краевых задач. Кроме того, обобщенный код конечного элемента представлен для приложений за пределами области структурного анализа.

Выполняется обзор фундаментальных понятий линейной эластичности и разрабатывается код конечного элемента для плоско-напряженной задачи. Используется принцип минимума потенциальной энергии.

Проводится одно- и двумерная интерполяция.

Отображаются конечные элементы, используя плосконапряженные изопараметрические элементы.

Обобщается с использованием метода взвешенных невязок задача структурного анализа.

В результате получается код конечного элемента для двумерной линейной краевой задачи.

Заключение. Большинство симуляторов работают на основе 2D и 3D конечно-элементного анализа электрических, тепловых и оптических свойств соединений и кремниевых полупроводниковых приборов.

Симулятор решает уравнения Пуассона и непрерывности тока и включает в себя дополнительные модели, такие как носители энергии транспорта (гидродинамические модели), квантовой (механические волновые уравнения) и скалярных волновых уравнений для фотонных волноводных устройств. Важным приложением разработанных средств является использование для задач обучения. В целом, предложенные средства позволяют сократить время при подготовке тестирующего контента для системы обучения и контроля знаний.

Список цитированных источников

1. Simon Li, Yue Fu 3D TCAD Simulation for Semiconductor Processes, Devices and Optoelectronics. – New York, Springer Science+Business Media, 2012. – 292 p.

2.Абрамов, И.И. Численное моделирование элементов интегральных схем / И.И. Абрамов, В.В. Харитонов. Под ред. А.Г. Шашкова – Минск: Высш.шк., 1990. – С. 224.

3. Зенкевич, О. Метод конечных элементов в технике. – М.: Мир, 1986. – С. 247.

4. Mathcad 6.0 Руководство пользователя. – М.: Мир, 1996. – С. 658.

УДК 517.91: 004.021

Вацкель Р.С.

Научный руководитель: к.ф.-м.н., доцент Швычкина Е.Н.

СРАВНЕНИЕ ФАЗОВЫХ ТРАЕКТОРИЙ ХЕМОСТАТ-МОДЕЛИ ДЛЯ РАЗЛИЧНЫХ СКОРОСТЕЙ РОСТА ОРГАНИЗМОВ

Рассмотрим модель роста популяций в хемостате, которую часто называют базовой [1]. Эта базовая хемостат-модель основывается на кинетике Моно и записывается в виде следующей системы уравнений Михаэлиса-Ментен [1]:

$$\begin{cases} \dot{s}(t) = \left(s_0 - s(t)\right)D - x_1(t)\dfrac{m_1 s(t)}{a_1 + s(t)} - x_2(t)\dfrac{m_2 s(t)}{a_2 + s(t)}, \\ \dot{x}_i(t) = \left(\dfrac{m_i s(t)}{a_i + s(t)} - D\right)x_i(t),\ (i = 1,2), \end{cases} \tag{1}$$

где параметр D называется потоком и численно равен скорости подачи питательного субстрата в ферментер; функция $s(t)$ обозначает плотность питательного субстрата; функции $x_1(t),\ x_2(t)$ — плотности микроорганизмов в момент времени t; s_0 — концентрация субстрата в питательном растворе на входе (начальная концентрация); параметры $a_i\ (i=1,2)$ — константы Михаэлиса-Метен; величины $m_i\ (i=1,2)$ обозначают максимальные скорости роста i-го микроорганизма.

Система дифференциальных уравнений (1) описывает простейшую конкуренцию двух микроорганизмов, которые питаются одним питательным субстратом. В таких моделях, когда в хемостате конкурируют две или более популяции эксплуатататорским образом для одного лимитируемого субстрата, происходит вымирание всех, кроме одной из популяций.

Существуют также различные модификации системы Михаэлиса-Ментен (1). В [2, 3] показано, что если конкуренция перемещается вверх на один уровень, то есть допускается, что некоторые микроорганизмы, участвующие в культивировании, питаются другими микроорганизмами (многоуровневая или трофическая модель) — то сосуществование может произойти в форме устойчивого предельного цикла.

Рассмотрим двухуровневую модель хемостата [2, 3]. Пусть хищник, плотность которого определяется функцией $y(t)$, потребляет организм с плотностью $x(t)$, но не может потреблять субстрат $s(t)$. Эта задача интересна как с математической стороны, так и с практической. Например, такой процесс возникает в обработке отходов. Бактерии, представленные как $x(t)$, живут на отходах (или субстрат), в то время как другие организмы, такие как инфузории, питаются бактериями.

Используя формулировку Моно (2), такая модель примет форму [1, 2]:

$$\begin{aligned} s'(t) &= 1 - s(t) - \frac{m_1\, x(t)\, s(t)}{a_1 + s(t)}, \\ x'(t) &= \left(\frac{m_1\, s(t)}{a_1 + s(t)} - 1 - \frac{m_2\, y(t)}{a_2 + x(t)} \right) x(t), \\ y'(t) &= \left(\frac{m_2\, x(t)}{a_2 + x(t)} - 1 \right) y(t), \end{aligned} \tag{2}$$

$$s(0) = s_0 \ge 0,\ x(0) = x_0 \ge 0,\ y(0) = y_0 \ge 0. \tag{3}$$

Константы m_1, m_2 и a_1, a_2, имеют тот же биологический смысл, что и для модели (1).

В работе [4] приведена компьютерная реализация в СКА *Mathematica* процедуры нахождения, классификации точек покоя и предельных циклов системы (2), а также определения их устойчивости. Построена визуализация найденных численных решений и их фазовых траекторий. На основе этих исследований в [5] показана устойчивость решений $x(t),\ y(t)$ относительно положений равновесия системы (2) для различных значений начальных условий $x(0),\ y(0)$.

В данной работе рассмотрим поведение системы (2) в пространстве переменных $(s,\ x,\ y)$.

Рассмотрим, например, следующие значения констант системы (2):

$$a_1 = 0{,}3, a_2 = 0{,}9,\ m_1 = 6, m_2 = 9. \tag{4}$$

При помощи разработанного программного модуля в [4] определяем, что для такого набора параметров внутренние точки покоя имеют координаты: $Ec1(0{,}11, 0{,}32)$, $Ec2(0{,}11, 1{,}42)$. При этом устойчивой локально будет являться только $Ec1$ [2, 4].

Определим в СКА *Mathematica* систему (3).

```
f[u_, i_] := m_i u / (a_i + u)

sys1 = {s'[t] == 1 - s[t] - f[s[t],1] x[t],
x'[t] == (f[s[t],1] - 1) x[t] - f[x[t],2] y[t],
y'[t] == (f[x[t],2] - 1) y[t]};
parr = {a_1 -> 0.3, a_2 -> 0.9, a_1 -> 6, a_1 -> 9};
```

Найдем численное решение системы (2), при начальных условиях $s(0) = 1$, $x(0) = 0{,}1$, $y(0) = 0{,}4$. Для интегрирования системы (2) используем программную функцию NDSolve, определив при этом некоторые специальные настройки [6].

```
sol = NDSolve[{sys1/.parr, s[0] == 1, x[0] == .1, y[0] == .4}, {s, x, y}, {t,0,100},
MaxSteps -> 10000, AccuracyGoal -> 11, PrecisionGoal -> 20][[1]];
```

В результате получим решение в виде трех интерполяционных функций, графики которых приведены на рисунке 1.

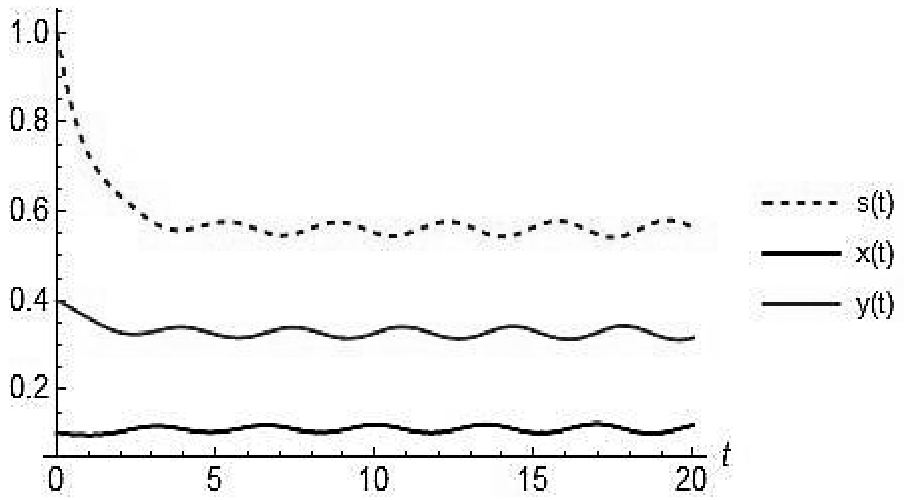

***Рисунок 1** – Графики численных решений функций s(t), x(t) и y(t)*

Построим в фазовом пространстве (s, x, y) кривую, которую определяет численное решение sol (рисунок 2).

```
ParametricPlot3D[Evaluate[{s[t], x[t], y[t]/.sol], {t,0,20},
PlotStyle -> Directive[Thick],
Boxed -> False, Ticks -> {{0,1}, {0,1}, {0,1}},
AxesLabel -> {"s", "x", "y"}, AxesStyle -> Directive[20],
PlotPoints -> 1000, PlotRange -> All,
BoxRatios -> {1,1,1},
DisplayFunction -> Identity, ViewPoint -> {1.1,2.5,1 .1}]
```

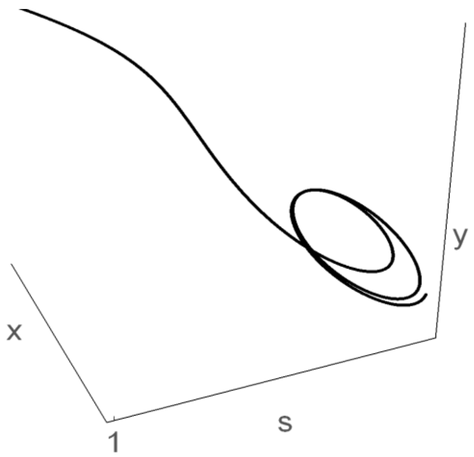

Рисунок 2 – *Фазовая траектория численных решений $s(t)$, $x(t)$, и $y(t)$*

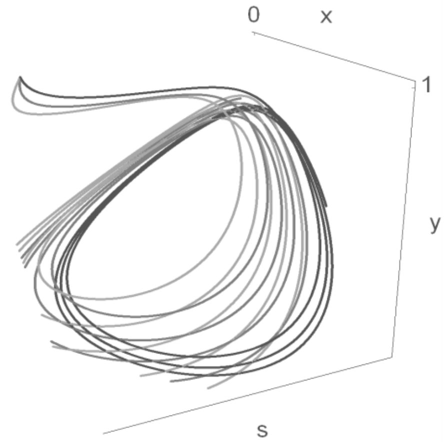

Рисунок 3 – *Фазовые траектории численных решений $s(t)$, $x(t)$ и $y(t)$ для набора значений параметров приведенных в таблице 1*

На рисунке 2 изображена фазовая траектория, вычисленная для набора значений параметров (4). Покажем, как будет изменяться ее характер, когда будут изменяться, например, параметры m_1 и m_2.

$$\mathrm{phase[m1\_, m2\_opt\_]:= Module[\{sol1, t0\},}$$
$$\mathrm{t0 = 20;}$$
$$\mathrm{sol1 = NDSolve[\{s'[t] == 1 - s[t] - x(t)\frac{m1s[t]}{.3 + s[t]},}$$
$$\mathrm{x'[t] == \left(-1 + \frac{m1s[t]}{.3 + s[t]}\right)x[t] - \frac{m2s[t]\,y[t]}{.9 + s[t]},}$$
$$\mathrm{y'[t] == \left(-1 + \frac{m2s[t]}{.9 + s[t]}\right)y[t],}$$
$$\mathrm{s[0] == 1, x[0] == .1, y[t] == .4\}, \{s, x, y\}, \{t, 0, t0\}];}$$
$$\mathrm{ParametricPlot3D[Evaluate[\{s[t], x[t], y[t]/.sol1], \{t, 0, \mathit{t}0\},}$$
$$\mathrm{PlotStyle \to Directive[Thick],}$$
$$\mathrm{Boxed \to False, Ticks \to \{\{0,1\}, \{0,1\}, \{0,1\}\}, AxesLabel \to \{"s", "x", "y"\},}$$
$$\mathrm{AxesStyle \to Directive[20], PlotPoints \to 1000, PlotRange \to All,}$$
$$\mathrm{BoxRatios \to \{1,1,1\}, DisplayFunction \to Identity,}$$
$$\mathrm{ViewPoint \to \{1.1, 2.5, 1.1\}]];}$$

Определим диапазон изменения параметров m_i $(i = 1{,}2)$.

$$\mathrm{TableForm[Table[\{m - 1/3, 2m + 1/5\}, \{m, 4, 6\} //N, TableHeadings \to \{\{\}, \{m_1, m_2\}\}]}$$

Таблица 1 – Набор значенний параметров m_i $(i = 1{,}2)$

m_1	m_2
3.667	8.2
4.667	10.2
5.667	12.2

Используя определенную выше программную функцию $\mathrm{phase}[\mathrm{m1\_,m2\_opt\_}]$ и набор значений m_i $(i=1,2)$, приведенных в таблице 1, построим фазовые траектории системы (2).

$$\mathrm{tab1} = \mathrm{Table}[\mathrm{phase}[\{\mathrm{m}-1/3, 2\,\mathrm{m}+1/5\},$$

$$\mathrm{PlotStyle} \to \mathrm{GrayLevel}[\mathrm{m}/10, 2\,\mathrm{m}/(\mathrm{m}-2)]], \{\mathrm{m},4,6\}];$$

$$\mathrm{Show}[\mathrm{tab1}, \mathrm{DisplayFunction} \to \int \mathrm{DisplayFunction}]$$

Список цитированных источников

1. Smith, H.L. The theory of chemostat: dynamics of microbial competition / H.L. Smith, P. Waltman. − Cambridge University Press, 1995. − 313 p.
2. Kuang, Y. Limit cycles in a chemostat-related model / Y. Kuang // SIAM Journal on Applied Mathematics. – 1989. – № 49. – P. 1759–1767.
3. Abell, M.L. Differential Equations with *Mathematica* / M.L. Abell, J.P. Braselton. − 3rd ed. − Elsevier Academic press, 2004. − 876 p.
4. Швычкина, Е.Н. Компьютерный метод поиска предельных циклов хемостат-модели / Е.Н. Швычкина, Р. С. Вацкель // Вестн. Брест. гос. техн. ун-та. – 2016. – № 5 (101) : Физика, математика, информатика. – С. 56–60.
5. Швычкина, Е.Н. Исследование предельных циклов трёхуровневой модели хемостата / Е.Н. Швычкина, Р.С. Вацкель // Математические и физические методы исследований : научный и методические аспекты : сб. тезисов докладов Респ. науч.-практ. конф. ; Брест, 27–28 апреля 2017 г. / Брест, гос. ун-т им. А.С. Пушкина ; под общ. ред. Н.Н. Сендера. – Брест, 2017. – С. 18.
6. http://reference.wolfram.com/language/ref/NDSolve

УДК 681.5

Воробей И.С.
Научный руководитель: доцент Прокопеня О.Н.

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ОПИСАНИЕ ДВУХКОЛЁСНОГО МОБИЛЬНОГО РОБОТА

Мобильные роботы широко применяются в различных сферах. В зависимости от назначения они могут иметь разнообразную конструкцию. Роботы отличаются количеством колёс, которые могут быть приводными или не приводными. Поворот колёс может осуществляться разными способами на разные углы. Известны конструкции с двигательными модулями, состоящими из пары колёс с индивидуальными приводами [1, 2]. Такой модуль способен перемещаться поступательно при равенстве скоростей колёс и поворачиваться за счет разности скоростей.

В данной работе рассматривается робот, представляющий собой, фактически, один такой модуль. Устройство получается достаточно простым и компактным, однако возникает проблема устойчивости, поскольку вся конструкция может поворачиваться относительно оси колёс. В определённых ситуациях это может играть положительную роль, поскольку робот не может «опрокидываться», после полного оборота он возвращается в исходное состояние. Следует отметить, что робот не предназначен для транспортирования грузов. Тем не менее, необходимо, чтобы платформа робота сохраняла свое положение в процессе движения (не вращалась вместе с колесами), в то время как на колёса передается вращающий момент.