натюк. – Мн.: БНТУ, 2007. – 821 с.
2. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1979. – 559 с.

УДК 624.04
Макаревич Е.В.
Научный руководитель: доцент Игнатюк В.И.

О ВЕЛИЧИНЕ КОЭФФИЦИЕНТА НЕРАВНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ ДЛЯ ЭЛЛИПСА И НЕРАВНОПОЛОЧНОГО УГОЛКА

При вычислениях потенциальной энергии системы [1]

$$U = -W = \sum\int \frac{M^2}{2EI}ds + \sum\int k\cdot\frac{Q^2}{2GA}ds + \sum\int\frac{N^2}{2EA}ds\,, \tag{1}$$

действительной работы внутренних сил W, перемещений точек и сечений от действия внешних нагрузок по формуле Мора [1]

$$\Delta_{ip} = \sum\int\frac{\overline{M}_i M_p}{2EI}ds + \sum\int k\cdot\frac{\overline{Q}_i Q_p}{2GA}ds + \sum\int\frac{\overline{N}_i N_p}{2EA}ds \tag{2}$$

необходимо знать коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе k, который вычисляется по формуле [1]:

$$k = \frac{A}{I^2}\int_A \frac{\left(S_{omc}^2\right)}{\left(a_y^2\right)}dA \tag{3}$$

где a_y – ширина (зависимость изменения) поперечного сечения; $S_{omc.}$ – статический момент отсечённой части сечения относительно центральной оси.

В выражениях (1) – (3) обозначено: E и G – модули упругости и сдвига материала, A и I – площадь и момент инерции поперечного сечения элемента, EI – изгибная жёсткость, GA – жёсткость при сдвиге, EA – продольная жёсткость элементов, M_P, Q_P, N_P – изгибающий момент, поперечная и продольная силы в сечениях системы от действия внешней нагрузки, M_i, Q_i, N_i – усилия в системе от действия единичной силы, приложенной в точке(сечении), в которой определяется перемещение, в направлении искомого перемещения.

В известной учебной и справочной литературе [1–17] по строительной механике и сопротивлению материалов значения коэффициента k приводятся для весьма ограниченного числа сечений. Для прямоугольного сечения k = 1,2, для прокатных двутавров приводится приближённая формула – $k = A/A_{cm}$, где A – общая площадь поперечного сечения, а A_{cm} – площадь вертикальной стенки двутавра), для круглого поперечного сечения k = 10/9 и др. Причём в ряде случаев для одинаковых сечений в разных литературных источниках приводятся разные, часто отличающиеся, значения коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе k.

Здесь рассматривается получение выражений для определения и значений этого коэффициента для ряда поперечных сечений, не встречающихся в литературе.

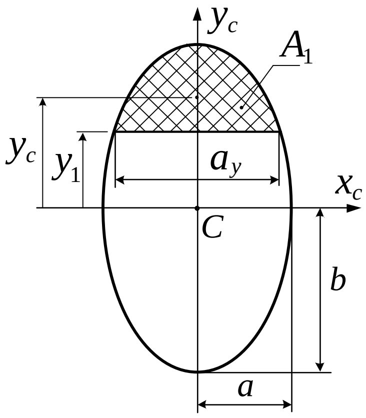

Рисунок 1

<u>Эллиптическое сечение</u> (рис. 1).

Площадь сечения эллипса определяется выражением:

$$A = \pi ab,$$

момент инерции сечения эллипса относительно оси *x* равен:

$$I = \frac{\pi ab^3}{4}.$$

Кривая эллипса определяется выражением

$$f(x, y) = \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - 1,$$

откуда ширина сечения эллипса a_y на высоте y_1 равна

$$x(y_1) = a_y = 2a\sqrt{1 - \frac{y_1^2}{b^2}} = 2\frac{a}{b}\sqrt{b^2 - y_1^2}.$$

Перепишем функцию

$$y = \frac{b}{a}\sqrt{a^2 - x^2}.$$

Площадь отсечённой части эллипса с использованием интеграла получим в виде:

$$A_{отс.1} = 2 \cdot \int_0^{a_y} \frac{b}{a} \cdot \sqrt{a^2 - x^2}\,dx = \frac{2 \cdot a \cdot \left(\frac{a}{2}\sqrt{1 - \left(\frac{y1}{b}\right)^2} \cdot \sqrt{a^2 - a^2\left(1 - \left(\frac{y1}{b}\right)^2\right)} + \frac{1}{2}a \cdot \arcsin\left(\sqrt{1 - \left(\frac{y1}{b}\right)^2}\right)\right)}{b}.$$

Определим положение центра тяжести отсеченной части эллипса:

$$y_c = \frac{1}{A_{отс.1}} \cdot \int_{-\sqrt{a^2 - \left(a \cdot \frac{y_1}{b}\right)^2}}^{\sqrt{a^2 - \left(a \cdot \frac{y_1}{b}\right)^2}} \int_{y_1}^{\frac{b}{a}\cdot\sqrt{a^2 - x^2}} y\,dx\,dy = \frac{\left(-\frac{1}{3} \cdot \frac{b^2\left(a^2 - \frac{a^2 y1^2}{b^2}\right)}{a^2} + b^2\sqrt{a^2 - \frac{a^2 y1^2}{b^2}} - y1^2\sqrt{a^2 - \frac{a^2 y1^2}{b^2}}\right)b}{a\sqrt{1 - \frac{y1^2}{b^2}}\sqrt{a^2 - a^2\left(1 - \frac{y1^2}{b^2}\right)} + a\arcsin\left(\sqrt{1 - \frac{y1^2}{b^2}}\right)}.$$

Выразим статический момент отсеченной части эллипса:

$$S_{отс.1} = A_{отс.1} \cdot y_c = -\frac{1}{3} \cdot \frac{b^2\left(a^2 - \frac{a^2 y1^2}{b^2}\right)}{a^2} + b^2\sqrt{a^2 - \frac{a^2 y1^2}{b^2}} - y1^2\sqrt{a^2 - \frac{a^2 y1^2}{b^2}}.$$

Найдём выражение коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе:

$$k=2\frac{A}{I^2}\int_0^b\left(\frac{\left(-\frac{1}{3}\cdot\frac{b^2\left(a^2-\frac{a^2y1^2}{b^2}\right)}{a^2}+b^2\sqrt{a^2-\frac{a^2y1^2}{b^2}}-y1^2\sqrt{a^2-\frac{a^2y1^2}{b^2}}\right)^2}{2a\sqrt{1-\frac{y_1^2}{b^2}}}\right)dy_1=\frac{10}{9}.$$

Таким образом, коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе для сечения в виде эллипса, как и для круглого сечения, является постоянной величиной и равен 10/9.

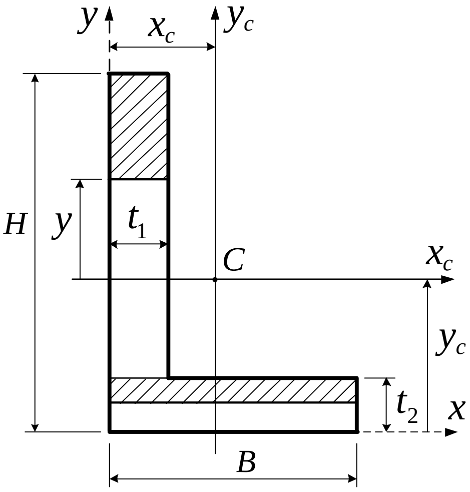

Рисунок 2

<u>Неравнополочный уголок.</u>

Площадь и момент инерции уголка:

$$A=H\,t_1+(B-t_1)t_2;$$

$$I=\frac{BH^3}{12}-\left(\frac{(B-t_1)(H-t_2)^3}{12}+(B-t_1)(H-t_2)\left(H-\frac{3t_2}{2}-\frac{H}{2}\right)^2\right).$$

Положение центра тяжести уголка:

$$y_C=\frac{S}{A}=\frac{(B-t_1)t_2\frac{t_2}{2}+Ht_1\frac{H}{2}}{A}=\frac{\frac{H^2t_1}{2}+\frac{t^2(B-t_1)}{2}}{Ht_1+t_2(B-t_1)}.$$

Статический момент верхней отсечённой части:

$$S_1=t_1(H-y_c-y)\left(y+\frac{H-y_c-y}{2}\right)=t_1\left(H-y-\frac{\frac{H^2t_1}{2}+\frac{t_2{}^2(B-t_1)}{2}}{H\,t_1+t_2(B-t_1)}\right)\left(\frac{H}{2}+\frac{y}{2}-\frac{\frac{H^2t_1}{2}+\frac{t_2{}^2(B-t_1)}{2}}{2(H\,t_1+t_2(B-t_1))}\right).$$

Статический момент нижней отсечённой части:

$$S_2=t_1(H-t_2)\left(\frac{H-t_2}{2}-y_c+t_2\right)+B\left(y-(y_c-t_2)\right)\left(y_c-t_2+\frac{y-(y_c-t_2)}{2}\right)=t_1(H-t_2)\times$$

$$\times\left(\frac{H}{2}+\frac{t_2}{2}-\frac{\frac{H^2t_1}{2}+\frac{t_2{}^2(B-t_1)}{2}}{Ht_1+t_2(B-t_1)}\right)+B\left(\frac{y}{2}-\frac{t_2}{2}+\frac{\frac{H^2t_1}{2}+\frac{t_2{}^2(B-t_1)}{2}}{2(Ht_1+t_2(B-t_1))}\right)\left(t_2+y-\frac{\frac{H^2t_1}{2}+\frac{t_2{}^2(B-t_1)}{2}}{Ht_1+t_2(B-t_1)}\right).$$

Коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе вычисляем с помощью компьютерной алгебры Maple (см. ниже).

$$k=\frac{A}{I^2}\left(\int_{-y_c+t_2}^{H-y_c}\frac{S_1{}^2}{t_2}dy+\int_{-y_c}^{-y_c+t_2}\frac{S_2{}^2}{B}dy\right)=\frac{1}{\left(\frac{1}{12}BH^3-\frac{1}{12}(B-t1)(H-t2)^3-(B-t1)(H-t2)\left(\frac{1}{2}H-\frac{3}{2}t2\right)^2\right)^2}\Big((H\,t1+(B$$

$$-t1)\,t2)\Bigg(\frac{1}{20}\,\frac{t1^{2}\Bigg(\bigg(H-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)^{5}-\bigg(-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}+t2\bigg)^{5}\Bigg)}{t2}+\frac{1}{4}\,\frac{1}{t2}\Bigg(\bigg(\bigg(\frac{1}{4}\,t1^{2}\bigg(-2\,H$$

$$+\frac{2\left(\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1\right)}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)+t1^{2}\bigg(\frac{1}{2}H-\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)\bigg)\bigg(\bigg(H-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)^{4}-\bigg($$

$$-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}+t2\bigg)^{4}\bigg)\bigg)+\frac{1}{3}\,\frac{1}{t2}\bigg(\bigg(\bigg(\frac{1}{4}\,t1^{2}\bigg(H-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)^{2}+t1^{2}\bigg(-2\,H+\frac{2\left(\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\right.}{H\,t1+(B-t1}$$

$$-\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)+t1^{2}\bigg(\frac{1}{2}H-\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)^{2}\bigg)\bigg)\bigg(\bigg(H-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)^{3}-\bigg($$

$$-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}+t2\bigg)^{3}\bigg)\bigg)+\frac{1}{2}\,\frac{1}{t2}\bigg(\bigg(t1^{2}\bigg(H-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)^{2}\bigg(\frac{1}{2}H-\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)+t1^{2}\bigg(-2\,H$$

$$+\frac{2\left(\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1\right)}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)\bigg(\frac{1}{2}H-\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)^{2}\bigg)\bigg(\bigg(H-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)^{2}-\bigg(-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}$$

$$+t2\bigg)^{2}\bigg)\bigg)+\frac{t1^{2}\bigg(H-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)^{2}\bigg(\frac{1}{2}H-\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)^{2}(H-t2)}{t2}\Bigg)\Bigg)$$

$$+\frac{1}{\left(\frac{1}{12}B\,H^{3}-\frac{1}{12}(B-t1)\,(H-t2)^{3}-(B-t1)\,(H-t2)\left(\frac{1}{2}H-\frac{3}{2}t2\right)^{2}\right)^{2}}\Bigg((H\,t1+(B-t1)\,t2)\Bigg(\frac{1}{20}B\bigg(\bigg(-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}+t2\bigg)^{5}$$

$$+\frac{\left(\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1\right)^{5}}{(H\,t1+(B-t1)\,t2)^{5}}\bigg)+\frac{1}{4}\bigg(\frac{1}{2}B\bigg(-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}+t2\bigg)+B\bigg(\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}-\frac{1}{2}t2\bigg)\bigg)\bigg(\bigg($$

$$-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}+t2\bigg)^{4}-\frac{\left(\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1\right)^{4}}{(H\,t1+(B-t1)\,t2)^{4}}\bigg)+\frac{1}{3}\,\frac{1}{B}\bigg(\bigg(\bigg(t1\,(H-t2)\bigg(\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}t2-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)+B\bigg($$

$$-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}+t2\bigg)\bigg(\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}-\frac{1}{2}t2\bigg)\bigg)B+\bigg(\frac{1}{2}B\bigg(-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}+t2\bigg)$$

$$+B\bigg(\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}-\frac{1}{2}t2\bigg)\bigg)^{2}\bigg)\bigg(\bigg(-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}+t2\bigg)^{3}+\frac{\left(\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1\right)^{3}}{(H\,t1+(B-t1)\,t2)^{3}}\bigg)\bigg)+\frac{1}{B}\bigg(\bigg(t1\,(H$$

$$-t2)\bigg(\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}t2-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)+B\bigg(-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}+t2\bigg)\bigg(\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}-\frac{1}{2}t2\bigg)\bigg)\bigg(\frac{1}{2}B\bigg($$

$$-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}+t2\bigg)+B\bigg(\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}-\frac{1}{2}t2\bigg)\bigg)\bigg)\bigg(\bigg(-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}+t2\bigg)^{2}$$

$$-\frac{\left(\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1\right)^{2}}{(H\,t1+(B-t1)\,t2)^{2}}\bigg)\bigg)$$

$$+\frac{\bigg(t1\,(H-t2)\bigg(\frac{1}{2}H+\frac{1}{2}t2-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}\bigg)+B\bigg(-\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}+t2\bigg)\bigg(\frac{1}{2}\,\frac{\frac{1}{2}(B-t1)\,t2^{2}+\frac{1}{2}H^{2}\,t1}{H\,t1+(B-t1)\,t2}-\frac{1}{2}t2\bigg)\bigg)^{2}t2}{B}\Bigg)\Bigg)$$

При $t_2=0,\ t_1=B$ и при $t_1=0,\ t_2=H$ будем иметь прямоугольное сечение, для которого получаем $k=1,2$. Для $t_2=3$ мм, $t_1=3$ мм, $B=16$ мм, $H=25$ мм будем иметь $k\approx 1,0998$.

Список цитированных источников

1. Борисевич, А.А. Строительная механика: учебное пособие / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Игнатюк. – Мн.: БНТУ, 2007. – 821 с.
2. Беляев, Н.М. Сопротивление материалов / Н.М. Беляев. – М.: Гостехиздат, 1965. – 856 с.
3. Бурчаков, Ю.И. Строительная механика / Ю.И. Бурчаков, В.Е. Гнедин, В.М. Денисов. – М.: Высшая школа, 1983. – 255 с.
4. Дарков, А.В. Сопротивление материалов / А.В. Дарков, Г.С. Шпиро. – М.: Высш. шк., 1969. – 734 с.
5. Долинский, Ф.В. Краткий курс сопротивления материалов / Ф.В. Долинский, М.Н. Михайлов. – М.: Высшая школа, 1969. – 432 с.
6. Ицкович, Г.М. Руководство к решению задач по сопротивлению материалов / Г.М. Ицкович, А.И. Винокуров, Л.С. Минин. – М.: Высшая школа, 1970. – 544 с.
7. Киселов, В.А. Строительная механика. Общий курс / А.В. Киселов. – М.: Стройиздат, 1986. – 520 с.
8. Мухин, Н.В. Статика сооружений / Н.В. Мухин, А.Н. Першин, Б.А. Шишман. – М.: Высшая школа, 1980. – 343 с.
9. Пособие к решению задач по сопротивлению материалов / И.Н. Миролюбов [и др.]. – М.: Высшая школа, 1985. – 399 с.
10. Рабинович, И.М. Курс строительной механики стержневых систем: в 2 ч. / И.М Рабинович. – т. II: Статически неопределимые системы. – М.: Госстройиздат, 1954. – 392 с.
11. Ржаницын, А.Р. Строительная механика / А.Р. Ржаницын. – М.: Высш. шк., 1991. – 438 с.
12. Руководство к практическим занятиям по курсу строительной механики (статика стержневых систем) / под ред. Г.К. Клейна. – М.: Высшая школа, 1980. – 318 с.
13. Снитко, Н.К. Строительная механика / Н.К. Снитко. – М.: Высш. шк., 1980. – 431 с.
14. Сопротивление материалов / под ред. Г.С. Пасаренко. – К.: Вища школа, 1986. – 775 с.
15. Справочник проектировщика промышленных, жилых, общественных зданий и сооружений. Расчётно-теоретический: в 2 кн. / под ред. А.А. Уманского – М.: Стройиздат, 1977. – 415 с.
16. Строительная механика / под ред. А.В. Даркова. – М.: Высш. шк., 1976. – 600 с.
17. Феодосьев, В.И. Сопротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1979. – 559 с.

УДК 624.04
Макаревич Е.В.
Научный руководитель: доцент Игнатюк В.И.

О ВЕЛИЧИНЕ КОЭФФИЦИЕНТА НЕРАВНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ ДЛЯ БРЕВЕНЧАТОГО СЕЧЕНИЯ

Коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе вычисляется по формуле [1]:

$$k = \frac{A}{J^2} \cdot \int_A \frac{(S_x^{omc})^2}{b_y^2} dA \tag{1}$$

где b_y – ширина (зависимость изменения) поперечного сечения; S_x^{omc} – статический момент отсечённой части сечения относительно центральной оси (оси изгиба), A и I – площадь и момент инерции поперечного сечения элемента.

Здесь рассмотрим получение выражений для определения коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе для ряда поперечных сечений, не встречающихся в литературе – для бревенчатого и рельсового сечений.

<u>Сечение в форме тёсанного бревна</u> (рис. 1).