

Рисунок 4 – Схемы расположения котлованов (а) и траншей (б), выполненные в Mathcad

Разработанный Mathcad-документ позволяет значительно сократить время, отводимое на проведение подобных расчетов, а также подготовить отчет по его результатам для пояснительной записки к проекту.

Список цитированных источников

1. Пчелин, В.Н. Методические указания к выполнению курсового и раздела дипломного проектов «Разработка технологической карты на производство земляных работ и устройство фундаментов одноэтажного каркасно-панельного здания» / В.Н. Пчелин [и др.] – Брест: БГТУ, 2014. – 89 с.

УДК 539.3

Олесик Е.С., Пархомук И.П.

**Научный руководитель: ст. преподаватель Гарбачевский В.В.,
доцент Веремейчик А.И.**

РАСЧЕТ СТАТИЧЕСКИ ОПРЕДЕЛИМЫХ И НЕОПРЕДЕЛИМЫХ БАЛОК В СИСТЕМЕ КОМПЬЮТЕРНОЙ МАТЕМАТИКИ «MATHCAD»

Целью настоящей работы является расчет статически определимых и статически неопределимых балок на основе разработанного метода в СКМ «MathCAD».

Известно, что балки являются одним из основных расчетных элементов в сопротивлении материалов. Расчеты на прочность и жесткость, являющиеся ключевыми при исследовании напряженно-деформированного состояния тел, требуют определения внутренних усилий в произвольном сечении балки, что позволит определить опасные сечения, в которых возможно разрушение. Результаты таких расчетов представляются в виде эпюр. Для простых схем нагружения можно использовать стандартные для высшей школы подходы для построения эпюр: по сечениям или по характерным точкам. Однако для сложных схем нагружения, а особенно статически неопределимых балок, для которых при определении опорных реакций недостаточно одних только уравнений статики, такой подход может вызвать серьезные трудности.

Существующие алгоритмы и компьютерные программы позволяют решать такого рода задачи численно и основаны в основном на методе конечных элементов, а это требует при их использовании определенных инженерных навыков, а для рядовых студентов является затруднительным. Поэтому необ-

ходима разработка доступных для каждого студента компьютерных программ, позволяющих решать задачи сопротивления материалов по исследованию напряженно-деформированного состояния балочных систем или обеспечивать возможность контроля правильности аналитического расчета внутренних силовых факторов и построения эпюр стандартными способами.

Построение математической модели расчета балок. Рассмотрим построение математической модели расчета балок на примере консольной статически определимой балки, изображенной на рисунке 1.

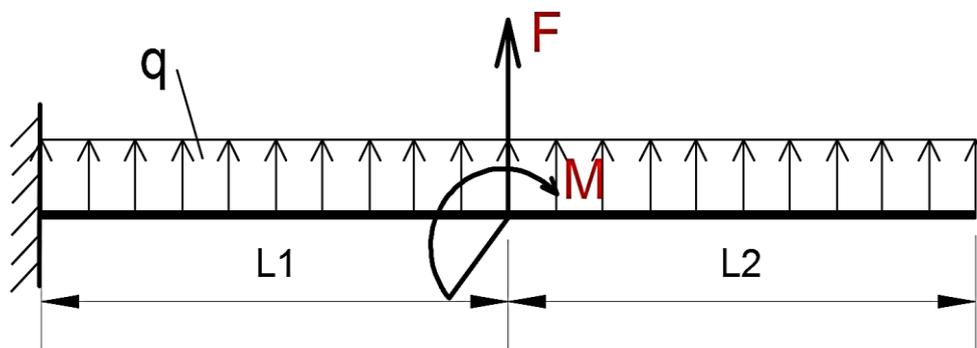


Рисунок 1 – Схема балки

Балка содержит два силовых участка, расчетные схемы которых показаны на рисунке 2.

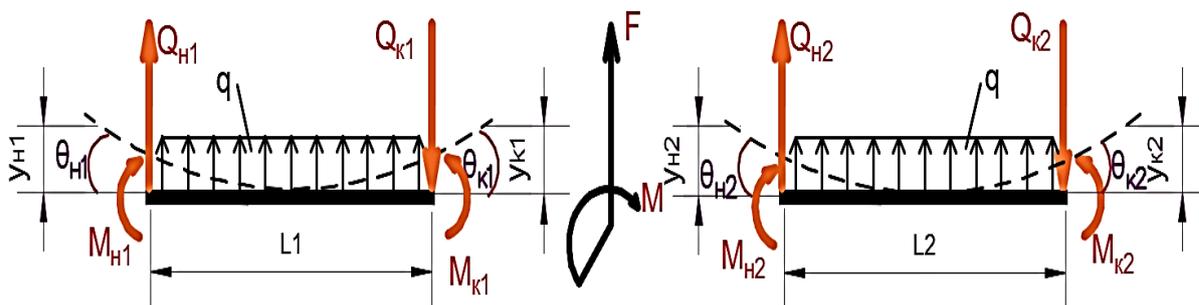


Рисунок 2 – Расчетные схемы силовых участков балки

Положительные значения для внутренних усилий и геометрических параметров: Q — при сдвиге отсеченной части балки по часовой стрелке; M — при растянутых волокнах снизу; θ — при повороте против часовой стрелки; y — при перемещении вверх.

Составление системы линейных алгебраических уравнений. На каждом силовом участке четыре пары неизвестных: поперечных усилий, моментов, углов поворота и прогибов, в начале и конце силовых участков. Соответственно, всего имеется $4 \times 2 \times k$ (где k — количество силовых участков) неизвестных, для которых требуется составить столько же уравнений.

Можно составить по одному уравнению, связывающему неизвестные в начале и в конце каждого силового участка [1], т. е. $4k$ уравнений. Так же составим по четыре уравнения для границ силовых участков, т. е. $(k - 1) \times 4$ уравнений. Характер уравнений будет зависеть от того, чем вызвано появление этой границы. Дополнительно составляем по два уравнения для начала и конца балки. Характер уравнений так же зависит от наличия и способа закрепления на концах.

Таблица 1 – Характер закрепления

При отсутствии закрепления	При шарнирном закреплении	При замещении	При наличии промежуточного шарнира
$Q_{H2} = Q_{K1} + F$ $M_{H2} = M_{K1} + M$ $\theta_{H2} = \theta_{K1}$ $y_{H2} = y_{K1}$	$y_{K1} = 0$ $M_{H2} = M_{K1} + M$ $\theta_{H2} = \theta_{K1}$ $y_{H2} = y_{K1}$	$y_{K1} = 0$ $\theta_{K1} = 0$ $\theta_{H2} = \theta_{K1}$ $y_{H2} = y_{K1}$	$Q_{H2} = Q_{K1} + F$ $M_{H2} = M_{K1} + M$ $M_{K1} = -M$ $M_{H2} = 0$

Следовательно, всего можно составить уравнений:

$$4k + (k - 1) \times 4 + 2 \times 2 = 8k.$$

Таким образом задача сведена к решению СЛАУ, которое осуществляется при помощи встроенной функции СКМ MathCAD Isolve [2]. Данная функция используется для решения систем линейных уравнений, коэффициенты которых заданы матрицей M .

Найденные значения внутренних усилий и геометрических параметров на левых концах силовых участков далее используются для построения эпюр M , Q , θ и y . Для этого составляются дифференциальные зависимости между q , Q , M , θ и y .

Интегрирование соответствующих зависимостей производится встроенными функциями СКМ MathCAD [2].

$$q(z) = \int q'_z dz + C_1, \text{ где } C_1 = q_H,$$

$$q'_z = \frac{d}{dz} q(z) = \frac{q_K - q_H}{z_K - z_H},$$

$$Q(z) = \int q(z) dz + C_2, \text{ где } C_2 = Q_H,$$

$$M(z) = \int Q(z) dz + C_3, \text{ где } C_3 = M_H,$$

$$EI_x Q(z) = \int M(z) dz + C_4, \text{ где } C_4 = EI_x Q_H,$$

$$EI_x y(z) = \int EI_x Q(z) dz + C_5, \text{ где } C_5 = EI_x y_H.$$

Алгоритм расчета:

1. Составляются по два статических и два геометрических уравнения для каждого силового участка, связывающие значения неизвестных в конце и начале силового участка ($4 \times k$ уравнений, где k — количество силовых участков).

2. Составляются по четыре уравнения для каждой границы силовых участков (кроме начала и конца балки) ($4 \times (k - 1)$ уравнений).

3. Составляются по два уравнения для начала и конца балки, аналогично пункту 2 (2×2 уравнений).

4. Неизвестные переносятся в левые части уравнений, а внешнее силовое воздействие, представленное распределенной нагрузкой, силой и моментом — в правые части уравнений.

5. Выделяются коэффициенты при неизвестных (1 или -1) и составляется матрица коэффициентов.

6. Составляется вектор-столбец свободных членов, представляющих правые части уравнений.

7. Разыскивается решение СЛАУ вида $A \cdot x = B$, где A — матрица коэффициентов, — вектор-столбец свободных членов.

8. Найденные неизвестные используются для составления зависимостей Q , M , $EI\theta$ и Ely на каждом силовом участке и построения их эпюр.

Пример расчета определимой консольной балки. На основании предложенного алгоритма рассмотрим расчет статически определимой консольной балки, изображенной на рисунке 1.

Балка содержит два силовых участка, расчетные схемы которых показаны на рисунке 2.

Для рассматриваемой балки $k = 2$ и $n = 4 \times 2 \times 2 = 16$ уравнений, связывающих неизвестные в начале и в конце каждого силового участка и $n = 8$.

Статические и геометрические уравнения для силовых участков:

$$\begin{aligned}
 Q_{к1} - Q_{н1} &= ql_1 & Q_{к2} - Q_{н2} &= ql_2 \\
 M_{к1} - M_{н1} - Q_{к1} \frac{l}{1!} &= q \frac{l^2}{2!} & M_{к2} - M_{н2} - Q_{к2} \frac{l}{1!} &= q \frac{l^2}{2!} \\
 EI\theta_{к1} - EI\theta_{н1} - M_{н1} \frac{l}{1!} - Q_{к1} \frac{l^2}{2!} &= q \frac{l^3}{3!} & EI\theta_{к2} - EI\theta_{н2} - M_{н2} \frac{l}{1!} - Q_{к2} \frac{l^2}{2!} &= q \frac{l^3}{3!} \\
 EIy_{к1} - EIy_{н1} - EI\theta_{н1} \frac{l}{1!} - M_{н1} \frac{l^2}{2!} & & EIy_{к2} - EIy_{н2} - EI\theta_{н2} \frac{l}{1!} - M_{н2} \frac{l^2}{2!} & \\
 - Q_{н1} \frac{l^3}{3!} &= q \frac{l^4}{4!} & - Q_{н2} \frac{l^3}{3!} &= q \frac{l^4}{4!}
 \end{aligned}$$

Таблица 2 – Системы статических и геометрических уравнений

Начало балки	Границы силовых участков	Конец балки
$y_{н1} = 0$ $\theta_{н1} = 0$	$Q_{н2} = Q_{к1} + F$ $M_{н2} = M_{к1} + M$ $\theta_{н2} = \theta_{к1}$ $y_{н1} = y_{к1}$	$M_{к2} = 0$ $Q_{к2} = 0$

Итого при количестве силовых участков $k = 2$ будем иметь 16 уравнений с 16 неизвестными, по которым составляется матрица коэффициентов и вектор-столбец свободных членов.

Таблица 3 – Расположение неизвестных в матрице коэффициентов

1	2	3	4	5	6	7	8
$Q_{н}$	$Q_{к}$	$M_{н}$	$M_{к}$	$\theta_{н}$	$\theta_{к}$	$y_{н}$	$y_{к}$

Решая данную систему, получаем решение в виде вектор-столбца искомых величин: поперечных усилий, моментов, углов поворота и прогибов.

Размерности внутренних силовых факторов и геометрических параметров: Q — кН, M — кН/м, θ — °, y — мм.

Эти значения будем использовать далее для составления зависимости Q , M , θ , y на каждом силовом участке и построения их эпюр.

1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16
1	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
2	-1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
3	-0.5	0	-1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0
4	-0.167	0	-0.5	0	-1	0	-1	1	0	0	0	0	0	0	0
5	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	1	0	0	0	0	0
6	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	-1	1	0	0	0
7	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.5	0	-1	0	-1	1	0
8	0	0	0	0	0	0	0	0	-0.167	0	-0.5	0	-1	0	-1
9	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
10	0	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0	0
11	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0	0	0
12	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0	0	0
13	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0	0	0
14	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	1	0
15	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0	0	0
16	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	-1	0	0	0	0

1	10
2	5
3	1.667
4	0.417
5	10
6	5
7	1.667
8	0.417
9	0
10	0
11	30
12	20
13	0
14	0
15	0
16	0

Рисунок 3 – Матрица коэффициентов и вектор-столбец свободных членов

Достоверность результатов можно проверить с помощью существующих программ для расчета балок.

Разработанная программа позволяет рассчитывать на прочность и жесткость одно- и многопролетные статически определимые, а также статически неопределимые балки с любой степенью статической неопределимости и произвольным характером нагружения, в т. ч. с нелинейными распределенными нагрузками, и строить эпюры прогибов, углов поворота, изгибающих моментов и поперечных сил, возникающих в балке от приложенных внешних нагрузок. Разработанная программа позволяет внедрить сортамент прокатных профилей, с использованием которого можно производить проверку и подбор сечения балок.

В перспективе планируется развитие данной методики на расчет плоских статически определимых и статически неопределимых рамных конструкций и разработка комплекса программ для расчета НДС балочных и рамных систем.

Список цитированных источников

1. Соппротивление материалов / Н.М. Беляев. – М.: Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1976. – 608 с.
2. Mathcad 15 / Mathcad Prime 1.0 / Д.В. Кирьянов. – СПб.: БХВ-Петербург, 2012 – 432 с.

УДК 51-74

Острейко Н.А., Пахомский П.В.

Научные руководители: доцент Кофанов В.А., ст. преподаватель Хомицкая Т.Г.

РАЗРАБОТКА ВСТРОЕННОЙ ФУНКЦИИ МАТНСАД ДЛЯ РЕШЕНИЯ СИСТЕМЫ КОНЕЧНО-РАЗНОСТНЫХ УРАВНЕНИЙ ТЕПЛО- И ВЛАГОПЕРЕНОСА

Многие нестационарные физические процессы описываются уравнениями параболического типа. К таким уравнениям относятся и нестационарные уравнения тепловлагопереноса, которые получаются на основании закона Фурье и имеют для одномерных задач следующий вид [1]:

$$\begin{cases} \frac{dH}{dt} \cdot \frac{\partial t}{\partial \tau} = \nabla \left(\lambda \cdot \nabla t \right) + h_v \cdot \nabla \left(\frac{\delta}{\mu_R} \cdot \nabla \varphi \cdot p_{sat} \right) \\ \frac{dw}{d\varphi} \cdot \frac{\partial \varphi}{\partial \tau} = \nabla \left(D_\varphi \cdot \nabla \varphi + \frac{\delta}{\mu_R} \cdot \nabla \varphi \cdot p_{sat} \right), \end{cases} \quad (1)$$

где H — энтальпия влажного материала, Дж·м⁻³;

t — температура, °С;

τ — время, с;

λ — коэффициент теплопроводности, Вт·м⁻¹·К⁻¹;

h_v — удельная теплота парообразования, Дж·кг⁻¹;

δ — коэффициент диффузии пара в воздухе, кг·м·с⁻¹·Па⁻¹;

μ_R — коэффициент сопротивления;

φ — относительная влажность воздуха;

p_{sat} — давление пара, Па;

w — влагосодержание, кг·м⁻³;

D_φ — коэффициент диффузионной проводимости, кг·м·с⁻¹.