2. Проведены эксперименты по распознаванию сцен с использованием масштабирующего скользящего окна.

3. Разработано программное обеспечение для моделирования нейронных сетей глубокого доверия для анализа изображений.

Исследования в данной работе показали, что сети глубокого доверия являются эффективным средством для обнаружения и идентификации образов и не требуют сегментации изображений.

Список цитированных источников

1. Гуревич И.Б. Проблема распознавания изображений. Распознавание. Классификация. Прогноз. Математические методы и их применение: Ежегодник. Вып.1. – М.: Наука, 1989.
2. Hinton G.E., Osindero S., Teh Y. A fast learning algorithm for deep belief nets // Neural Computation. – 2006. – Vol. 18. – pp. 1527-1554.
3. Hinton G. Training products of experts by minimizing contrastive divergence // Neural Computation. – 2002. – Vol. 14. – pp. 1771-1800.
4. Hinton G., Salakhutdinov R. Reducing the dimensionality of data with neural networks // Science. – 2006. – 313 (5786). – pp. 504-507.
5. Hinton G. E. A practical guide to training restricted Boltzmann machines. – Tech. Rep. 2010-000. Toronto: Machine Learning Group, University of Toronto, 2010.
6. Bengio Y. Learning deep architectures for AI // Foundations and Trends in Machine Learning. – 2009. – 2(1). – pp. 1-127.
7. Bengio Y., Lamblin P., Popovici D., Larochelle H. Greedy layer-wise training of deep networks // In B. Schölkopf, J.C. Platt, T.Hoffman (Eds.), Advances in Neural Information Processing Systems, 11. – MA: MIT Press, Cambridge, 2007. – pp. 153-160.
8. Erhan D., Bengio Y., Courville A., Manzagol P.-A., Vincent P., Bengio S. Why does unsupervised pre-training help deep learning? // Journal of Machine Learning Research.– 2010.– 11. – pp. 625-660.
9. Golovko V.A Learning technique for deep belief neural networks / V.Golovko, A.Kroshchanka, U. Rubanau, S. Jankowski // In book: Neural Networks and Artificial Intelligence. – Springer, 2014. – Vol. 440. Communication in Computer and Information Science. – pp. 136–146.
10. Головко, В.А. Нейронные сети: обучение, организация и применение: Кн. 4: учеб. пособие для вузов / Общая ред. А.И. Галушкина. – М.: ИПРЖР, 2001. – 256 с.
11. Головко, В.А. От многослойных персептронов к нейронным сетям глубокого доверия: парадигмы обучения и применение/ В.А.Головко // Лекции по Нейроинформатике. – М.: НИЯУ МИФИ, 2015. – С. 47-84.

УДК 519.2

Липовцев А.П.

Научные руководители: к.т.н., доцент Махнист Л.П., к.ф.-м.н., доцент Каримова Т.И.

О МОМЕНТАХ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ПУАССОНА И НЕКОТОРЫХ ЦЕЛОЧИСЛЕННЫХ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНОСТЯХ

Распределение Пуассона – распределение вероятностей случайной величины X, принимающей целые неотрицательные значения $k = 0, 1, 2, \ldots$ с вероятностями

$$P(X = k) = p_k = e^{-\lambda}\frac{\lambda^k}{k!},$$

где $\lambda > 0$ – параметр.

Распределение названо в честь французского математика С.Д. Пуассона (1781-1840), впервые получившего его в 1837 г. Распределение Пуассона является предельным случаем биномиального распределения, когда вероятность *p* осуществления события мала, но число испытаний *n* велико, причем *np* = λ. Точнее, справедливо предельное соотношение:

$$\lim_{\substack{n \to \infty \\ np = \lambda}} P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x = 0, 1, 2,$$

Поэтому распределение Пуассона часто называют также «законом редких событий».

Распределение Пуассона используется при анализе результатов выборочных маркетинговых обследований потребителей, расчете оперативных характеристик планов статистического приемочного контроля в случае малых значений приемочного уровня дефектности, для описания числа разладок статистически управляемого технологического процесса в единицу времени, числа «требований на обслуживание», поступающих в единицу времени в систему массового обслуживания, статистических закономерностей несчастных случаев и редких заболеваний, и т.д.

Моментом n *-ого порядка* ($n = 0,1,2,\dots$) случайной величины X относительно числа a называется математическое ожидание $M\left((X-a)^n\right)$.

Начальным моментом n *-ого порядка* ($n = 0,1,2,\dots$) случайной величины X (относительно числа $a = 0$) называется $\alpha_n = M\left(X^n\right)$ Заметим, что $\alpha_0 = 1$, $\alpha_1 = M(X)$.

Центральным моментом n *-ого порядка* случайной величины X (относительно центра распределения, т.е. числа $a = M(X)$) называется $\mu_n = M\left((X - M(X))^n\right)$. Очевидно, что $\mu_0 = 1$, $\mu_1 = 0$, $\mu_2 = D(X)$.

Факториальным моментом n *-ого порядка* ($n = 0,1,2,\dots$) случайной величины X относительно числа a называется математическое ожидание $M\left((X-a)(X-a-1)\dots(X-a-n+1)\right)$.

Начальным факториальным моментом n *-ого порядка* ($n = 0,1,2\dots$) случайной величины X (относительно числа $a = 0$) называется $\alpha_{[n]} = M\left(X^{[n]}\right) = M\left(X(X-1)\dots(X-n+1)\right)$. Заметим, что $\alpha_{[0]} = 1$, $\alpha_{[1]} = M(X)$.

Центральным факториальным моментом n *-ого порядка* ($n = 0,1,2,\dots$) случайной величины X (относительно центра распределения, т.е. числа $a = M(X)$) называется

$$\mu_{[n]} = M\left((X - M(X))^{[n]}\right) = M\left((X - M(X))(X - M(X) - 1)\dots(X - M(X) - n + 1)\right)$$

Заметим, что $\mu_{[0]} = 1$, $\mu_{[1]} = 0$, $\mu_{[2]} = D(X)$.

Математическое ожидание закона распределения Пуассона (начальный момент *1*-ого порядка):

$$\alpha_1 = M(X) = \sum_{k=0}^{+\infty} k p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}e^{\lambda} = \lambda$$

Вычислим начальный момент 2-ого порядка:

$$\alpha_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^2\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{k\lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\left(\lambda^k\right)'}{(k-1)!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left(\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{(k-1)!}\right)' = \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!}\right)' = \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right)' =$$

$$= \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda e^{\lambda}\right)' = \lambda e^{-\lambda}\left(\lambda' e^{\lambda} + \lambda(e^{\lambda})'\right) = \lambda e^{-\lambda}\left(1\cdot e^{\lambda} + \lambda e^{\lambda}\right) = \lambda(1+\lambda) = \lambda + \lambda^2 .$$

Начальный момент 2-ого порядка можно вычислить иначе:

$$\alpha_2 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^2 p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^2\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+k(k-1))\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda}\left(\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k\lambda^k}{k!} + \sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(k-1)\lambda^k}{k!}\right) = e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-1}}{(k-1)!} + \lambda^2\sum_{k=2}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-2}}{(k-2)!}\right) =$$

$$= e^{-\lambda}\left(\lambda\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} + \lambda^2\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!}\right) = e^{-\lambda}\left(\lambda e^{\lambda} + \lambda^2 e^{\lambda}\right) = \lambda + \lambda^2$$

Здесь использовалось соотношение $k^2 = k + k(k-1)$. Несложно проверить, что $k^3 = k + 3k(k-1) + k(k-1)(k-2)$. Тогда начальный момент 3-ого порядка:

$$\alpha_3 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^3 p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^3\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+3k(k-1)+k(k-1)(k-2))\lambda^k}{k!} = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3$$

Можно проверить, что $k^4 = k + 7k(k-1) + 6k(k-1)(k-2) + k(k-1)(k-2)(k-3)$. Тогда начальный момент 4-ого порядка:

$$\alpha_4 = \sum_{k=0}^{+\infty} k^4 p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k+7k(k-1)+6k(k-1)(k-2)+k(k-1)(k-2)(k-3))\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda}\left(\lambda e^{\lambda} + 7\lambda^2 e^{\lambda} + 6\lambda^3 e^{\lambda} + \lambda^4 e^{\lambda}\right) = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4 .$$

Найдем *начальные факториальные моменты* распределения Пуассона n-ого порядка:

$$\alpha_{[n]} = M\left(X^{[n]}\right) = \sum_{k=0}^{+\infty} k^{[n]} p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k^{[n]}\lambda^k}{k!} = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)\lambda^k}{k!} =$$

$$= e^{-\lambda}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{k(k-1)\cdot\ldots\cdot(k-n+1)\lambda^k}{k!} = \lambda^n e^{-\lambda}\sum_{k=n}^{+\infty}\frac{\lambda^{k-n}}{(k-n)!} = \lambda^n e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{\lambda^k}{k!} = \lambda^n .$$

Начальные моменты n-ого порядка случайной величины X связаны с ее начальными факториальными моментами соотношением [1]

$$\alpha_n = M\left(X^n\right) = M\left(S_n^{(n)}X^{[n]} + \ldots + S_1^{(n)}X^{[1]}\right) = \sum_{m=1}^{n} S_m^{(n)} M\left(X^{[m]}\right) = \sum_{m=1}^{n} S_m^{(n)}\alpha_{[m]}$$

где коэффициенты $S_m^{(n)}$ – числа Стирлинга второго рода.

Некоторые значения $S_i^{(n)}$ внесем в таблицу

n	$S_0^{(n)}$	$S_1^{(n)}$	$S_2^{(n)}$	$S_3^{(n)}$	$S_4^{(n)}$	$S_5^{(n)}$	
1	1						
2	1	1					
3	1	3	1				
4	1	7	6	1			
5	1	15	25	10	1		
6	1	31	90	65	15	1	
[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]	[illegible]

Тогда для *начальных моментов* n-ого порядка распределения Пуассона выполняется $\alpha_n = \sum_{m=1}^{n} S_m^{(n)} \lambda^m$. Например,

$$\alpha_1 = \sum_{m=1}^{1} S_m^{(1)} \lambda^m = S_1^{(1)} \lambda = \lambda$$ – математическое ожидание,

$$\alpha_2 = \sum_{m=1}^{2} S_m^{(2)} \lambda^m = S_1^{(2)} \lambda + S_2^{(2)} \lambda^2 = \lambda + \lambda^2 ,$$

$$\alpha_3 = \sum_{m=1}^{3} S_m^{(3)} \lambda^m = S_1^{(3)} \lambda + S_2^{(3)} \lambda^2 + S_3^{(3)} \lambda^3 = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3 ,$$

$$\alpha_4 = \sum_{m=1}^{4} S_m^{(4)} \lambda^m = S_1^{(4)} \lambda + S_2^{(4)} \lambda^2 + S_3^{(4)} \lambda^3 + S_4^{(4)} \lambda^4 = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4 .$$

Начальные моменты n-ого порядка случайной величины X можно также вычислить, используя формулу:

$$\alpha_n = \sum_{m=1}^{n} \frac{T_m^{(n)}}{m!} \alpha_{[m]}$$

где коэффициенты $T_m^{(n)}$ – последовательность A019538 в OEIS (англ. On-Line Encyclopedia of Integer Sequences, Энциклопедия целочисленных последовательностей). $T_m^{(n)}$ могут быть получены с помощью рекуррентной формулы $T_m^{(n)} = m\left(T_{m-1}^{(n-1)} + T_m^{(n-1)}\right)$, полагая $T_m^{(n)} = 0$, если $m < 1$ или $m > n$.

Начальные моменты n-ого порядка распределения Пуассона связаны с начальными моментами более низких порядков этого распределения соотношением:

$$\alpha_n = \sum_{k=0}^{+\infty} k^n p_k = e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^n \lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=1}^{+\infty} \frac{k^{n-1} \lambda^{k-1}}{(k-1)!} = \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{(k+1)^{n-1} \lambda^k}{k!} =$$

$$= \lambda e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \left(\sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i k^i \right) \frac{\lambda^k}{k!} = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} \left(C_{n-1}^i e^{-\lambda} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{k^i \lambda^k}{k!} \right) = \lambda \sum_{i=0}^{n-1} C_{n-1}^i \alpha_i$$

Тогда, например,

$$\alpha_2 = \lambda\sum_{i=0}^{1} C_1^i\alpha_i = \lambda\left(C_1^0\alpha_0 + C_1^1\alpha_1\right) = \lambda\left(\alpha_0 + \alpha_1\right) = \lambda\left(1+\lambda\right) = \lambda + \lambda^2,$$

$$\alpha_3 = \lambda\sum_{i=0}^{2} C_2^i\alpha_i = \lambda\left(C_2^0\alpha_0 + C_2^1\alpha_1 + C_2^2\alpha_2\right) = \lambda\left(\alpha_0 + 2\alpha_1 + \alpha_2\right) = \lambda + 3\lambda^2 + \lambda^3,$$

$$\alpha_4 = \lambda\sum_{i=0}^{3} C_3^i\alpha_i = \lambda\left(C_3^0\alpha_0 + C_3^1\alpha_1 + C_3^2\alpha_2 + C_3^3\alpha_3\right) = \lambda + 7\lambda^2 + 6\lambda^3 + \lambda^4.$$

Центральные моменты n-ого порядка случайной величины X связаны с ее начальными моментами соотношением [1]

$$\mu_n = M\left(\left(X - M(X)\right)^n\right) = M\left(\left(X-\alpha_1\right)^n\right) = M\left[\sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m X^{n-m}\alpha_1^m\right] =$$

$$= \sum_{m=0}^{n} M\left((-1)^m C_n^m X^{n-m}\alpha_1^m\right) = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m M\left(X^{n-m}\right)\alpha_1^m = \sum_{m=0}^{n}(-1)^m C_n^m \alpha_{n-m}\alpha_1^m$$

Найдем некоторые центральные моменты n-ого порядка распределения Пуассона:

дисперсия $\mu_2 = D(X) = \alpha_2 - \alpha_1^2 = \left(\lambda^2 + \lambda\right) - \lambda^2 = \lambda$ (*среднее квадратичное отклонение* $\sigma(X) = \sqrt{D(X)} = \sqrt{\lambda}$),

$$\mu_3 = \alpha_3 - 3\alpha_2\alpha_1 + 2\alpha_1^3 = \lambda^3 + 3\lambda^2 + \lambda - 3(\lambda^2+\lambda)\lambda + 2\lambda^3 = \lambda,$$

$$\mu_4 = \alpha_4 - 4\alpha_3\alpha_1 + 6\alpha_2\alpha_1^2 - 3\alpha_1^4 = 3\lambda^2 + \lambda,$$

Центральный момент n-ого порядка распределения Пуассона связан с центральными моментами более низких порядков этого распределения соотношением:

$$\mu_n = \sum_{k=0}^{+\infty}(k-\lambda)^n p_k = e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k-\lambda)^n\lambda^k}{k!} = \lambda e^{-\lambda}\sum_{k=1}^{+\infty}\frac{(k-\lambda)^{n-1}\lambda^{k-1}}{(k-1)!} -$$

$$-\lambda e^{-\lambda}\sum_{k=0}^{+\infty}\frac{(k-\lambda)^{n-1}\lambda^k}{k!} = \lambda\sum_{i=0}^{n-2}C_{n-1}^i\mu_i + \lambda\mu_{n-1} - \lambda\mu_{n-1} = \lambda\sum_{i=0}^{n-2}C_{n-1}^i\mu_i$$

Используя соотношение $\mu_n = \lambda\sum_{i=0}^{n-2}C_{n-1}^i\mu_i$, получим:

$$\mu_2 = \lambda\sum_{i=0}^{0}C_1^i\mu_i = \lambda C_1^0\mu_0 = \lambda,$$

$$\mu_3 = \lambda\sum_{i=0}^{1}C_2^i\mu_i = \lambda\left(C_2^0\mu_0 + C_2^1\mu_1\right) = \lambda(1+0) = \lambda,$$

$$\mu_4 = \lambda\sum_{i=0}^{2}C_3^i\mu_i = \lambda\left(C_3^0\mu_0 + C_3^1\mu_1 + C_3^2\mu_2\right) = \lambda(1+0+3\lambda) = \lambda + 3\lambda^2.$$

Список цитированных источников

1. Махнист, Л.П. Моменты распределения вероятностей и некоторые целочисленные последовательности // Л.П. Махнист, Т.И. Каримова, И.И. Гладкий, В.С. Рубанов // Вест. Брест. гос. техн. ун-та. – Брест, 2013. – № 5(83) : Физика, математика, информатика. – С. 54–56.