БЕЛОРУССКИЙ ГОСУДАРСТВЕННЫЙ УНИВЕРСИТЕТ

УДК 517.9

ЖУК
Анастасия Игоревна

АССОЦИИРОВАННЫЕ РЕШЕНИЯ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ С ОБОБЩЕННЫМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

Автореферат
диссертации на соискание ученой степени
кандидата физико-математических наук
по специальности 01.01.02 — дифференциальные уравнения,
динамические системы и оптимальное управление

Минск, 2015

Работа выполнена в Белорусском государственном университете.

Научный руководитель — **Яблонский Олег Леонидович,**
кандидат физико-математических наук, доцент,
доцент кафедры функционального анализа
механико-математического факультета
Белорусского государственного университета.

Официальные оппоненты: **Забрейко Петр Петрович,**
доктор физико-математических наук, профессор,
профессор кафедры нелинейного анализа
и аналитической экономики
механико-математического факультета
Белорусского государственного университета;

Новохрост Вероника Геннадьевна,
кандидат физико-математических наук, доцент,
инженер-программист отдела разработки ПП №14
ИООО "ЭПАМ Системз".

Оппонирующая организация — Учреждение образования
”Гродненский государственный университет
имени Янки Купалы”.

Защита состоится 25 сентября 2015 г. в 10:00 часов на заседании совета по защите диссертаций Д 02.01.07 при Белорусском государственном университете по адресу: 220030, г. Минск, ул. Ленинградская, 8 (корпус юридического факультета), ауд. 407, тел. ученого секретаря (017) 209-57-09.

С диссертацией можно ознакомиться в Фундаментальной библиотеке Белорусского государственного университета.

Автореферат разослан “   ” июня 2015 г.

Ученый секретарь
совета по защите диссертаций
доктор физико-математических наук,
профессор Н.В. Лазакович

ВВЕДЕНИЕ

В настоящей диссертационной работе рассматривается неавтономная система дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Правая часть рассматриваемой системы содержит произведение обобщенных функций на некоторые функции, которые могут не обладать достаточной гладкостью. В этом случае такое произведение однозначно не определено и решение рассматриваемой системы уравнений зависит от подхода к трактовке этой системы. П. Антосиком, П.К. Дасом, С.Т. Завалищиным, А.Н. Сесекиным и др. были предложены различные подходы к данной задаче, приводящие к разным решениям. Например, существует возможность формализации данной задачи в рамках теории обобщенных функций. Также возможен переход к интегральному уравнению, где интеграл понимается в определенном смысле, или к аппроксимации исходного уравнения дифференциальными уравнениями с гладкими коэффициентами.

Перспективным направлением в исследовании дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами, на наш взгляд, является концепция новых обобщенных функций или мнемофункций. Впервые алгебры новых обобщенных функций были введены Ж.Ф. Коломбо. Различные виды таких алгебр были предложены рядом его последователей: Х.А. Биагиони, М. Обергуггунбергером, Э. Розингером, Б. Фишером и др. Наиболее широкая из такого рода алгебр была предложена Ю.В. Егоровым, а общий метод построения таких алгебр и термин "мнемофункция"были предложены А.Б. Антоневичем и Я.В. Радыно.

В данной работе используется алгебра новых обобщенных функций, построенная Н.В. Лазаковичем, конструкция которой позволяет изучать различные типы систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами с единых позиций. С практической точки зрения важно знать, при каких условиях элемент алгебры обобщенных функций ассоциирует обычную функцию. Такие условия позволяют переходить от единой теории обобщенных функций к частным случаям, предлагая более детальное описание решений рассматриваемых систем. Это позволяет охватить решения, получающиеся в результате толкования этой системы уравнений и с помощью других описанных подходов.

Исследованием дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций занимались Н.В. Бедюк, А.Н. Ковальчук, Н.В. Лазакович, В.Г. Новохрост, О.Л. Яблонский и др.

Настоящая диссертационная работа является продолжением исследования в этом направлении, а именно, работа посвящена изучению систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций и построению их ассоциированных решений.

ОБЩАЯ ХАРАКТЕРИСТИКА РАБОТЫ

Связь работы с крупными научными программами, темами

Диссертационная работа выполнена на кафедре функционального анализа Белорусского государственного университета. Исследования проводились в рамках государственной программы фундаментальных исследований "Исследование математических моделей и их применение к анализу систем, структур и процессов в природе и обществе"по теме № ГР20063401 "Дифференциально-операторные модели на тополого-алгебраических и неархимедовых структурах", 2006-2011, а так же в рамках государственной программы "Конвергенция"по теме № ГР20113527 "Алгебро-аналитические методы современного гармонического, функционального анализа и стохастических дифференциальных уравнений и их применение в задачах экологии, нанотехнологий и предсказании эволюции сложных систем", 2011 - 2015.

Цель и задачи исследования

Целью диссертационной работы является описание ассоциированных решений систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Для достижения поставленной цели решались следующие задачи:

1. Описать класс интегральных уравнений, которым удовлетворяют ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений, содержащих обобщенные производные непрерывных функций.

2. Построить $I-$ассоциированные и $S-$ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами.

3. Найти ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в смешанном случае, когда одни обобщенные коэффициенты являются $I-$ассоциированными, а другие $S-$ассоциированными.

Объектом исследования являются системы неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенной правой частью. Предметом исследований являются ассоциированные решения соответствующих им систем уравнений в дифференциалах. Выбор объекта и предмета исследования обусловлен тем, что важен именно вид ассоциированных решений указанных систем при различных предположениях на обобщенные коэффициенты.

Научная новизна

1. Исследованы системы неавтономных дифференциальных уравнений с правой частью, содержащей произведение липшицевых функций и обобщенных производных непрерывных функций ограниченной вариации. Построены все ассоциированные решения данных систем. Ранее рассматривалась подобного рода задача только для автономных систем дифференциальных уравнений. Получена поточечная сходимость к решению соответствующей системы интегральных уравнений.

2. Построены $I-$ассоциированные и $S-$ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений с правой частью, содержащей произведение липшицевых функций и обобщенных производных непрерывных справа функций ограниченной вариации. Аналогичная задача ранее рассматривалась только в одномерном случае. Получена сходимость к решению соответствующей системы интегральных уравнений.

3. Определен вид ассоциированных решений систем неавтономных дифференциальных уравнений с правой частью, содержащей произведение липшицевых функций и обобщенных производных непрерывных справа функций ограниченной вариации в смешанном случае, когда одни обобщенные коэффициенты являются I-ассоциированными, а другие S-ассоциированными. Следует отметить, что вид решений рассматриваемой задачи выведен впервые.

Положения, выносимые на защиту

1. Описание класса интегральных уравнений, которым удовлетворяют ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений, содержащих обобщенные производные непрерывных функций. Новизна этого результата заключается в том, что он получен для систем неавтономных дифференциальных уравнений.

2. Построение $I-$ассоциированных и $S-$ассоциированных решений систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Новизна этого результата в том что, ранее аналогичная задача рассматривалась только в одномерном случае.

3. Нахождение ассоциированных решений систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в смешанном случае, когда одни обобщенные коэффициенты являются $I-$ассоциированными, а другие $S-$ассоциированными. Такая задача ранее не рассматривалась.

Личный вклад соискателя

Все основные результаты, приведенные в диссертации и выносимые на защиту, получены автором лично. Результаты, опубликованные в соавторстве принадлежат авторам на паритетных началах. Роль научного руководителя О.Л. Яблонского состояла в постановке рассмотренных в диссертации вопросов и анализе полученных результатов.

Апробация результатов диссертации

Основные результаты диссертации докладывались на ряде конференций:

- международная математическая конференция "Еругинские чтения – XIII"(Пинск, 2009 г.);

- международная математическая конференция AMADE 2009 (Минск, 2009 г.);

- V Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям (Минск, 2010 г.);

- XI Международная белорусская математическая конференция (Минск, 2012 г.);

- международная математическая конференция "Еругинские чтения – XV"(Гродно, 2013 г.);

- международная конференция "Информационные технологии и системы"(Минск, 2013 г.);

- республиканская научная конференция "Современные проблемы математики и вычислительной техники"(Брест, 2013 г.);

- республиканская научно-практическая конференция "Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты"(Брест, 2014 г.);

- международная математическая конференция "Еругинские чтения – XVI"(Новополоцк, 2014 г.);

- международная научно-практическая конференция "Вычислительные методы, модели и образовательные технологии"(Брест, 2014 г.).

Результаты работы докладывались на научном семинаре "Функциональный анализ и его приложения"(научные руководители — профессор А.Б. Антоневич, профессор П.П. Забрейко, член-корреспондент НАН Беларуси Я.В. Радыно).

Опубликованность результатов диссертации

Результаты диссертационной работы опубликованы в 17 научных работах. Из них 6 статей в научных изданиях в соответствии с пунктом 18 Положения о присуждении ученых степеней и присвоении ученых званий в Республике Беларусь (общим объемом 1,45 авторского листа) и 1 статья в научном журнале "Вестник Брестского государственного технического университета. Физика. Математика. Информатика", 2 статьи в сборниках материалов научных конференций, 7 тезисов докладов на международных конференциях и 1 тезисы докладов на республиканской конференции.

Структура и объем диссертации

Диссертация состоит из введения, общей характеристики работы, трех глав, заключения и библиографического списка. Первая глава содержит обзор литературы и основных методов исследования по теме диссертации. Основные результаты диссертации приводятся во второй и третьей главах. Полный объем диссертации составляет 96 страниц. Библиографический список состоит из 79 наименований, включая собственные публикации автора.

ОСНОВНОЕ СОДЕРЖАНИЕ

Первая глава состоит из двух разделов. В **разделе 1.1** дается сравнительная характеристика классических методов исследования систем дифференциальных уравнений, содержащих в правой части произведение обобщенных функций. Указывается основная литература по теме исследования. В **разделе 1.2** приводится обзор основных результатов по теме диссертационной работы, описывается построение алгебры обобщенных функций.[1] Рассматривается задача Коши для неавтономной системы дифференциальных уравнений на отрезке $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$, содержащей произведение липшицевых функций f^{ij} на обобщенные производные непрерывных справа функций ограниченной вариации L^j, т.е. производные в пространстве $D'(T)$ (пространство распределений Шварца)

Рассмотрим следующую задачу Коши на отрезке $T = [0, a] \subset \mathbb{R}$:

$$\dot{x}^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f^{ij}(t, x(t))\dot{L}^j(t), i = \overline{1, p} \qquad (1)$$

---

[1] Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Доклады НАН Беларуси. – 1994. – Т. 38, №5. – С. 23–27.

$$x(0) = x_0, \tag{2}$$

где f^{ij}, $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ – некоторые функции, $x(t) = [x^1(t), x^2(t), ..., x^p(t)]$, а $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ – функции ограниченной вариации на отрезке T. Без ограничения общности будем считать, что функции $L^j(t)$, $j = \overline{1,q}$ непрерывны справа, $L^j(0) = L^j(0-) = 0$ и $L^j(a-) = L^j(a)$, $j = \overline{1,q}$.

Всюду далее задача (1) – (2) будет рассматриваться в алгебре обобщенных функций. Согласно этому подходу, осуществляется переход от задачи Коши для системы неавтономных дифференциальных уравнений к соответствующей задаче в дифференциалах в алгебре обобщенных функций, при этом обычные функции заменяются на ассоциирующие их новые обобщенные функции. Затем ищется решение системы уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных функций.

Рассмотрим расширенную прямую [2] $\widetilde{\mathbb{R}}$ и выделим во множестве $\widetilde{\mathbb{R}}$ подмножество

$$H = \{\widetilde{h} \in \widetilde{\mathbb{R}} : \widetilde{h} = [(h_n)], h_n > 0, \forall n \in \mathbb{N}, \lim_{n \to \infty} h_n = 0\} \tag{3}$$

Множество всех новых обобщенных функций обозначим $\Im(\mathbb{R})$. Мы будем говорить, что новая обобщенная функция $\widetilde{f} = [\{f_n\}]$ ассоциирует обычную функцию или обобщенную функцию f, если f_n сходится к f в некотором топологическом пространстве.

Пусть $\widetilde{f} = [\{f_n\}]$ и $\widetilde{g} = [\{g_n\}]$ являются обобщенными функциями. Определим композицию $\widetilde{f} \circ \widetilde{g} = [\{f_n(g_n(x))\}] \in \Im(\mathbb{R})$. Аналогично мы можем определить значение новой обобщенной функции $\widetilde{f}$ в обобщенной вещественной точке $\widetilde{x} = [\{x_n\}] \in \widetilde{\mathbb{R}}$ $\widetilde{f}(\widetilde{x}) = [\{f_n(x_n)\}]$.

Для каждого $\widetilde{h} = [\{h_n\}] \in H$ и $\widetilde{f} = [\{f_n(x)\}] \in \Im(\mathbb{R})$ мы определим обобщенный дифференциал [3] $d_{\widetilde{h}}\widetilde{f} = [\{f_n(x + h_n) - f_n(x)\}]$.

Введенные понятия позволяют исследовать дифференциальные уравнения, в том числе и некорректные, с помощью соответствующих уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных функций.

Системе неавтономных дифференциальных уравнений (1) с начальным условием (2) для липшицевых функций f^{ij} и непрерывных справа функций ограниченной вариации L^j ставится в соответствие задача Коши для систем уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных функций.

$$d_{\widetilde{h}}\widetilde{x}^i(\widetilde{t}) = \sum_{j=1}^{q} \widetilde{f}^{ij}(\widetilde{t}, \widetilde{x}(\widetilde{t}))d_{\widetilde{h}}\widetilde{L}^j(\widetilde{t}), i = \overline{1,p} \tag{4}$$

---

[2] Егоров, Ю.В. К теории обобщенных функций / Ю.В. Егоров // Усп. мат. наук. – 1990. – №5. – С. 3–40.

[3] Лазакович, Н.В. Стохастические дифференциалы в алгебре обобщенных случайных процессов / Н.В. Лазакович // Доклады НАН Беларуси. – 1994. – Т. 38, №5. – С. 23–27.

$$\widetilde{x}|_{[\widetilde{0},\widetilde{h})} = \widetilde{x}_0, \tag{5}$$

где $\widetilde{h} = [\{h_n\}] \in H$, $\widetilde{t} = [\{t_n\}] \in \widetilde{T}$, и $\widetilde{x} = [\{x_n(t)\}]$, $\widetilde{f} = [\{f_n(x)\}]$, $\widetilde{x}_0 = [\{x_{n0}(t)\}]$, $L = [\{L_n(t)\}]$ и $L_n \to L$, $x_{n0} \to x(0)$.

Далее, если заменить в (4) – (5) каждую новую обобщенную функцию представителем класса ее определяющего, получим запись задачи (4) – (5) на уровне представителей

$$x_n^i(t+h_n) - x_n^i(t) = \sum_{j=1}^{q} f_n^{ij}(t, x_n(t))[L_n^j(t+h_n) - L_n^j(t)], i = \overline{1,p} \tag{6}$$

$$x_n(t)|_{[0,h_n)} = x_{n0}(t) \tag{7}$$

В качестве представителей для уравнения (6) рассмотрим следующие функции

$$L_n^j(t) = (L^j * \rho_n^j)(t) = \int\limits_0^{\frac{1}{\gamma^j(n)}} L^j(t+s)\rho_n^j(s)\,ds, \tag{8}$$

где $\rho_n^j(t) = \gamma^j(n)\rho^j(\gamma^j(n)t)$, $\rho^j \geq 0$, $supp\rho^j \subseteq [0,1]$, $\int\limits_0^1 \rho^j(s)\,ds = 1$, а $f_n = f * \widetilde{\rho}_n$, $\widetilde{\rho}_n(x_0, x_1, ..., x_p) = n^{p+1}\widetilde{\rho}(nx_0, nx_1, ..., nx_p)$, $\widetilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$, $\widetilde{\rho} \geq 0$, $\int\limits_{[0,1]^{p+1}} \widetilde{\rho}(x_0, x_1, ..., x_p)\,dx_0dx_1...dx_p = 1, supp\widetilde{\rho} \subset [0,1]^{p+1}$.

Здесь $\gamma^j(n)$– некоторая монотонная функция такая, что $\gamma^j(n) \to \infty$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$, причем для $j = \overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n \to \infty$, а для $j = \overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n \to 0$.

Пусть t – произвольная фиксированная точка из отрезка T. Тогда t можно представить в виде $t = \tau_t + m_th_n$, где $\tau_t \in [0, h_n)$, $m_t \in \mathbb{N}$. Заметим, что τ_t зависит от h_n и необходимо записывать τ_{th_n}, но для упрощения обозначений этого делать не будем. Несложно видеть, что решение системы (6) можно записать в виде

$$x_n^i(t) = x_{n0}^i(\tau_t) + \sum_{j=1}^{q}\sum_{k=0}^{m_t-1} f_n^{ij}(\tau_t+kh_n, x_n(\tau_t+kh_n))[L_n^j(\tau_t+(k+1)h_n) - L_n^j(\tau_t+kh_n)], \tag{9}$$

где $i = \overline{1,p}$.

При некоторых дополнительных условиях функция x_n^j будет гладкой, поэтому при этих условиях решение задачи (6) – (7) определяет новую обобщенную функцию, которая является решением задачи (4) – (5). Эти условия описывает следующая теорема.

Теорема 1.11.[4] *Пусть для любых представителей* $(f_n^{ij}) \in \widetilde{f}^{ij}$, $(L_n^j) \in \widetilde{L}^j$, $(x_n^i) \in \widetilde{x}^i$, $(x_{n0}^i) \in \widetilde{x_0}^i$ *выполняется условие:*

$$\frac{d^l}{dt^l}[x_{n0}^i(h_n - t) - x_{n0}^i(t)] - \sum_{j=1}^{q} \frac{d^l}{dt^l}[f_n^{ij}(t, x_{n0}(t))[L_n^j(h_n + t) - L_n^j(t)]] \to 0,$$

при $t \to +0$ *для любых* $l = 0, 1, 2, ...$, *тогда решение задачи Коши* (4) – (5) *в* $\Im(T)$ *существует и единственно.*

Замечание 1.12. *Отметим, что условия теоремы 1.11 не являются обременительными. Согласно теореме Бореля,*[5] *любое начальное условие* $x_{n0}(t)$, $t \in [0, h_n]$ *можно изменить в малой окрестности правого конца промежутка, на котором оно задается, так, что условия теоремы 1.11 будут выполнены. То есть для любой последовательности гладких функций* $\hat{x}_{n0}(t)$, $t \in [0; h_n)$ *найдется последовательность* x_{n0}, *для которой условия теоремы 1.11 выполнены и* $\hat{x}_{n0}(t) = x_{n0}(t)$ *для любого* $t \in [0; \varepsilon_n h_n)$, $0 < \varepsilon_n < 1$.

Определение 1.13. *Будем говорить, что функция* $x(t)$ *является ассоциированным решением уравнения в дифференциалах* (4) – (5), *если существуют представители новых обобщенных функций* $\widetilde{f}$ *и* $\widetilde{L}$ *и* x_0, *для которых* $\widetilde{x}$ *ассоциирует* x *в* $D'(T)$, *т.е. решение задачи* (6) – (7) $x_n(t)$ *сходится в* $D'(T)$ *к* x *и* $\widetilde{x} = [\{x_n(t)\}] \in \Im(\tilde{T})$.

Определение 1.14. *Будем говорить, что функция* x *является* $I-$*ассоциированным* ($S-$*ассоциированным*) *решением уравнения* (4) – (5), *если она является ассоциированным решением задачи* (4) – (5) *при условии, что* $\gamma^j(n)h_n \to \infty$ ($\gamma^j(n)h_n \to 0$) *и представители функций* $\widetilde{f}$ *и* $\widetilde{L}$ *задаются формулой* (8). *В этом случае* $d_{\tilde{h}}\widetilde{L}^j$ *будем называть* $I-$*ассоциированным* ($S-$*ассоциированным*) *коэффициентом.*

Пусть $f : \mathbb{R}^p \to \mathbb{R}$. Введем в рассмотрение следующую функцию

$$f_n(t) = (f * \widetilde{\rho}_n)(t) = \int_{[0,1/n]^p} f(t+s)\widetilde{\rho}_n(s)\, ds,$$

где $\widetilde{\rho}_n(t)$ функции вида:

$$\widetilde{\rho}_n(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^p), \widetilde{\rho}_n(t) \geq 0, supp\widetilde{\rho}_n(t) \subset [0, 1/n]^p, \int_{[0,1/n]^p} \widetilde{\rho}_n(s)\, ds = 1, n \in \mathbb{N}. \tag{10}$$

Функции $\widetilde{\rho}_n(t)$ вида (10) будем называть *шапочками*.

---

[4] Каримова, Т.И. Об ассоциированных решениях нестационарных систем уравнений в дифференциалах в алгебре обобщенных случайных процессов / Т.И. Каримова, О.Л. Яблонский // Вест. Белорус. гос. ун-та. Сер. 1, Физика. Математика. Информатика. – 2009. – №2. – С. 81–86.

[5] Зобин, Н.М. Математический анализ гладких функций / Н.М. Зобин, С.Г. Крейн – Воронеж: Изд-во ВГУ, 1978. – 144 с.

Специально выделим так называемые *стандартные шапочки* (случай, когда $\gamma^j(n) = n$), т.е. последовательность функций $\widetilde{\rho}_n(t)$ порожденной функцией $\widetilde{\rho}(t)$

$$\widetilde{\rho}_n(t) = n^p \widetilde{\rho}(nt), \widetilde{\rho}_n(t) \in C^\infty(\mathbb{R}^p), \widetilde{\rho} \geq 0, supp\widetilde{\rho} \subset [0,1]^p, \int_{[0,1]^p} \widetilde{\rho}(s)\, ds = 1, n \in \mathbb{N}. \tag{11}$$

Замечание 1.15. *Если* $\gamma^j(n) = n$, *то выделим во множестве* H *из соотношения* (3) *следующие подмножества*

$$I = \{\widetilde{h} \in H | 1/n = o(h_n), n \to \infty, h_n \to 0, \forall (h_n) \in \tilde{h}\},$$

$$S = \{\widetilde{h} \in H | h_n = o(1/n), h_n \to 0, n \to \infty, \forall (h_n) \in \tilde{h}\}.$$

Обобщенный дифференциал $d_{\widetilde{h}}$ *назовем* $I-$обобщенным*(*$S-$ обобщенным*)* дифференциалом *и будем обозначать* $d^I_{\widetilde{h}}$ *(*$d^S_{\widetilde{h}}$*), если* $\tilde{h} \in I$ *(*$\tilde{h} \in S$*).*[6]

Отметим, что $I-$*обобщенный(*$S-$*обобщенный) дифференциал* имеет смысл только для новых обобщенных функций $\widetilde{L^j}$, представители которых задаются формулой (8), где $\gamma^j(n) = n$.

Наряду с задачей (4) – (5) рассмотрим системы уравнений с $I-$обобщенными и $S-$обобщенными дифференциалами, где в качестве представителей элементов алгебры обобщенных функций берутся их свертки со стандартными "шапочками".

$$\begin{cases} d^I_{\widetilde{h}} \widetilde{x^i}(\widetilde{t}) = \sum_{j=1}^q \widetilde{f^{ij}}(\widetilde{t}, \widetilde{x}(\widetilde{t})) d^I_{\widetilde{h}} \widetilde{L^j}(\widetilde{t}), \\ \widetilde{x}|_{[0,\widetilde{h})} = \widetilde{x}^0, \end{cases} \tag{12}$$

$$\begin{cases} d^S_{\widetilde{h}} \widetilde{x^i}(\widetilde{t}) = \sum_{j=1}^q \widetilde{f^{ij}}(\widetilde{t}, \widetilde{x}(\widetilde{t})) d^S_{\widetilde{h}} \widetilde{L^j}(\widetilde{t}), \\ \widetilde{x}|_{[0,\widetilde{h})} = \widetilde{x}^0, \end{cases} \tag{13}$$

Замечание 1.16. *В случае стандартных шапочек определение 1.14 примет следующий вид: будем говорить, что функция* x *является* $I-$*ассоциированным (*$S-$*ассоциированным) решением уравнения* (4) – (5), *если данная функция является ассоциированным решением задачи* (12) *(*(13)*).*

Таким образом, под решением системы неавтономных дифференциальных уравнений (1) будем понимать ассоциированное решение системы уравнений в дифференциалах (4) – (5).

---

[6] Новохрост, В.Г. Обыкновенные дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций: дис. ... канд. физ.-мат. наук: 01.01.02/ В.Г. Новохрост; Белорус. гос. ун-т. – Минск, 2006. – 107 л.

Во **второй главе** рассматривается система неавтономных дифференциальных уравнений вида (1) с непрерывными функциями ограниченной вариации L^j, а так же исследуются I—ассоциированные и S—ассоциированные решения системы неавтономных дифференциальных уравнений (1) в алгебре обобщенных функций. Из вида ассоциированных решений, найденных в этой главе, следует, что I—ассоциированные решения совпадают с решениями, которые получены в рамках интегрального подхода, а S—ассоциированные решения совпадают с решениями, которые получены при аппроксимативном подходе.

Исследованием задачи Коши (1) – (2) в одномерном случае в алгебре обобщенных функций занимались А.Н. Ковальчук, В.Г. Новохрост, О.Л. Яблонский. Автономный аналог такой задачи в алгебре обобщенных функций рассматривали Н.В. Лазакович, А.К. Хмызов. Е.В. Шлыков исследовал диагональные автономные системы дифференциальных уравнений второго порядка в алгебре обобщенных функций.

Глава состоит из пяти разделов. В этой главе в качестве представителей $\widetilde{f}^{ij}$, $\widetilde{L}^j$ рассматриваются свертки функций f^{ij} и L^j $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ со стандартными шапочками, т.е.

$$L_n^j(t) = (L^j * \rho_n)(t) = \int\limits_0^{\frac{1}{n}} L^j(t+s)\rho_n(s)\,ds, j = \overline{1,q},$$

где $\rho_n(t) = n\rho(nt)$, $\rho \in C^\infty(\mathbb{R})$ и $\rho \geq 0$, $supp\rho \subseteq [0,1]$, $\int\limits_0^1 \rho(s)\,ds = 1$.

$$f_n^{ij} = f^{ij} * \widetilde{\rho}_n, i = \overline{1,p}, j = \overline{1,q},$$

где $\widetilde{\rho}_n(x_0, x_1, x_2, ..., x_p) = n^{p+1}\widetilde{\rho}(nx_0, nx_1, nx_2, ..., nx_p)$, $\widetilde{\rho} \in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$, $\widetilde{\rho} \geq 0$, $\int\limits_{[0,1]^{p+1}} \widetilde{\rho}(x_0, x_1, ..., x_p)\,dx_0 dx_1 ... dx_p = 1, supp\widetilde{\rho} \subset [0,1]^{p+1}$.

Раздел 2.1 содержит некоторые вспомогательные утверждения, необходимые для доказательства основных теорем.

Раздел 2.2 посвящен нахождению ассоциированных решений систем уравнений в дифференциалах с правой частью, содержащей произведение липшицевых функций и обобщенных производных непрерывных функций ограниченной вариации.

Для описания предельного поведения решений задачи (6) – (7) рассмотрим следующую систему интегральных уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int\limits_0^t f^{ij}(s, x(s))\,dL^j(s), i = \overline{1,p} \qquad (14)$$

Интеграл $\int\limits_{u}^{t} f(x)\,dL(x)$ в этом случае понимается в смысле Лебега-Стилтьеса на промежутке $(u, t]$.

В дальнейшем модуль вектор-столбца $x = [x^1, x^2, ..., x^p]^T$ определим как $|x| = \sum_{i=1}^{p} |x^i|$, а модуль $p \times q$ матрицы – $|f| = \sum_{i=1}^{p} \sum_{j=1}^{q} |f^{ij}|$. Вариацию вектор-функции $L = [L^1, L^2, ..., L^q]$ на интервале A обозначим через $\underset{u\in A}{var} L(u) = \sum_{j=1}^{q} \underset{u\in A}{var} L^j(u)$. Функция $f(t, x)$ удовлетворяет условию Липшица относительно переменной x, если существует постоянная M такая, что $|f(t, x_1) - f(t, x_2)| \leq M|x_1 - x_2|$ для любых $t \in T$.

Заметим, что если f^{ij} липшицевы функции, L^j непрерывные справа функции ограниченной вариации $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$, то решение системы интегральных уравнений (14) существует и единственно в классе функций ограниченной вариации. [7]

Теорема 2.5.[4] *Пусть* f^{ij} $i = \overline{1, p}, j = \overline{1, q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены,* L^j *– функции ограниченной вариации и непрерывны* ($j = \overline{1, q}$). *Тогда при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ *при каждом* $t \in T$ *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши* (6) – (7) *сходится к решению* $x(t)$ *системы уравнений* (14), *если для любого* $t \in T$ *выполняется* $x_{n0}(\tau_t) \to x_0$.

Теорема 2.7. *Пусть выполнены условия теоремы 1.11. и* f^{ij} $i = \overline{1, p}$, $j = \overline{1, q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены,* L^j *– функции ограниченной вариации и непрерывны* ($j = \overline{1, q}$). *Тогда ассоциированное решение задачи Коши* (4) – (5) *является решением системы уравнений* (14), *если для любого* $t \in T$ *выполняется* $x_{n0}(\tau_t) \to x_0$ *при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$.

Таким образом, система уравнений (14) описывает класс интегральных уравнений, которым удовлетворяют ассоциированные решения.

Вид ассоциированного решения задачи (4) для разрывных функций $L^j(t)$ существенно зависит от связи между $\frac{1}{n}$ и h_n. Основные теоремы **раздела 2.3** и **раздела 2.4** доказывают это.

Раздел 2.3 посвящен описанию решений систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенной правой частью в алгебре обобщенных функций, учитывая связь между $\frac{1}{n}$ и h_n, а именно $\frac{1}{n} = o(h_n)$ при $n \to \infty$, $h_n \to 0$. Для описания ассоциированных решений рассматриваемой системы необходимо исследовать предельное поведение решений задачи (6) – (7). Для этого рассмотрим систему уравнений

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int\limits_{0}^{t+} f^{ij}(s, x(s-))\,dL^j(s), i = \overline{1, p} \qquad (15)$$

---

[7] Groh, J. A nonlinear Volterra-Stieltjes integral equation and a Gronwall inequality in one dimension / J. Groh // Illinois journal of Mathematics. – 1980. – Vol. 24, №2. – P. 244–263.

Замечание 2.8 Если f^{ij} липшицевы функции, L^j непрерывные справа функции ограниченной вариации $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$, то решение системы интегральных уравнений (15) существует и единственно в классе функций ограниченной вариации.[7]

Теорема 2.10.[3, 5, 6, 7] *Пусть f^{ij} $i=\overline{1,p}, j=\overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены, $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при $n\to\infty$, $h_n\to 0$ так, что $\frac{1}{n}=o(h_n)$, решение $x_n(t)$ задачи Коши* (6) – (7) *сходится к решению $x(t)$ системы уравнений* (15) *в пространстве $L^1(T)$, если $\int\limits_T |x_{n0}(\tau_t)-x_0|\,dt\to 0$.*

Теорема 2.11.[14] *Пусть выполнены условия теоремы 1.11 и пусть f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ удовлетворяют условию Липшица и ограничены, $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ – непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда $I-$ассоциированное решение задачи Коши* (4) – (5) *является решением системы уравнений* (15), *если $\int\limits_T |x_{n0}(\tau_t)-x_0|\,dt\to 0$ при $n\to\infty$, $h_n\to 0$.*

В **разделе 2.4** исследуется предельное поведение решений задачи (6) – (7), где f^{ij} липшицевы функции, L^j непрерывные справа функции ограниченной вариации, предварительно учитывая связь между $\frac{1}{n}$ и h_n, а именно $h_n=o(\frac{1}{n})$ при $n\to\infty$, $h_n\to 0$. Для описания предельного поведения задачи (6) – (7) в этом случае рассмотрим

$$x^i(t)=x_0^i+\sum_{j=1}^{q}\int\limits_0^t f^{ij}(s,x(s))\,dL^{jc}(s)+\sum_{\mu_r\le t}S^i(\mu_r,x(\mu_r-),\Delta L(\mu_r)),i=\overline{1,p} \tag{16}$$

где $L^{jc}(t)$ – непрерывная, а $L^{jd}(t)$ – разрывная составляющая функции $L^j(t)$, μ_r^j, $r=1,2,...$ – точки разрыва функции $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$, $\Delta L^j(\mu_r)=$ $=L^{jd}(\mu_r+)-L^{jd}(\mu_r-), j=\overline{1,q}$ – величина скачка,

$$S^i(\mu,x,u)=\varphi^i(1,\mu,x,u)-\varphi^i(0,\mu,x,u),$$

а $\varphi^i(t,\mu,x,u)$ находится из уравнения

$$\varphi^i(t,\mu,x,u)=x^i+\sum_{j=1}^{q}u^j\int\limits_0^t f^{ij}(\mu,\varphi(s,\mu,x,u))\,ds, i=\overline{1,p}.$$

Обозначим $L_n^{jc}=L^{jc}*\rho_n$ и $L_n^{jd}=L^{jd}*\rho_n$. Интеграл $\int\limits_u^t f(x)\,dL(x)$ в этом случае понимается в смысле Лебега-Стилтьеса на промежутке $(u,t]$.

Теорема 2.14.[1, 2, 5] *Пусть* f^{ij} $i=\overline{1,p}, j=\overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены,* $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ *– непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при* $n\to\infty$, $h_n\to 0$ *так, что* $h_n=o(\frac{1}{n})$, *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши* (6) *–* (7) *сходится к решению системы уравнений* (16) *для всех* $t\in T$, *если* $|x_{n0}(\tau_t)-x_0|\to 0$ *для любого* $t\in T$.

Теорема 2.15.[14] *Пусть выполнены условия теоремы 1.11 и пусть* f^{ij} $i=\overline{1,p}$, $j=\overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены,* $L^j(t)$, $j=\overline{1,q}$ *– непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда* $S-$*ассоциированное решение* $x_n(t)$ *задачи Коши* (4) *–* (5) *является решением системы уравнений* (16) *для всех* $t\in T$, *если* $|x_{n0}(\tau_t)-x_0|\to 0$ *для любого* $t\in T$ *при* $n\to\infty$, $h_n\to 0$.

В **разделе 2.5** сформулированы основные выводы данной главы.

Третья глава посвящена описанию ассоциированных решений системы неавтономных уравнений в дифференциалах, соответствующих системе неавтономных дифференциальных уравнений вида (1) в смешанном случае, когда одни обобщенные коэффициенты являются $I-$ассоциированными, а другие $S-$ассоциированными. Отметим, что решение из данной главы выведено впервые в алгебре обобщенных функций и, вообще говоря, не может быть получено другими подходами описанными во введении. Аналогичная задача рассматривалась ранее в алгебре обобщенных случайных процессов в работе Н.В. Лазаковича, С.П. Сташулёнка, Т.В. Стемковской.

В **разделе 3.1** приводятся вспомогательные утверждения, которые используются в дальнейшем при доказательстве основной теоремы этой главы. В **разделе 3.2** сформулированы и доказаны основные результаты данной главы.

В этой главе в качестве представителей для уравнения (6) рассматриваются следующие функции:

$$L_n^j(t)=(L^j*\rho_n^j)(t)=\int_0^{\frac{1}{\gamma^j(n)}}L^j(t+s)\rho_n^j(s)\,ds,$$

где $\rho_n^j(t)=\gamma^j(n)\rho^j(\gamma^j(n)t)$, $\rho^j\geq 0$, $supp\rho^j\subseteq[0,1]$, $\int_0^1\rho^j(s)\,ds=1$, а

$$f_n=f*\widetilde{\rho}_n,$$

$\widetilde{\rho}_n(x_0,x_1,...,x_p)=n^{p+1}\widetilde{\rho}(nx_0,nx_1,...,nx_p)$, $\widetilde{\rho}\in C^\infty(\mathbb{R}^{p+1})$, $\widetilde{\rho}\geq 0$, $\int_{[0,1]^{p+1}}\widetilde{\rho}(x_0,x_1,...,x_p)\,dx_0dx_1...dx_p=1, supp\widetilde{\rho}\subset[0,1]^{p+1}$.

Для описания предельного поведения задачи (6) – (7) рассмотрим уравнение, существование и единственность решения которого доказано в монографии. [8]

$$x^i(t) = x_0^i + \sum_{j=1}^{q} \int\limits_0^t f^{ij}(s, x(s))\, dL^{jc}(s) + \sum_{\mu_r \le t} S^i(\mu_r, x(\mu_r-),\ \Delta L(\mu_r)), i = \overline{1,p} \tag{17}$$

где $S^i(\mu, x, u) = \varphi^i(1, \mu, x, u) - \varphi^i(0, \mu, x, u)$, $\mu \in T$, $x \in \mathbb{R}^p$, $u \in \mathbb{R}^q$, а $\varphi^i(t, \mu, x, u)$ находится из уравнения

$$\varphi^i(t, \mu, x, u) = x^i + \sum_{j=1}^{b} u^j \int\limits_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s-, \mu, x, u))\, dH(s-1) +$$

$$+ \sum_{j=b+1}^{q} u^j \int\limits_0^t f^{ij}(\mu, \varphi(s, \mu, x, u))\, ds,$$

$i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$.

Цель настоящей главы – исследовать предельное поведение решения задачи (6) при $n \to \infty$, $h_n \to 0$ так, что $\gamma^j(n) \to \infty$, причем $\gamma^j(n)h_n \to \infty$ для $j = \overline{1,b}$ и $\gamma^j(n)h_n \to 0$ для $j = \overline{b+1,q}$. Здесь $b = \overline{0,q}$, если $b = 0$, то в уравнении (17) $I-$ассоциированные коэффициенты отсутствуют, если $b = q$, то отсутствуют $S-$ассоциированные коэффициенты.

Теорема 3.3.[5, 6] *Пусть* f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены,* $L^i(t), i = \overline{1,q}$ *– непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ $\gamma^j(n) \to \infty$ *так, что для* $j = \overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n \to \infty$ *и для* $j = \overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n \to 0$ *решение* $x_n(t)$ *задачи Коши* (6) – (7) *сходится к решению системы уравнений* (17) *в* $L^1(T)$, *если* $\int\limits_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0|\, dt \to 0$.

Теорема 3.4. *Пусть выполнены условия теоремы 1.11 и* f^{ij} $i = \overline{1,p}$, $j = \overline{1,q}$ *удовлетворяют условию Липшица и ограничены,* $L^j(t), j = \overline{1,q}$ *– непрерывные справа функции ограниченной вариации. Тогда при* $n \to \infty$, $h_n \to 0$ $\gamma^j(n) \to \infty$ *так, что для* $j = \overline{1,b}$ $\gamma^j(n)h_n \to \infty$ *и для* $j = \overline{b+1,q}$ $\gamma^j(n)h_n \to 0$ *ассоциированное решение задачи Коши* (4) – (5) *является решением системы уравнений* (17), *если* $\int\limits_T |x_{n0}(\tau_t) - x_0|\, dt \to 0$.

В **разделе 3.3** сформулированы основные выводы данной главы.

---

[8] Миллер, Б.М. Оптимизация динамических систем с импульсными управлениями / Б.М. Миллер, Е.Я. Рубинович – М.: Наука, 2005. – 429 с.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Основные научные результаты диссертации

Диссертационная работа посвящена изучению многомерных неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. В результате проведенных исследований по теме диссертационной работы получены следующие результаты:

1. Описан класс интегральных уравнений, которым удовлетворяют ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений, содержащих обобщенные производные непрерывных функций [4, 8].

2. Построены $I-$ассоциированные и $S-$ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами [1, 2, 3, 5, 6, 7, 9, 10, 13, 14, 17].

3. Найдены ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в смешанном случае, когда одни обобщенные коэффициенты являются $I-$ассоциированными, а другие $S-$ассоциированными [5, 6, 11, 12, 13, 15, 16].

Рекомендации по практическому использованию результатов

Представленные в диссертации результаты имеют теоретический характер. Практическая значимость результатов определяется возможностью их использования в учебном процессе математических факультетов университетов при чтении специальных курсов.

СПИСОК ПУБЛИКАЦИЙ СОИСКАТЕЛЯ ПО ТЕМЕ ДИССЕРТАЦИИ

Статьи в научных журналах

1. Жук, А.И. Многомерные дифференциальные уравнения с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций / А.И. Жук, О.Л. Яблонский // Веснік Брэсцкага універсітэта. Сер. 4, Фізіка. Матэматыка. – 2010.– №2. – С. 55–62.

2. Жук, А.И. Системы квазидифференциальных уравнений в прямом произведении алгебр мнемофункций. Симметрический случай / А.И. Жук, А.К. Хмызов // Вестник Белорус. гос. ун-та. Сер. 1. – 2010. – № 2. – С. 87–93.

3. Жук, А.И. Неавтономные системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций / А.И. Жук, О.Л. Яблонский // Труды института математики. – 2011. – Т. 19, № 2. – С. 43–51.

4. Жук, А.И. Системы дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций / А.И. Жук, О.Л. Яблонский // Известия НАН Беларуси. Сер. физ. мат. наук. – 2011. – №1. – С. 12–16.

5. Жук, А.И. Неавтономные системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций / А.И. Жук, О.Л. Яблонский // Докл. НАН Беларуси. – 2013. – Т. 57, № 6 – С. 20–23.

6. Жук, А.И. Неавтономные системы дифференциальных уравнений в алгебре мнемофункций / А.И. Жук // Вест. Брест. гос. тех. ун-та. Физика. Математика. Информатика. – 2014. – № 5. – С. 51–53.

7. Жук, А.И. Оценки скорости сходимости к ассоциированным решениям дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре мнемофункций / А.И. Жук, О.Л. Яблонский // Докл. НАН Беларуси. – 2015. – Т. 59, № 2 – С. 17–22.

Статьи в сборниках материалов научных конференций и тезисы докладов

8. Жук, А.И. О приближении систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами / А.И. Жук // Еругинские чтения -XIII: Тез. докл. междунар. мат. конф., Пинск, 26 – 29 мая 2009 г. / Ин-т мат. НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т, Полес. гос. ун-т; редкол.: В.В. Амелькин [и др.]. – Пинск, 2009. – С. 110.

9. Жук, А.И. О приближении неавтономных систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами / А.И. Жук // AMADE-2009:

Тез. докл. междунар. конф., Минск, 14 – 19 сентября 2009г. / Ин-т мат. НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т; редкол.: А.А. Килбас [и др.]. – Минск, 2009. – С. 62–63.

10. Жук, А.И. О приближении многомерных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами / А.И. Жук // V Богдановские чтения по обыкновенным дифференциальным уравнениям: Тез. докл. междунар. мат. конф., Минск, 7-10 декабря 2010 г. / Мин. обр. РБ, Ин-т мат. НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т,; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2010. – С. 106–107.

11. Жук, А.И. Системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций / А.И. Жук, О.Л. Яблонский // XI белорусская математическая конференция: Тез. докл. междунар. мат. конф., Минск, 4–9 ноября 2012 г.: в 2 ч. / Ин-т мат. НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т; редкол.: С.Г. Красовский [и др.]. – Минск, 2012. – Ч. 1. – С. 39-40.

12. Жук, А.И. Неавтономные системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций / А.И. Жук // Еругинские чтения -XV: Тез. докл. междунар. мат. конф., Гродно, 15 – 17 мая 2013 г. / Мин. обр. РБ, Ин-т мат. НАН Беларуси, Белорус. гос. ун-т, Гродн. гос. ун-т; редкол.: А.К. Деменчук [и др.]. – Гродно, 2013. – С. 34–35.

13. Жук, А.И. О приближении неавтономных систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в алгебре обобщенных функций / А.И. Жук // Информационные технологии и системы 2013 : материалы Междунар. науч. конф., Минск, 23 окт. 2013 г. / БГУИР ; редкол.: Л.Ю. Шилин [и др.]. – Минск, 2013. – С. 234–235.

14. Жук, А.И. О приближении неавтономных систем дифференциальных уравнений в алгебре новых обобщенных функций / А.И. Жук // Современные проблемы математики и вычислительной техники : сб. материалов VIII Респ. науч. конф. молодых ученых и студентов, Брест, 21–23 нояб. 2013 г. / Мин. обр. РБ, Брест. гос. техн. ун-т ; редкол.: В.С. Рубанов [и др.]. – Брест, 2013. – С. 117–119.

15. Жук, А.И. О приближении многомерных неавтономных дифференциальных уравнений в алгебре обобщенных функций / А.И. Жук // Математические и физические методы исследований: научный и методический аспекты : сб. тез. докл. Респ. науч.-практ. конф., Брест, 17–18 апр. 2014 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. Н.Н. Сендера. – Брест, 2014. – С. 11–12.

16. Жук, А.И. Многомерные неавтономные дифференциальные уравнения в алгебре обобщенных функций / А.И. Жук // Еругинские чтения -XVI : тез. докл. междунар. мат. конф., Новополоцк, 20–22 мая 2014 г. : в 2 ч. / Ин-т мат. НАН Беларуси ; редкол.: А.К. Деменчук [и др.]. – Новополоцк, 2014. –

Ч. 2. – С. 36–37.

17. Жук, А.И. Оценки скорости сходимости дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами / А.И. Жук // Вычислительные методы, модели и образовательные технологии : сб. материалов Междунар. науч.-практ. конф., Брест, 15–16 окт. 2014 г. / Брест. гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. О.В. Матысика. – Брест, 2014. – С. 99–100.

РЕЗЮМЕ

Жук Анастасия Игоревна

Ассоциированные решения систем дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами

Ключевые слова: неавтономные системы дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами, функции ограниченной вариации, ассоциированные решения систем дифференциальных уравнений.

Диссертационная работа посвящена исследованию систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Целью диссертационной работы является описание ассоциированных решений данныых систем уравнений. Для достижения поставленной цели использовались классические методы теории дифференциальных уравнений и теории новых обобщенных функций. Были получены следующие новые результаты:

1. Описан класс интегральных уравнений, которым удовлетворяют ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений, содержащих обобщенные производные непрерывных функций. Новизна этого результата заключается в том, что он получен для систем неавтономных дифференциальных уравнений.

2. Построены $I-$ассоциированные и $S-$ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами. Новизна этого результата в том, что ранее аналогичная задача рассматривалась только в одномерном случае.

3. Найдены ассоциированные решения систем неавтономных дифференциальных уравнений с обобщенными коэффициентами в смешанном случае, когда одни обобщенные коэффициенты являются $I-$ассоциированными, а другие $S-$ассоциированными. Такая задача ранее не рассматривалась.

Доказанные утверждения обобщают и дополняют результаты, полученные ранее в этом направлении другими авторами. Результаты работы имеют теоретический характер, практическая значимость результатов определяется возможностью их использования в учебном процессе математических факультетов университетов при чтении специальных курсов.

РЭЗЮМЭ

Жук Анастасія Ігараўна

Асацыяваныя рашэнні сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў з абагульненымі каэфіцыентамі

Ключавыя словы: неаўтаномныя сістэмы дыферэнцыяльных раўнанняў з абагульненымі каэфіцыентамі, функцыі абмежаванай варыяцыі, асацыяваныя рашэнні сістэм дыферэнцыяльных раўнанняў.

Дысертацыйная праца прысвечана даследаванню сістэм неаўтаномных дыферэнцыяльных раўнанняў з абагульненымі каэфіцыентамі. Мэтай дысертацыйнай працы з'яўляецца апісанне асацыяваных рашэнняў дадзеных сістэм раўнанняў. Для дасягнення пастаўленай мэты ўжываліся класічныя метады тэорыі дыферэнцыяльных раўнанняў і тэорыі новых абагульненых функцый. Былі атрыманы наступныя новыя вынікі:

1. Апісаны клас інтэгральных раўнанняў, якім задавальняюць асацыяваныя рашэнні сістэм неаўтаномных дыферэнцыяльных раўнанняў, якія ўтрымліваюць абагульненыя вытворныя непарыўных функцый. Навізна гэтага выніку ў тым, што ён атрыманы для сістэм неаўтаномных дыферэнцыяльных раўнанняў.

2. Пабудаваны $I-$асацыяваныя і $S-$асацыяваныя рашэнні сістэм неаўтаномных дыферэнцыяльных раўнанняў з абагульненымі каэфіцыентамі. Навізна гэтага выніку ў тым, што раней аналагічная задача разглядалася толькі ў аднамерным выпадку.

3. Знойдзены асацыяваныя рашэнні сістэм неаўтаномных дыферэнцыяльных раўнанняў з абагульненымі каэфіцыентамі ў змешаным выпадку, калі адны абагульненыя каэфіцыенты з'яўляюцца $I-$асацыяванымі, а іншыя $S-$асацыяванымі. Такая задача раней не разглядалася.

Даказаныя сцвярджэнні абагульняюць і дапаўняюць вынікі, атрыманыя раней у гэтым напрамку іншымі аўтарамі. Вынікі працы маюць тэарэтычны характар, практычная значнасць вынікаў вызначаецца магчымасцю іх выкарыстання ў навучальным працэсе матэматычных факультэтаў універсітэтаў пры чытанні спецыяльных курсаў.

SUMMARY

Zhuk Anastasia Igorevna

Associated solutions of systems of differential equations with generalized coefficients

Keywords: nonautonomous systems of differential equations with generalized coefficients, functions of finite variation, associated solutions of system of differential equations.

The thesis deals with nonautonomous systems of differential equations with generalized coefficients. The purpose of the thesis is to describe the associated solutions of such systems of of differential equations. Classical methods of theory of differential equations and theory of new generalized functions are used in the research. The following new results have been obtained:

1. The class of the integral equations to which satisfy the associated solutions of systems of the nonautonomous differential equations, which contain the generalized derivatives of continuous functions is obtained. The novelty of this result is that it is obtained for systems of nonautonomous differential equations.
2. $I-$associated and $S-$associated solutions of nonautonomuous systems of differential equations with generalized coefficients are constructed. The novelty of this result is that the earlier a similar problem was seen only in one dimension.
3. Associated solutions of nonautonomuous systems of differential equations with generalized coefficients in the mixed case, when one generalized coefficients are $I-$associated, and others are $S-$associated are obtained. This problem has not been previously considered.

Presented results generalize and complement previous results in this direction. The practical significance of the results is the possibility of their use in teaching process of mathematics faculties.

Подписано в печать 03.06.2015. Формат 60×84 $^1/_{16}$. Бумага офсетная.
Ризография. Усл. печ. л. 1,39. Уч.-изд. л. 1,5.
Тираж 60 экз. Заказ 365.

Отпечатано с оригинала-макета заказчика
в республиканском унитарном предприятии
«Издательский центр Белорусского государственного университета».
Свидетельство о государственной регистрации издателя, изготовителя,
распространителя печатных изданий № 2/63 от 19.03.2014.
Ул. Красноармейская, 6, 220030, Минск.