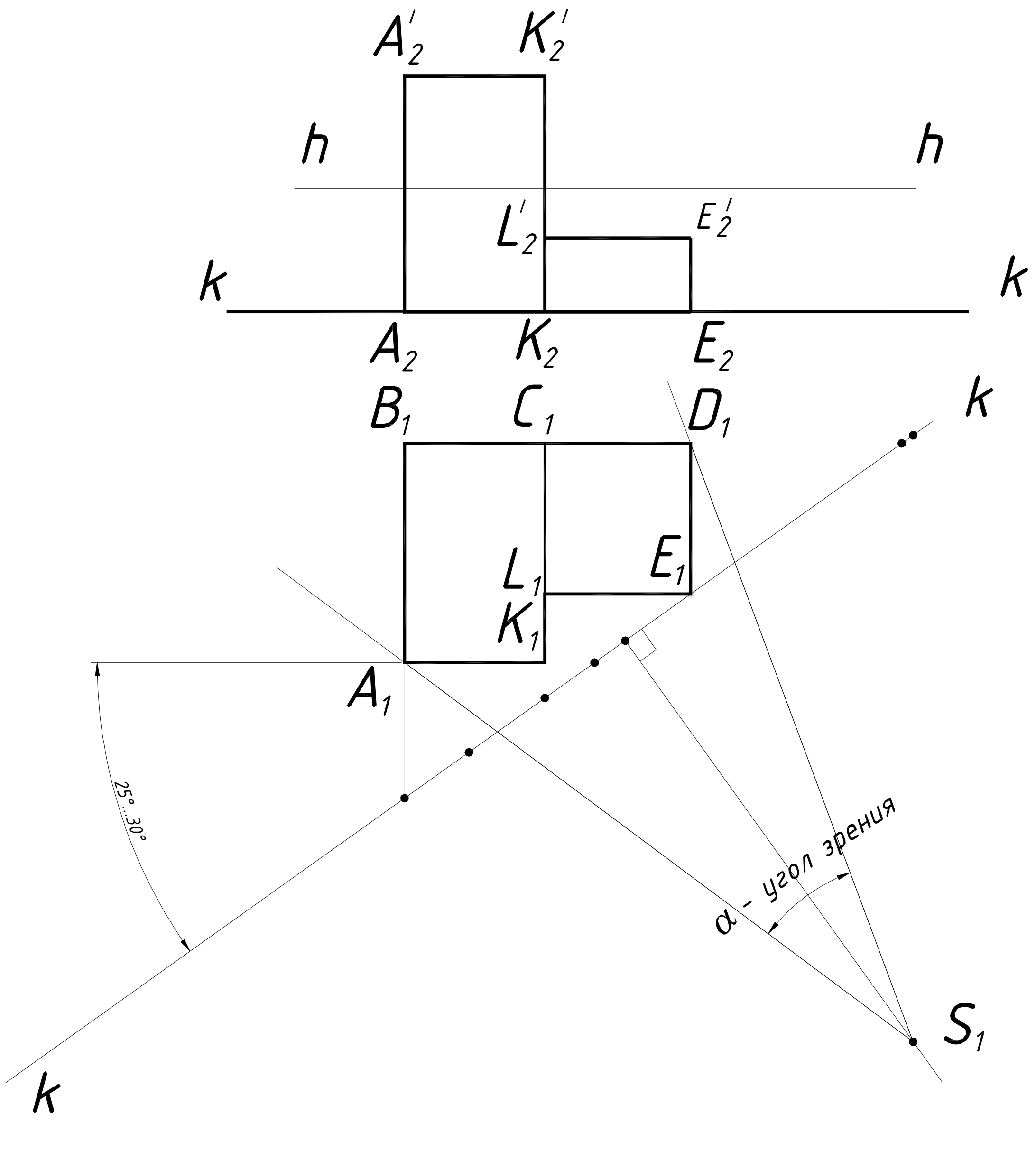


Рисунок 7.3

1. Проводим основание картины k – k (или горизонтальный след картинной плоскости) таким образом, чтобы плоскость прошла через одно из ребер объема и составляла угол с одной из сторон плана 25-30 градусов. Это делают с целью выделения главного фасада (рис. 7.3).

2. Из крайних точек плана A_1 и D_1 опускаем перпендикуляры к основанию картины k – k, получаем точки M и N.

3. Делим отрезок M N на три равные части и выбираем в средней части одной трети отрезка главную точку картины P.

4. Восстанавливаем перпендикуляр в точке P к основанию картины k – k.

5. На перпендикуляре определяем точку S_1 – точку зрения таким образом, чтобы угол зрения был в пределах от 18 до 53 градусов. Оптимальным является угол 30 градусов. Для этого накладываем шаблон на план так, чтобы вершина угла расположилась на перпендикуляре, проведенном из точки P, а шаблон прошел через крайние точки плана.

6. Определяем доминирующие направления прямых.

7. Определяем точки схода – фокусы F1 и F2 , в которых будут сходиться прямые доминирующих направлений.

8. Продолжаем линии плана до пересечения с основанием картины k – k, получаем точки 1, 2, 3 и a, b, c. Эти точки будут началом прямых, конец прямых будет находиться в соответствующих точках схода.

7.3.1 Построение (создание) перспективы

1. Проводим основание картины k – k на свободном поле чертежа (рис. 7.4).

2. На линии k – k отмечаем положение всех точек 1, 2, 3, P… и т. д.

3. На линии горизонта h – h отмечаем точки схода F_1 и F_2 .

4. Проводим перспективу прямых, составляющих план, и получаем перспективу всех точек плана ABCDELK - так называемую вторичную проекцию.

5. Через все вершины вторичной проекции проводим вертикальные прямые.

6. От точки $4 \equiv 5$ откладываем высоту отрезка EE', равную натуральной величине ребра, так как оно находится в картинной плоскости.

7. Через точку E' проводим прямую в точку схода F_1. На этой прямой с помощью вертикальных линий связи находим точку D'. Затем через точку E' в точку схода F_2, находим точку L'… и т. д.

8. Чтобы получить перспективу вертикальных ребер, которые не совмещены с плоскостью картины, например, равных по величине AA', нужно провести вертикальную плоскость γ и построить линию пересечения плоскости γ с картиной. Плоскость γ совпадает с задней левой плоскостью геометрического объема. Затем отложить на этой прямой от основания картины отрезок, равный величине н. в. отрезка AA'. Далее провести в плоскости горизонталь заданного уровня в точку схода F_1, до пересечения с перспективой взятого ребра AA'.

9. Аналогично вычерчиваем перспективу остальных вертикальных ребер.


Прямая // второму доминирующему направлению
α = 28° - 32°
угол зрения
Прямая // первому доминирующему направлению
25°...30°

Рисунок 7.4

ПРОЕКЦИИ С ЧИСЛОВЫМИ ОТМЕТКАМИ

Проекции точки. Проекции прямой. Взаимное положение прямых. Проецирование плоскости. Взаимное положение прямой и плоскости. Взаимное положение плоскостей. Проекции тел и поверхностей.

8.1 Проекции точки. Проекции прямой

Этот метод является частным случаем ортогональных проекций. Он применяется при изображении пространственных форм, один из размеров которых значительно меньше двух других размеров. Например, при проектировании железных и шоссейных дорог, гидротехнических сооружений, каналов, строительных площадок и т. д., а также для изображения рельефа земной поверхности.

Сущность метода заключается в том, что вместо двух проекций предмета на горизонтальную и фронтальную плоскость проекций изображают одну – горизонтальную проекцию и рядом с проекцией каждой точки пишут число, выражающее ее высоту относительно этой плоскости. Это число называют отметкой, а плоскость - плоскостью нулевого уровня и обозначают Π_0.

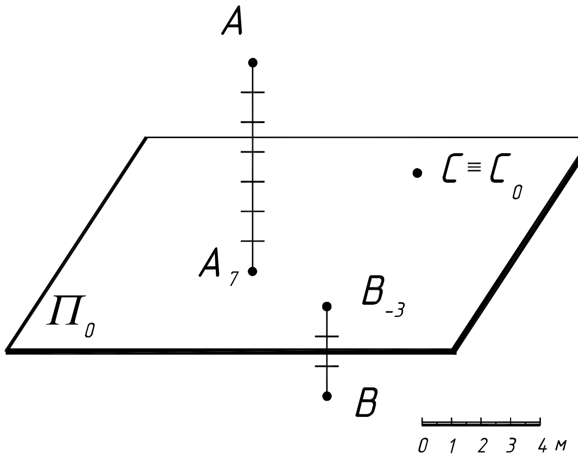


Рисунок 8.1

За единицу длины обычно принимают один метр. Если точка находится выше плоскости нулевого уровня, ее отметка будет положительной, если ниже - отрицательной, если принадлежит плоскости - нулевой.

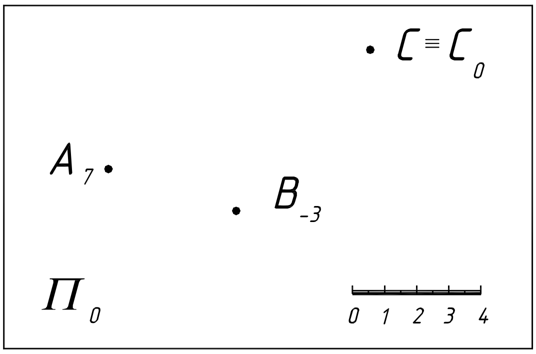


Рисунок 8.2

Чертеж, выполненный в проекциях с числовыми отметками, называется картой или планом. На планах обязательно указывается линейный или числовой масштаб (рис.8.1 и рис. 8.2).

Для изображения прямой в проекциях с числовыми отметками задают проекции двух ее точек с указанием их отметок либо одной точкой и уклоном (направлением).

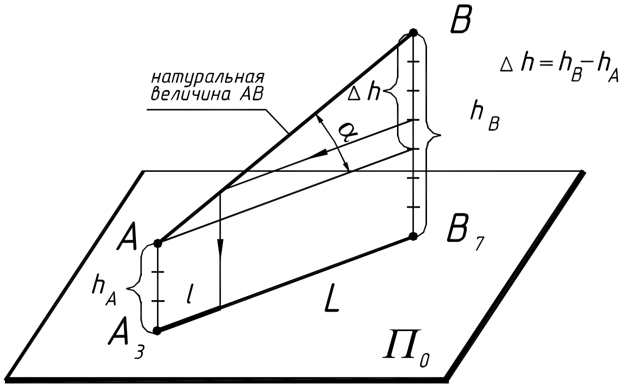


Рисунок 8.3

Длина горизонтальной проекции прямой $\boldsymbol{A_3 B_7}$ называется заложением прямой $\boldsymbol{L}$. Разность отметок концов $\boldsymbol{AB}$ ($\boldsymbol{h_B - h_A}$) называется превышением этого отрезка.

α - угол наклона прямой к плоскости Π_0.

Обычно наклон прямой задают не углом α, а уклоном прямой - $\boldsymbol{i}$. Уклоном прямой называется отношение превышения отрезка прямой к его заложению.

$$i = \frac{h_B - h_A}{L} = \frac{\Delta h}{L}$$

$$i = \frac{\Delta h}{L} \qquad i = tg\,\alpha$$

Уклон выражается отношением 1:1; 2:3; или в процентах, например 5%, 10%, и т. д.

Длина заложения, соответствующая единице превышения, называется интервалом прямой.

$$\text{Если } h_B - h_A = 1 \text{ то } L = l$$

Между уклоном и интервалом существует зависимость:

$$i = \frac{1}{l} \qquad l = \frac{1}{i} \qquad l = \frac{L}{\Delta h}$$

Интервал – это такая величина заложения отрезка прямой, разность отметок концов которого равна единице.

8.1.1 Градуирование прямой

Проградуировать прямую – это значит найти на ней точки, имеющие целочисленные отметки. Существует несколько способов градуирования прямой: графический (рис. 8.4) и аналитический (рис. 8.5).

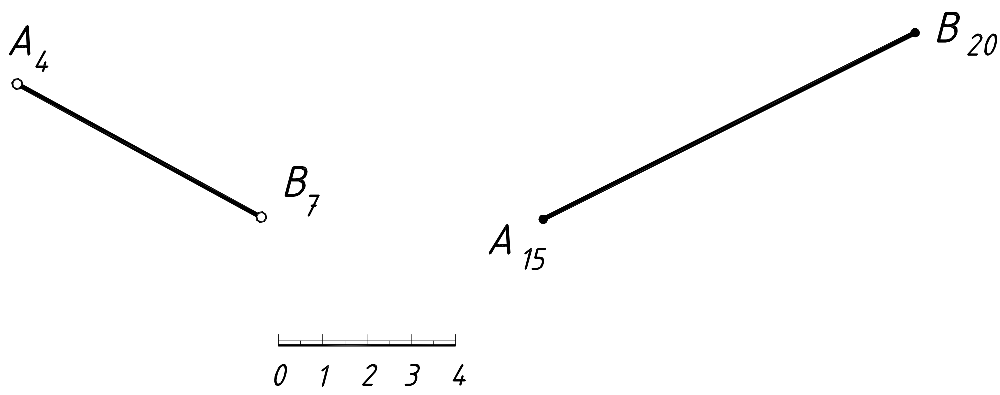


Рисунок 8.4

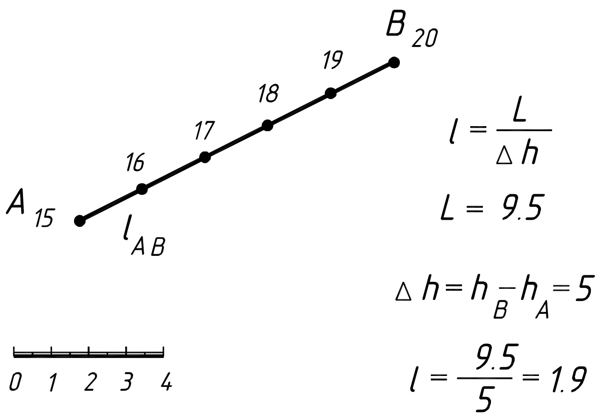


Рисунок 8.5

8.1.2 Взаимное положение прямых

Если в пространстве прямые параллельны, то их проекции с числовыми отметками параллельны, интервалы равны и отметки возрастают в одном направлении (рис. 8.6).

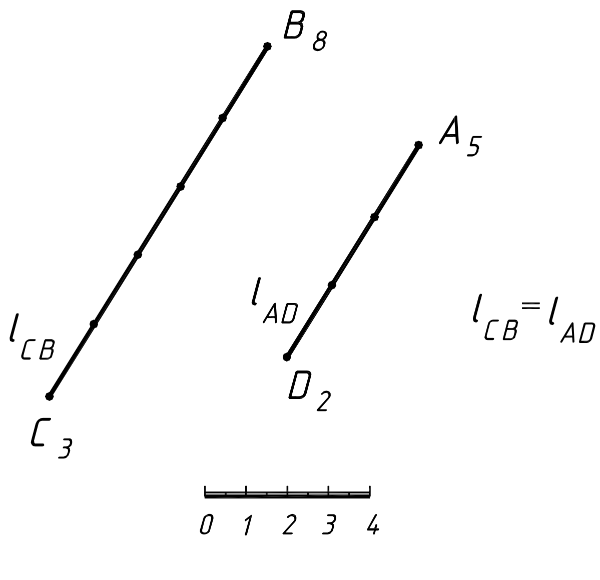


Рисунок 8.6

Если прямые в пространстве пересекаются, то их проекции пересекаются или сливаются, а точка пересечения имеет одну отметку (рис.8.7).

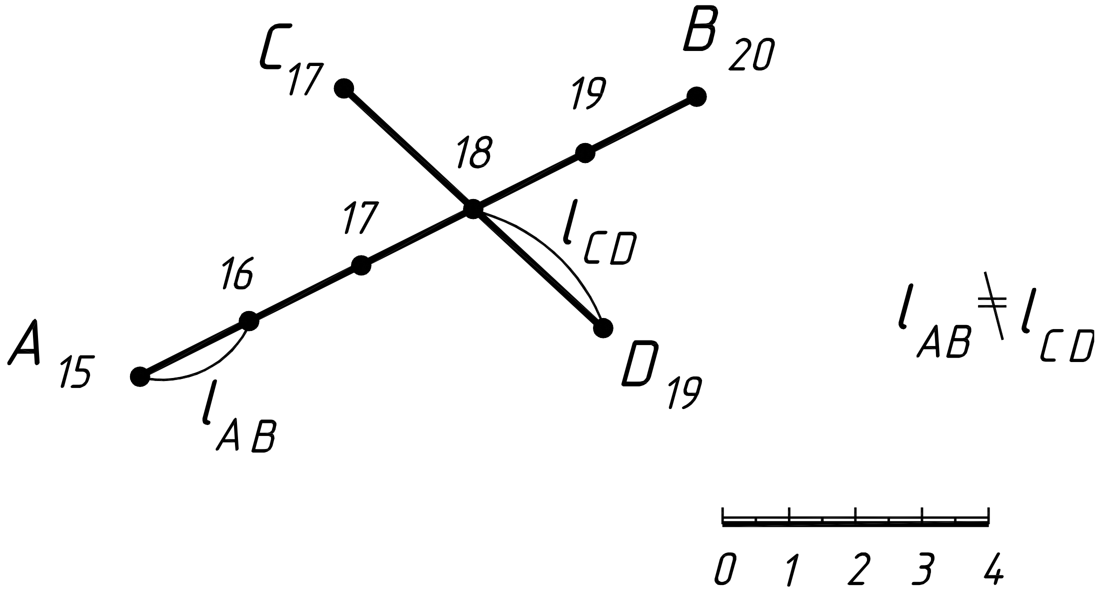


Рисунок 8.7

Пример: Определить, пересекаются ли заданные прямые (рис.8.8).

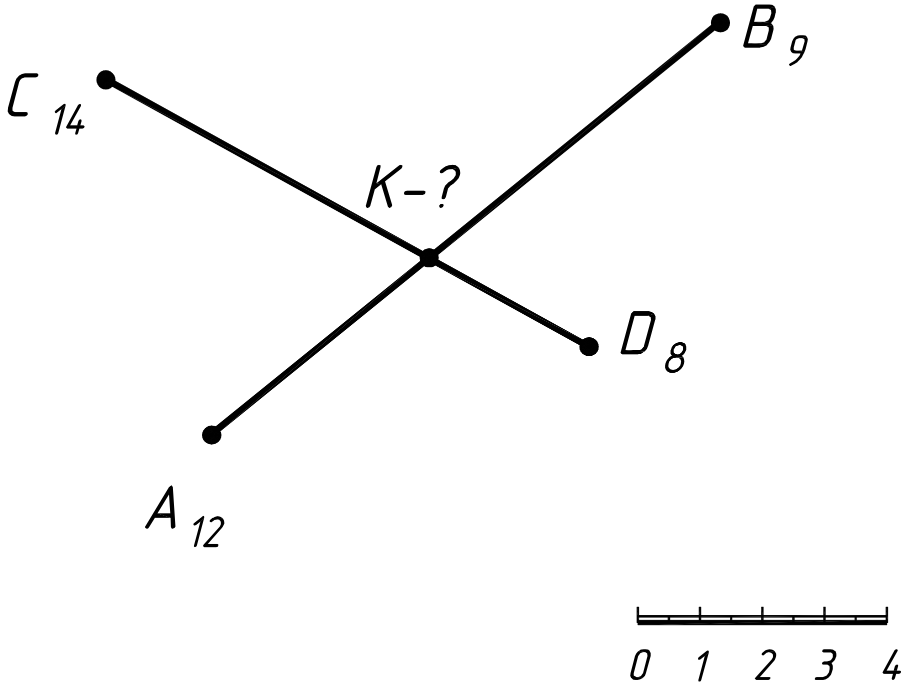


Рисунок 8.8

8.2 Проецирование плоскости

Плоскость в проекциях с числовыми отметками задается теми же способами, что и в ортогональном проецировании. Однако более удобно задавать плоскость масштабом уклона.

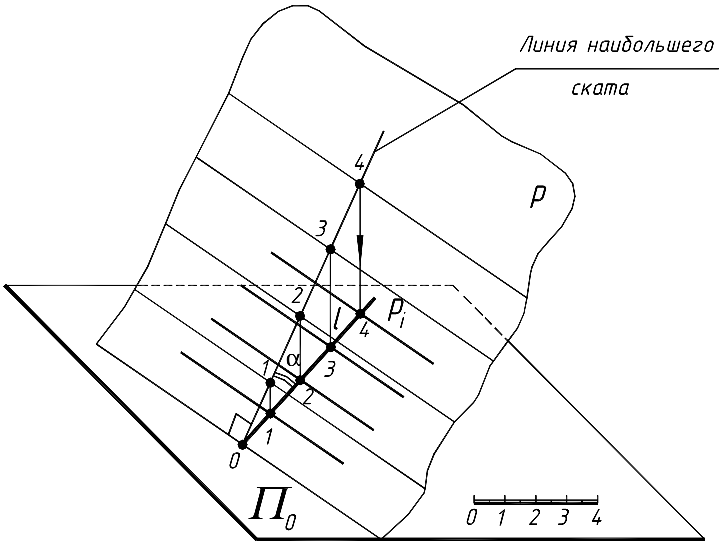


Рисунок 8.9

Пусть в пространстве задана плоскость P общего положения с нанесенными на ней через единицу измерения горизонталями (рис. 8.9). Проведем в плоскости P линию наибольшего ската 4 - 0, перпендикулярную к горизонталям. Расстояние между проекциями горизонталей есть интервал линии наибольшего ската - *l*.

Проекция линии наибольшего ската с нанесенными на ней интервалами и будет масштабом уклона плоскости (рис. 8.10).

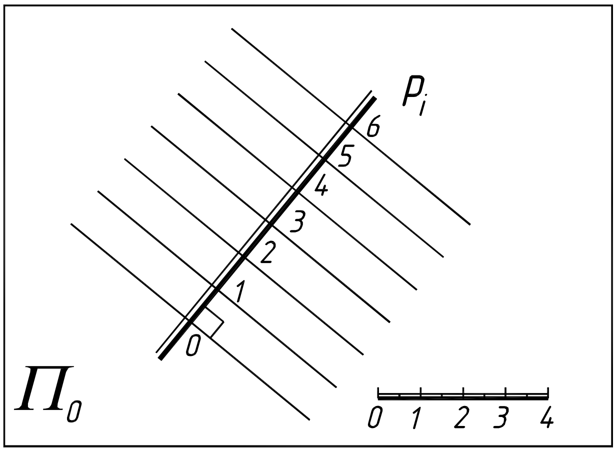


Рисунок 8.10

Пример. Задать плоскость ***ΔABC*** масштабом уклона (рис.8.11).

Для решения задачи необходимо определить сторону с наибольшей разницей в отметках и затем проградуировать эту сторону.

Затем строим горизонтали плоскости, т.е. соединяем точки с одинаковыми отметками.

Строим линию наибольшего ската плоскости.

Проводим масштаб уклона плоскости.

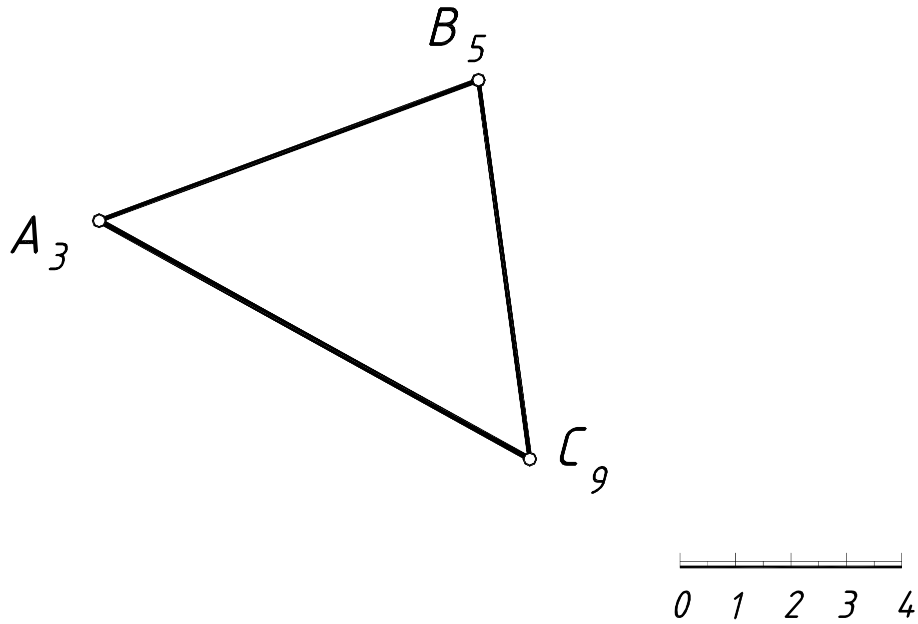


Рисунок 8.11

8.2.1 Взаимное положение прямой и плоскости

Прямая может быть параллельна, может пересекать плоскость (частный случай - перпендикулярна плоскости).

Пример. Определить точку пересечения прямой ***CD*** с плоскостью P_i. (рис. 8.12).

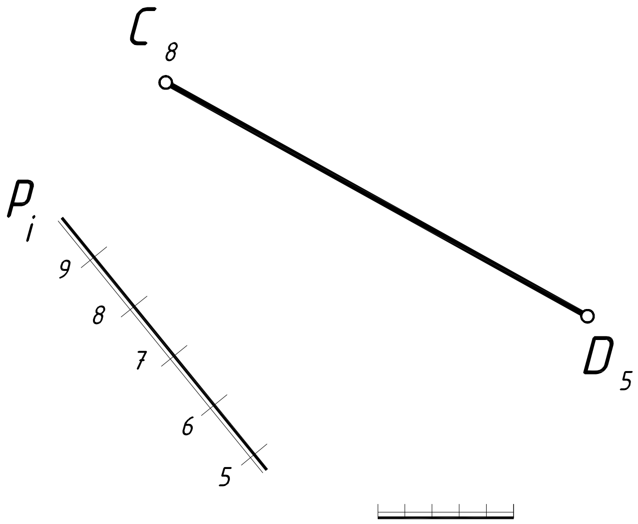


Рисунок 8.12

Алгоритм решения задачи:

1. Заключаем прямую ***AB*** во вспомогательную плоскость $\gamma(m \mid\mid n)$, ***m*** и ***n*** проходят через концы отрезка ***AB*** и являются горизонталями плоскости γ.
2. Строим горизонтали плоскости α.
3. Находим точки пересечения соответствующих горизонталей, точки ***M*** и ***N***, соединяем их. Это линия пересечения заданной и вспомогательной плоскостей.
4. Находим точку ***К*** на пересечении ***MN*** и ***AB***.

8.2.2 Взаимное положение плоскостей

Плоскости в пространстве могут быть параллельны и могут пересекаться (частный случай - под прямым углом).

У параллельных плоскостей уклоны параллельны, интервалы одинаковы и отметки возрастают в одном направлении. В противном случае плоскости пересекаются.

Пример. Построить линию пересечения плоскостей P_i и Q_i (рис.8.13) .

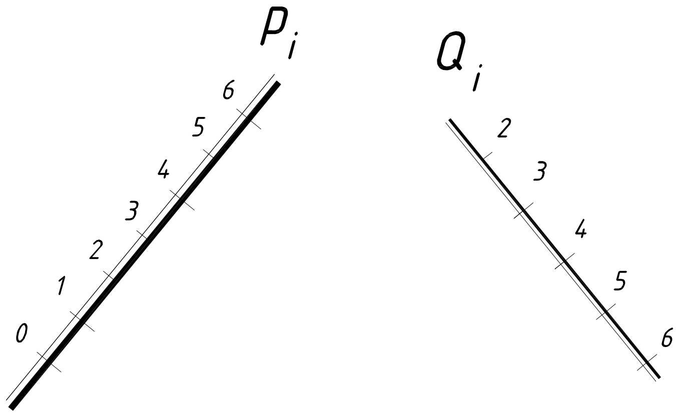


Рисунок 8.13

Для построения линии пересечения плоскостей определяют точки пересечения двух пар их горизонталей с одинаковыми отметками каждой пары.

8.3 Проекции тел и поверхностей

Применяя метод проекций с числовыми отметками для изображения геометрических тел, необходимо на горизонтальной проекции данного тела указывать отметки характерных точек и линий (если вся линия имеет одинаковую отметку).

В многограннике характерными точками являются его вершины (рис.8.14). Основание пирамиды ΔABC расположено в плоскости Π_0 , а вершина S отстоит от плоскости Π_0 на 12 метров.

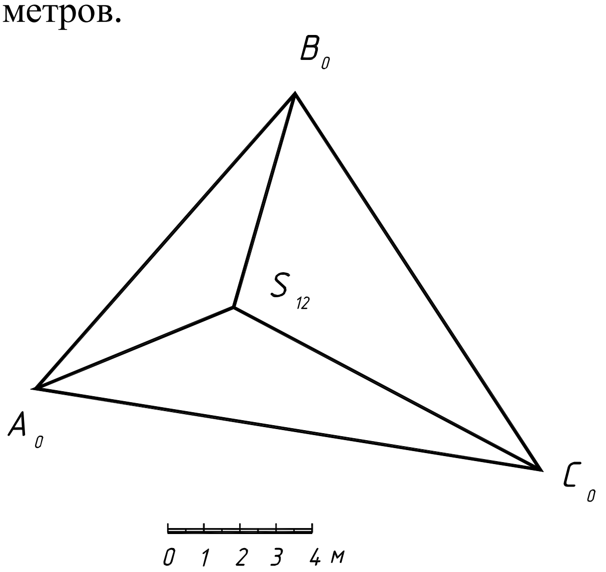


Рисунок 8.14

Кривые поверхности задаются рядом проекций горизонтальных сечений, проведенных через единицу измерения, т. е. задаются проекциями их горизонталей.

Проекции прямого кругового конуса используются в качестве вспомогательных при построении горизонталей откосов насыпей и выемок (рис.8.15).

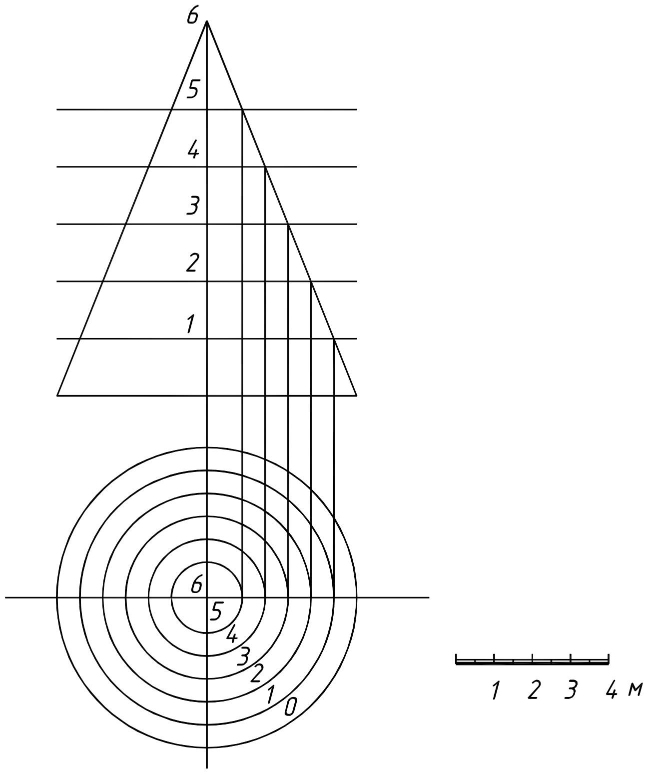


Рисунок 8.15

СПИСОК РЕКОМЕНДУЕМОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Фролов, С.А. Курс начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1983.

2. Кузнецов, Н.С. Начертательная геометрия. – М.: Высш. шк., 1981.

3. Крылов, Н.Н. Начертательная геометрия / Н.Н. Крылов [и др.]. – М.: Высш. шк., 1990.

4. Гордон, В.О. Курс начертательной геометрии / В.О. Гордон, М.А. Семенцов-Огиевский. – М.: Машиностроение, 1999. – 288 с.

5. Виноградов, В.Н. Начертательная геометрия. – М.: Высш.шк., 2002.

6. Кокошко, А.Ф. Начертательная геометрия: учебное пособие / А.Ф. Кокошко, С.А. Матюх. – Минск: ИВЦ Минфина, 2013. – 392 с.

7. Гордон, В.О. Курс начертательной геометрии / В.О. Гордон [и др.]. – М.: Наука, 1998.

8. Локтев, О.В. Краткий курс начертательной геометрии. – М.: Высш. шк., 1999.

Задачники

1. Арустамов, Х.А. Сборник задач по начертательной геометрии. – М.: Машиностроение, 1978.

2. Гордон, В.О. Сборник задач по курсу начертательной геометрии / В.О. Гордон, Ю.Б. Иванов, Т.Е. Солнцева. – М.: Машиностроение, 1998.

3. Гордон, В.О. Сборник задач по начертательной геометрии / В.О. Гордон [и др.]. – М.: Наука, 1998.

ОПРЕДЕЛЕНИЕ РАССТОЯНИЙ

Расстояние между двумя точками. Расстояние от точки до прямой. Расстояние от точки до плоскости.

9.1 Расстояние между двумя точками

Определить расстояние между двумя точками $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ - это значит определить натуральную величину отрезка $\boldsymbol{AB}$.

Рассмотрим пространственную модель (рис.9.1).

Т. к. $\boldsymbol{AK \parallel A_1B_1}$, $\boldsymbol{BB_1 \perp \Pi_1}$, $\boldsymbol{AK \perp BB_1}$, значит $\Delta\,\boldsymbol{ABC}$ - прямоугольный.

$\boldsymbol{AK = A_1B_1,\ AA_1 = Z_A,\ BB_1 = Z_B,\ BK = \Delta Z = Z_B - Z_A}$.

α - угол наклона прямой $\boldsymbol{k}$ плоскости Π_1.

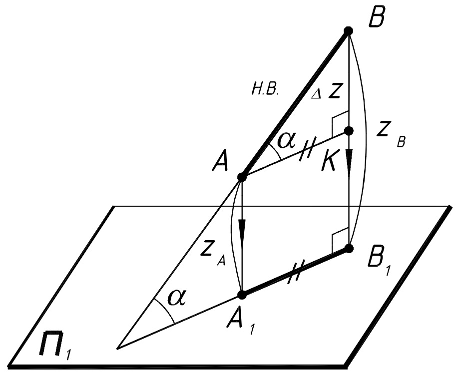


Рисунок 9.1

9.1.1 Правило прямоугольного треугольника

Натуральная величина отрезка прямой равна гипотенузе прямоугольного треугольника, у которого один катет равен одной из проекций данной прямой, а другой равен разности расстояний концов отрезка до той же плоскости проекций (рис. 9.2).

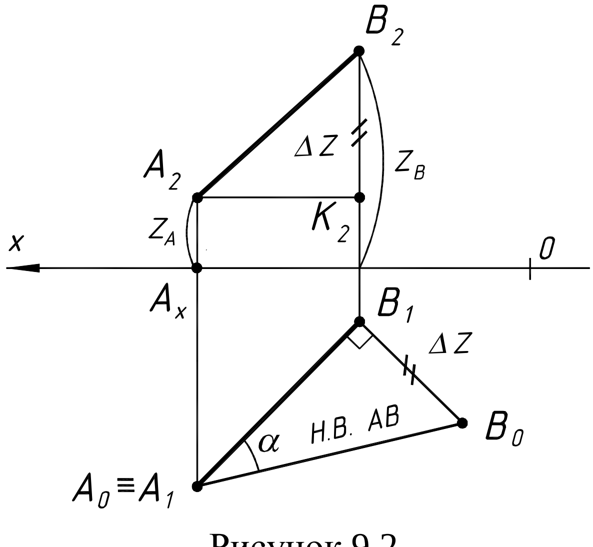


Рисунок 9.2

Аналогично определяем н. в. отрезка, используя плоскости $П_2$ и $П_3$. Одновременно определяем углы наклона прямой к плоскостям $П_2$ - β и $П_3$ - γ.

Алгоритм решения задачи (рис.9.3):

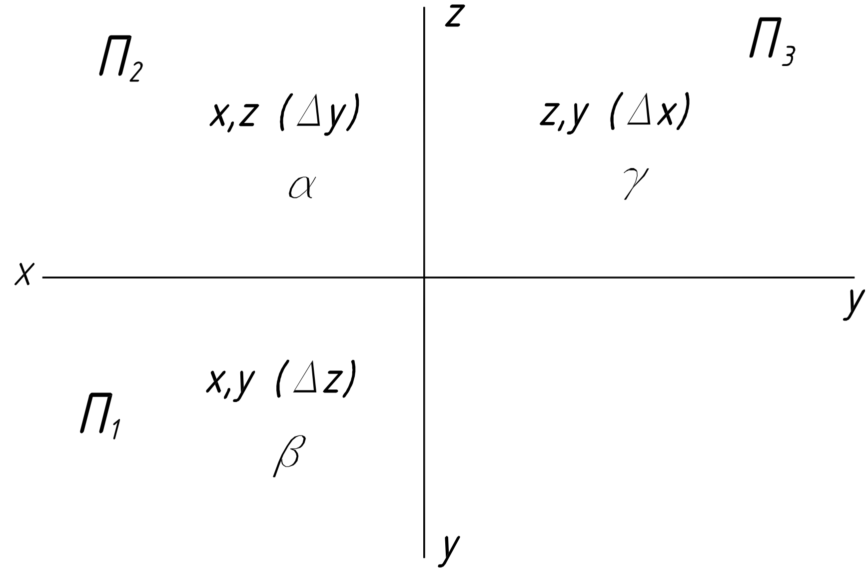
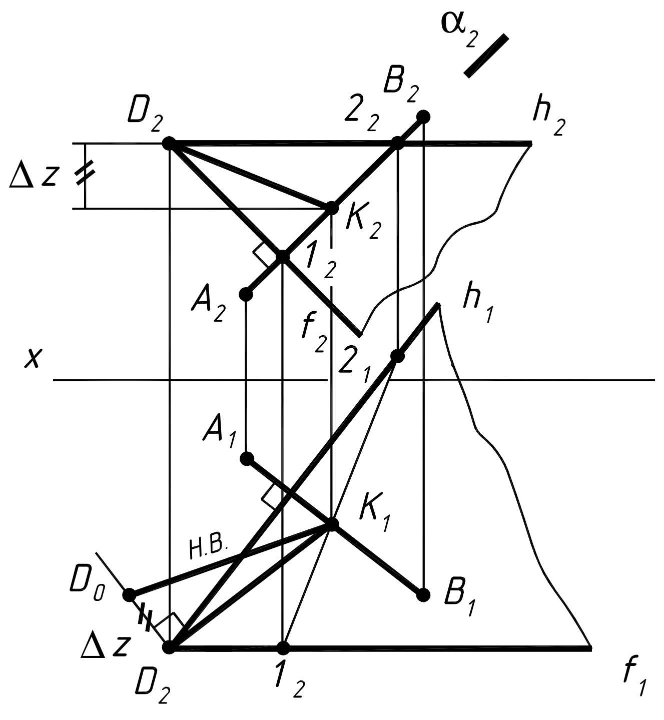


Рисунок 9.3

9.2 Определение расстояния от точки до прямой



Через точку ***D*** - плоскость $\boldsymbol{\beta (h \cap f)}$, $\boldsymbol{\beta \perp AB}$.

Определяем точку ***K*** ($\boldsymbol{K_1}$ ***и*** $\boldsymbol{K_2}$) - результат пересечения плоскости $\boldsymbol{\beta}$ и прямой ***AB***.

н. в. DK *(метод прямоугольного треугольника)*.

Рисунок 9.4

9.3 Определение расстояния от точки до плоскости

Пример. Определить расстояние от точки D до плоскости Δ ABE.

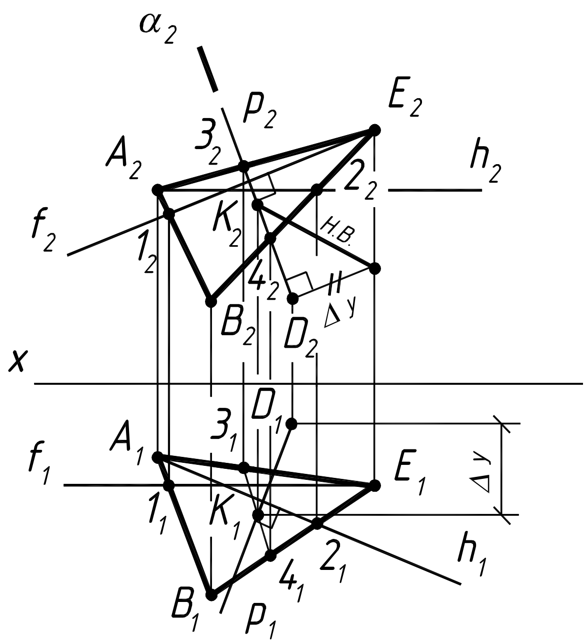


Рисунок 9.5

1. Перпендикуляр из точки ***D*** к плоскости ***Δ ABE***.

2. Точку ***К*** - встречи перпендикуляра с плоскостью ***Δ ABE*** - определяем как основную задачу начертательной геометрии, по алгоритму.

3. Натуральную величину расстояния ***DK*** определяем методом прямоугольного треугольника.

Лекция 10

СПОСОБЫ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ПРОЕКЦИЙ

Способ замены плоскостей проекций. Способы вращения. Способ плоскопараллельного перемещения.

Решение многих позиционных и метрических задач упрощается, если объекты проецирования располагаются частным образом относительно плоскостей проекций.

Если проекции геометрических элементов или фигур заданы в общем виде, то для перевода их в частное положение используют способы преобразования проекций (или способы преобразования чертежа).

10.1 Способ замены плоскостей проекций

Суть способа заключается в том, что объект проецирования остается неподвижным, а плоскости проекций заменяют, причем не одновременно, а последовательно, т. е. одна из плоскостей заменяется новой, а вторая остается без изменений. Между новой и старой плоскостями проекций соблюдается ортогональность (т. е. плоскости должны быть взаимно перпендикулярны). Преобразование проекций некоторой геометрической фигуры связано с преобразованием проекций точек, принадлежащих данной фигуре. Поэтому рассмотрим, какие изменения претерпевают проекции отдельной точки при переходе от одной системы плоскостей проекций к другой.

Рассмотрим систему взаимно перпендикулярных плоскостей $\boldsymbol{\Pi_1}$ и $\boldsymbol{\Pi_2}$. Вычертим пространственную модель (рис.10.1).

Заменим фронтальную плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_2}$ на $\boldsymbol{\Pi_4}$.

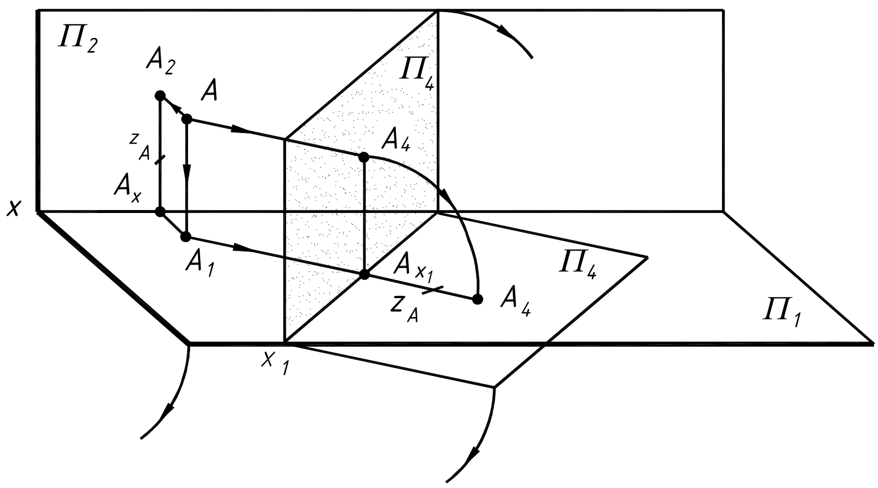


Рисунок 10.1

$\boldsymbol{\Pi_4 \perp \Pi_1}$ и $\boldsymbol{x_1 = \Pi_4 \cap \Pi_1}$.

Примечание: Фронтальные плоскости проекций имеют четные индексы $\boldsymbol{\Pi_2}$, $\boldsymbol{\Pi_4}$ и т. д. Горизонтальные плоскости проекций нечетные – $\boldsymbol{\Pi_1}$, $\boldsymbol{\Pi_5}$ и т. д.

Найдем фронтальную проекцию точки $\boldsymbol{A}$ – $\boldsymbol{A_4}$. Линии проекционной связи перпендикулярны новой оси $\boldsymbol{x_1}$, $\boldsymbol{A_1 A_{x1} \perp x_1}$, $\boldsymbol{A_4 A_{x1} \perp x_1}$. $\boldsymbol{A_2 A_x = A\, A_1 = A_4 A_{x1} = z_A}$.

Совмещаем плоскость $\boldsymbol{\Pi_4}$ с $\boldsymbol{\Pi_1}$ и далее с $\boldsymbol{\Pi_2}$.

Построим эпюр точки. От системы $\boldsymbol{x}$ $\boldsymbol{\Pi_2 / \Pi_1}$ переходим к системе $\boldsymbol{x_1}$ $\boldsymbol{\Pi_4 / \Pi_1}$.

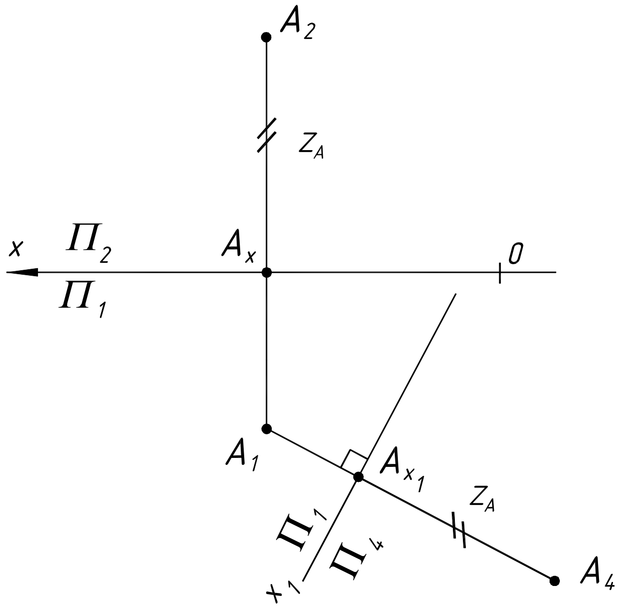


Рисунок 10.2

Правило: расстояние от новой оси до новой проекции точки равно расстоянию от старой проекции точки до старой оси. Значит от новой оси $\boldsymbol{x_1}$ откладываем координату $\mathbf{z}$ для точки $\boldsymbol{A}$.

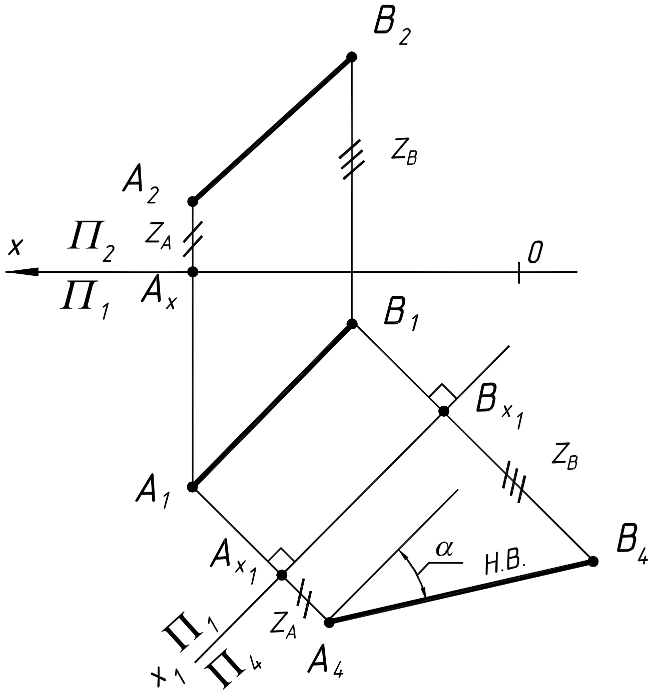
Аналогично можно заменить горизонтальную плоскость проекций на новую $\boldsymbol{\Pi_5}$, оставив фронтальную плоскость проекций без изменений, и найти новую горизонтальную проекцию точки $\boldsymbol{A_5}$. При этом координата $\boldsymbol{y}$ остается неизменной.

Решение всех метрических и позиционных задач способом замены плоскостей проекций можно свести к 4 основным типовым задачам:

1. Прямую общего положения преобразовать в прямую уровня.
2. Прямую уровня преобразовать в проецирующую.
3. Плоскость общего положения преобразовать в проецирующую.
4. Плоскость проецирующую преобразовать в плоскость уровня.

Рассмотрим решение основных типовых задач на примерах.

Пример. Прямую общего положения преобразовать в прямую уровня (прямую | | одной из плоскостей проекций), т. е. найти натуральную величину заданной прямой (рис.10.3).



$\boldsymbol{\Pi_2}$ заменяем на $\boldsymbol{\Pi_4}$

$\boldsymbol{\Pi_4 \perp \Pi}$

$\boldsymbol{x_1 = \Pi_4 \cap \Pi_1}$

$\boldsymbol{AB \,|\,|\, \Pi_4}$

(***AB*** - прямая фр. уровня)

$\boldsymbol{A_1B_1}$ || $\boldsymbol{x_1}$. Для построения проекций точек $\boldsymbol{A_4B_4}$ откладываем от новой оси координаты **z** для точек ***A*** и ***B***.

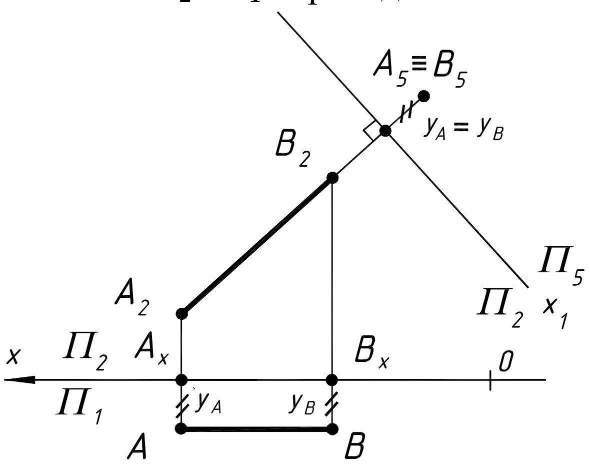
$\boldsymbol{A_4B_4}$ – н.в. ***AB***.

Рисунок 10.3

Эту задачу можно также решить, заменяя горизонтальную плоскость проекций $\boldsymbol{\Pi_1}$ на $\boldsymbol{\Pi_5}$. В этом случае новую ось проводим параллельно фронтальной проекции прямой $\boldsymbol{A_2B_2}$, и от новой оси откладываем координаты ***y*** для точек ***A*** и ***B***.

Пример. Прямую АВ, параллельную одной из плоскостей проекций (т. е. прямую уровня), преобразовать в проецирующую прямую (рис.10.4).

От системы $\boldsymbol{x\ \Pi_2 / \Pi_1}$ переходим к системе $\boldsymbol{x_1\ \Pi_2 / \Pi_5}$.



$\boldsymbol{\Pi_1}$ заменяем на $\boldsymbol{\Pi_5}$.

$\boldsymbol{\Pi_5 \perp \Pi_2}$

$\boldsymbol{x_1 = \Pi_5 \cap \Pi_2}$

$\boldsymbol{AB \perp \Pi_5}$

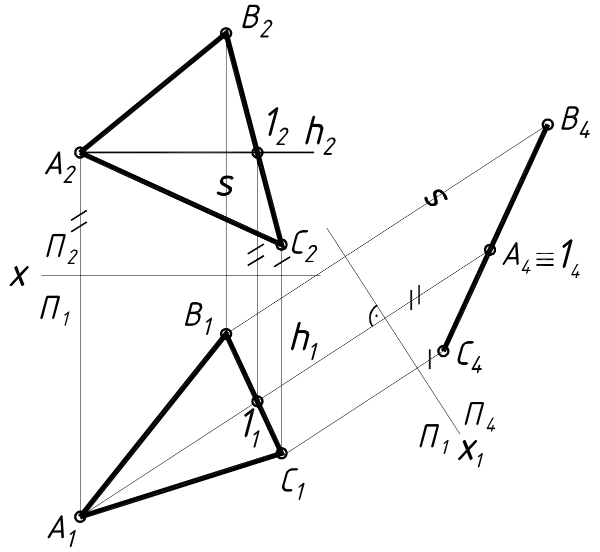
AB - горизонтально-проецирующая прямая

$\boldsymbol{A_2\,B_2 \perp x_1}$

Рисунок 10.4

Примечание: для того, чтобы прямую общего положения преобразовать в проецирующую прямую, производят две замены, т. е. решают последовательно обе задачи – первую и вторую.

Пример. Плоскость общего положения ***Δ ABC*** преобразовать в проецирующее положение (рис.10.5).



$П_2$ заменяем на ***$П_4$***.

$П_4 \perp П_1$

$x_1 = П_1 \cap П_4$

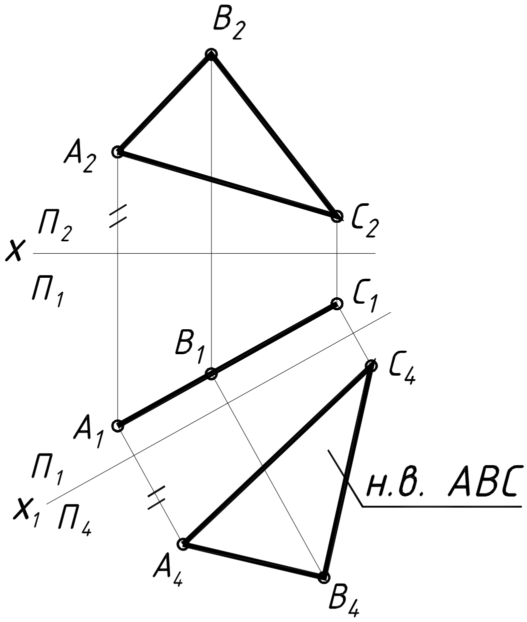
$h_1 \perp П_4$

ABC - проецирующая плоскость

$A_4 B_4 C_4 \perp П_4$

Рисунок 10.5

Пример. Плоскость ***Δ ABC***, занимающую проецирующее положение, преобразовать в положение уровня (рис.10.6).



$П_2$ заменяем на ***$П_4$***.

$П_4 \perp П_1$

$x_1 = П_1 \cap П_4$

$A_1B_1C_1$ // $П_4$

$A_4 B_4 C_4$ – натуральная величина ***Δ ABC***

$A_1 B_1 C_1$ // x_1

Рисунок 10.6

10.2 Способы вращения

Суть способов заключается в том, что объект проецирования изменяет свое положение путем вращения вокруг некоторой оси. Плоскости проекций при этом остаются неподвижными.

В зависимости от положения оси различают следующие способы вращения:

2.1. Вращение вокруг проецирующих осей.

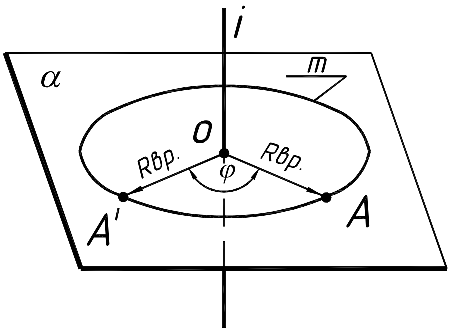
2.2. Вращение вокруг линии уровня.

2.3. Совмещение (вращение вокруг следов плоскости, как частный случай способа 2.2.)

2.4. Плоскопараллельное перемещение (вращение вокруг невыявленных осей).

10.2.1 Способ вращения вокруг проецирующих осей

При данном способе вращения объект проецирования вращается вокруг оси, перпендикулярной фронтальной или горизонтальной плоскостям проекций (рис.10.7).



Аппарат вращения:
i – ось вращения,
α – плоскость вращения,
i $\perp$ ***α***,
A – объект вращения,
m – окружность вращения,
O – центр вращения,
R – радиус вращения.

Рисунок 10.7

Пример. Точку ***A*** повернуть вокруг горизонтально-проецирующей оси на угол ***φ*** против часовой стрелки. Решение видно на рисунке 10.8.

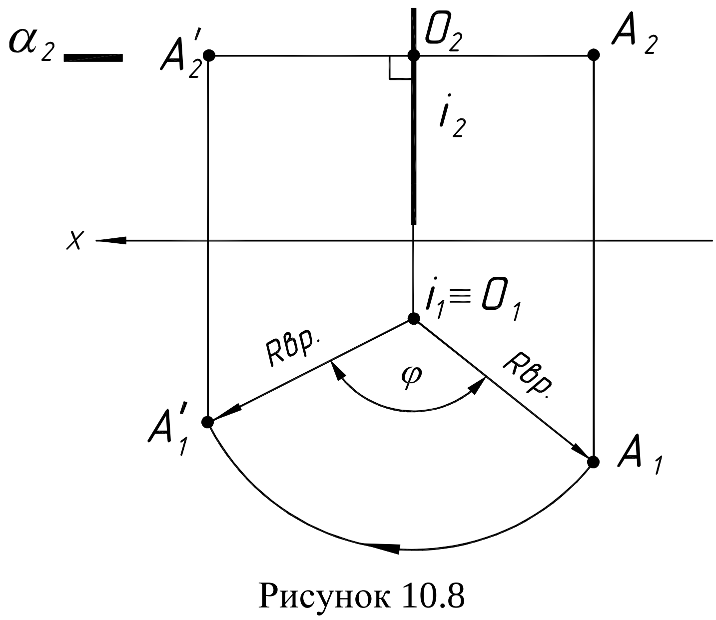
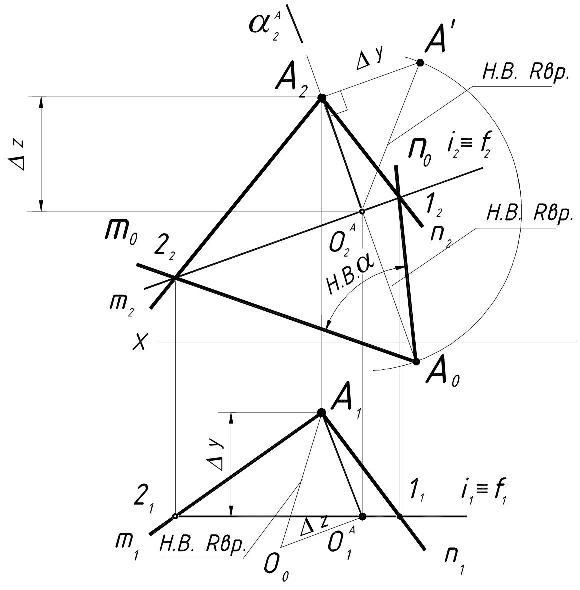


Рисунок 10.8

10.2.2 Способ вращения вокруг линии уровня

Пример. Определить н. в. угла А вращением вокруг линии уровня.



Аппарат вращения:
f – ось вращения (фронталь),
i≡f
A – объект вращения,
α – плоскость вращения,
$\boldsymbol{\alpha_2 \perp f_2}$
O – центр вращения,
OA – радиус вращения.

Натуральную величину $\boldsymbol{R_{вр}}$ определяем любым способом.

В данном примере натуральную величину $\boldsymbol{R_{вр}}$ определяем способом прямоугольного треугольника.

Далее графическое решение приведено на рис. 10.9.

Рисунок 10.9

10.2.3 Способ совмещения (вращение вокруг следов плоскости)

Частный случай вращения вокруг горизонтали или фронтали, т. к. следы плоскости – это нулевые линии уровня. Если вращение происходит вокруг горизонтального следа, то плоскость совмещается с горизонтальной плоскостью проекций. Если вокруг фронтального следа, то с фронтальной плоскостью проекций.

Пример. Определить натуральную величину Δ ABC, принадлежащего плоскости α, способом совмещения вокруг фронтального следа.

Сначала определяем совмещенное положение горизонтального следа $\boldsymbol{\alpha_0}$. Для этого произвольную точку ***1*** вращаем вокруг $\boldsymbol{\alpha_2\,(i_2)}$ в плоскости $\boldsymbol{\gamma} \perp$ оси ***i***, получаем $\boldsymbol{1_0}$. $\boldsymbol{\alpha_0}$ пройдет через $\boldsymbol{\alpha_x}$ и $\boldsymbol{1_0}$ (рис. 10.10).

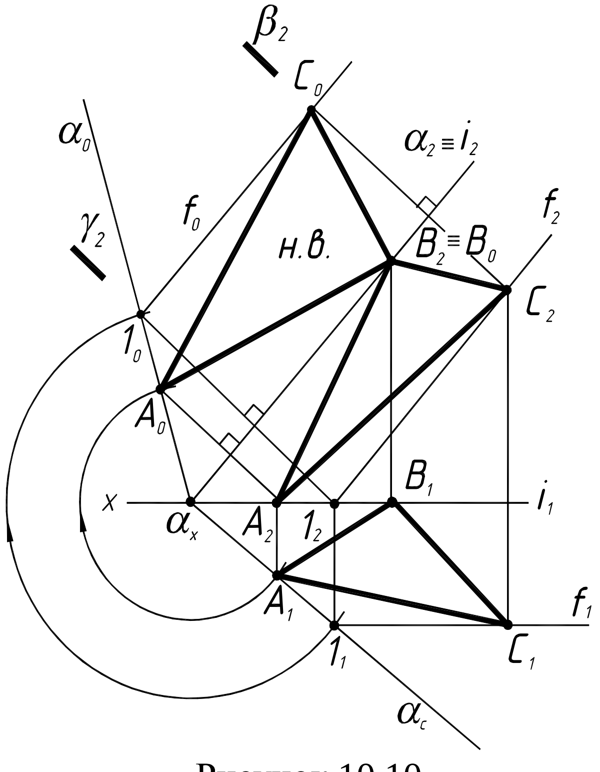


Рисунок 10.10

Точки $\boldsymbol{A}$ и $\boldsymbol{B}$ принадлежат следам плоскости α в совмещенном положении: $A_0 \in \alpha_0$, $B_2 \in \alpha_2$.

Для нахождения совмещенного положения точки C_0 проведем через $C_1 - f_1$, затем f_0 и находим точку C_0.

Соединяем точки $A_0\ B_0\ C_0$ – это и есть н.в. $\Delta\, ABC$.

10.3 Способ плоскопараллельного перемещения

Суть способа заключается в том, что плоскости проекций остаются на месте, а объект перемещается таким образом, чтобы все точки его перемещались в плоскостях, параллельных между собой и параллельных плоскости проекций.

Пример. Определить н.в. плоскости Δ ABC способом плоскопараллельного перемещения (преобразовать плоскость общего положения в плоскость уровня).

1. В плоскости $\Delta\, ABC$ проводим горизонталь $\boldsymbol{h}$.

2. Перемещаем $\Delta\, ABC$ во фронтально-проецирующее положение. $h_1' \perp$ оси $\boldsymbol{x}$. $\Delta\, ABC$ проецируется в линию $A_2'B_2'\,C_2'$

3. Располагаем фронтальную проекцию $A_2'B_2'\,C_2' \parallel$ оси $\boldsymbol{x}$ и определяем н.в. $\Delta A_0B_0C_0$. Построение приведено на рисунке 10.11.

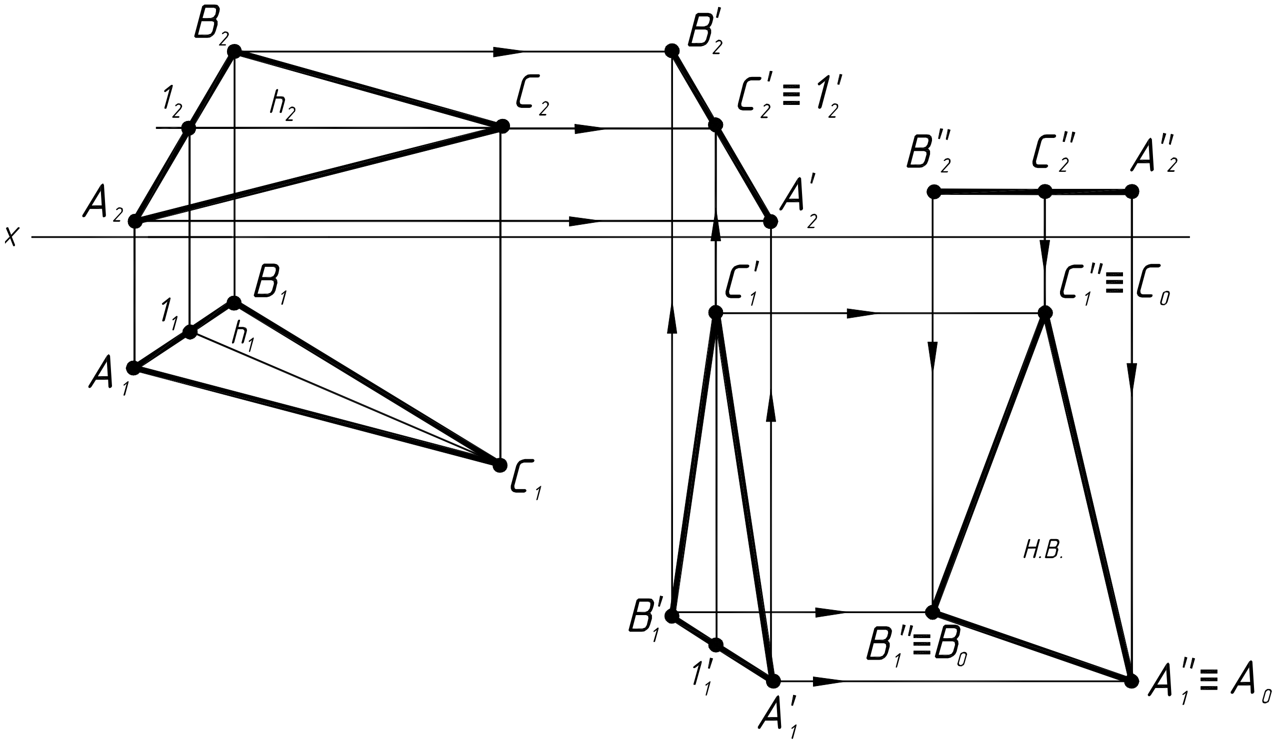


Рисунок 10.11

Учебное издание

Составители:
Базенков Тимофей Николаевич
Винник Наталья Семеновна
Морозова Виктория Александровна

КОНСПЕКТ ЛЕКЦИЙ ПО НАЧЕРТАТЕЛЬНОЙ ГЕОМЕТРИИ

для студентов специальности
1 – 70 02 01 – промышленное и гражданское строительство

Ответственный за выпуск: Винник Н.С.
Редактор: Боровикова Е.А.
Компьютерная вёрстка: Соколюк А.П.
Корректор: Никитчик Е.В.

Подписано в печать 11.03.2019 г. Формат 60х84 $^1/_8$. Бумага «Performer».
Гарнитура «Times New Roman». Усл. печ. л. 7,90. Уч. изд. л. 8,50. Заказ № 82. Тираж 22 экз.
Отпечатано на ризографе учреждения образования «Брестский государственный технический университет». 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.