

## ОБ ЭНЕРГИИ СДВИГА В ИЗГИБАЕМОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЕ

При растяжении-сжатии напряжения постоянны по сечению, а при изгибе изменяются по линейным зависимостям, и для деформаций используется гипотеза плоских сечений [1]. При сдвиге же, возникающем в изгибаемых элементах, касательные напряжения распределяются по закону Журавского, нелинейно, и деформации неравномерны. В связи с этим зависимость потенциальной энергии сдвига в изгибаемых системах существенно усложняется. Получим выражение потенциальной энергии сдвига в изгибаемой системе  $W_Q$  и определим параметры, влияющие на величину энергии.

Рассмотрим бесконечно малый элемент стержневой изгибаемой системы длиной  $ds$  (рис. 1), касательные напряжения в сечении которого (рис. 1 б) изменяется в соответствии с формулой Журавского [2] (рис. 1 в):

$$\tau = \frac{QS_y^{omc}}{Jb_z}, \quad (1)$$

где  $Q$  – поперечная сила, действующая в сечении;  $J$  – момент инерции сечения;  $b_z$  – ширина сечения на высоте  $z$ ;  $S_y^{omc}$  – статический момент осеченной части сечения.

Деформированный вид элемента показан на рисунке 1 а. Угол сдвига  $\gamma$  определяется согласно закону Гука:

$$\gamma = \frac{\tau}{G} = \frac{1}{G} \cdot \frac{QS_y^{omc}}{Jb_z} = \frac{Q}{GJ} \cdot \frac{S_y^{omc}}{b_z}, \quad (2)$$

где  $G$  – модуль сдвига материала элемента.

Величина сдвиговых деформаций определяется из геометрических соображений и с учетом малости углов сдвига будет равна:

$$\frac{d\Delta_Q}{ds} = \operatorname{tg} \gamma \approx \gamma \quad \text{или} \quad d\Delta_Q = \gamma ds. \quad (3)$$

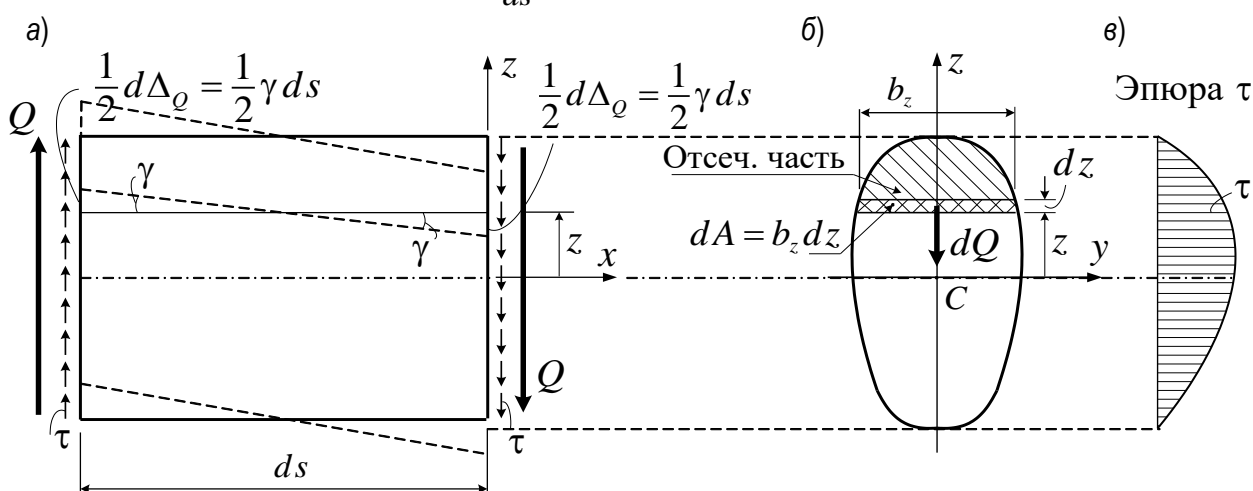


Рисунок 1

Потенциальную энергию выразим через работу внутренних сил  $U$ . При этом в связи с неравномерным распределением касательных напряжений по высоте сечения сначала

определим потенциальную энергию сдвига для бесконечно малого участка сечения  $dA = b_z d y$ , поперечная (внутренняя) сила на котором, выраженная через касательные напряжения, равна:

$$dQ = \tau dA. \quad (4)$$

Потенциальная энергия сдвига для рассматриваемого участка сечения ( $dA$ ) будет определяться выражением

$$\Delta dW_Q = -\Delta dU_Q = \frac{1}{2} dQ \cdot d\Delta_Q,$$

которое с учетом зависимостей (3), (4) примет вид:

$$\Delta dW_Q = \frac{1}{2} \tau dA \cdot \gamma ds = \frac{1}{2} \tau \gamma dA ds,$$

а с учетом зависимостей (1) и (2) получим в виде:

$$\Delta dW_Q = \frac{1}{2} \left( \frac{QS_y^{omc}}{J b_z} \right) \cdot \left( \frac{Q}{GJ} \cdot \frac{S_y^{omc}}{b_z} \right) dA ds = \frac{Q^2 ds}{2GA} \cdot \frac{A}{J^2} \cdot \frac{(S_y^{omc})^2}{b_z^2} dA. \quad (5)$$

Для получения зависимости для всего сечения проинтегрируем выражение (5) по всему сечению:

$$dW_Q = \int_A \Delta dW_Q = \int_A \left[ \frac{Q^2 ds}{2GA} \cdot \frac{A}{J^2} \cdot \frac{(S_y^{omc})^2}{b_z^2} \right] dA ds = \frac{Q^2 ds}{2GA} \cdot \left( \frac{A}{J^2} \cdot \int_A \frac{(S_y^{omc})^2}{b_z^2} dA \right), \quad (6)$$

Часть выражения, обведенная пунктирной линией, зависит только от параметров сечения и для определенного сечения будет являться неизменной величиной, при этом эта часть выражения, как показывает ее анализ, безразмерна. Учитывая все это, указанное выражение назвали коэффициентом неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе. Обозначим его  $k$ . Таким образом, коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе определяется выражением:

$$k = \frac{A}{J^2} \cdot \int_A \frac{(S_y^{omc})^2}{b_z^2} dA. \quad (7)$$

Проинтегрировав теперь выражение (6) по длине элемента изгибаемой системы получим потенциальную энергию сдвига для системы в целом в виде:

$$W_Q = \int_0^l k \frac{Q^2 ds}{2GA}.$$

Учитывая, что работа внутренних сил равна потенциальной энергии (с обратным знаком), и что выражение для вычисления перемещений определяется через возможную работу внутренних сил, во всех этих выражениях будет присутствовать коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе.

Таким образом, для определения потенциальной энергии, работы внутренних сил и перемещений точек и сечений в изгибаемой системе необходимо знать значения коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе (7) для используемого сечения или иметь выражения для вычисления этого коэффициента.

#### Список цитированных источников

1. Борисевич, А.А. Строительная механика: учеб. пособ. / А.А. Борисевич, Е.М. Сидорович, В.И. Иг-

натюк. – Мн.: БНТУ, 2007. – 821 с.

2. Феодосьев, В.И. Соппротивление материалов / В.И. Феодосьев. – М.: Наука, 1979. – 559 с.

УДК 624.04

**Макаревич Е.В.**

**Научный руководитель: доцент Игнатюк В.И.**

## **О ВЕЛИЧИНЕ КОЭФФИЦИЕНТА НЕРАВНОМЕРНОСТИ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ КАСАТЕЛЬНЫХ НАПРЯЖЕНИЙ ПРИ ИЗГИБЕ ДЛЯ ЭЛЛИПСА И НЕРАВНОПОЛОЧНОГО УГОЛКА**

При вычислениях потенциальной энергии системы [1]

$$U = -W = \sum \int \frac{M^2}{2EI} ds + \sum \int k \cdot \frac{Q^2}{2GA} ds + \sum \int \frac{N^2}{2EA} ds, \quad (1)$$

действительной работы внутренних сил  $W$ , перемещений точек и сечений от действия внешних нагрузок по формуле Мора [1]

$$\Delta_{ip} = \sum \int \frac{\bar{M}_i M_p}{2EI} ds + \sum \int k \cdot \frac{\bar{Q}_i Q_p}{2GA} ds + \sum \int \frac{\bar{N}_i N_p}{2EA} ds \quad (2)$$

необходимо знать коэффициент неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе  $k$ , который вычисляется по формуле [1]:

$$k = \frac{A}{I^2} \int_A \frac{(S_{omc}^2)}{(a_y^2)} dA \quad (3)$$

где  $a_y$  – ширина (зависимость изменения) поперечного сечения;  $S_{omc}$  – статический момент отсечённой части сечения относительно центральной оси.

В выражениях (1) – (3) обозначено:  $E$  и  $G$  – модули упругости и сдвига материала,  $A$  и  $I$  – площадь и момент инерции поперечного сечения элемента,  $EI$  – изгибная жёсткость,  $GA$  – жёсткость при сдвиге,  $EA$  – продольная жёсткость элементов,  $M_p$ ,  $Q_p$ ,  $N_p$  – изгибающий момент, поперечная и продольная силы в сечениях системы от действия внешней нагрузки,  $M_i$ ,  $Q_i$ ,  $N_i$  – усилия в системе от действия единичной силы, приложенной в точке(сечении), в которой определяется перемещение, в направлении искомого перемещения.

В известной учебной и справочной литературе [1–17] по строительной механике и сопротивлению материалов значения коэффициента  $k$  приводятся для весьма ограниченного числа сечений. Для прямоугольного сечения  $k = 1,2$ , для прокатных двутавров приводится приближённая формула –  $k = A / A_{cm}$ , где  $A$  – общая площадь поперечного сечения, а  $A_{cm}$  – площадь вертикальной стенки двутавра), для круглого поперечного сечения  $k = 10/9$  и др. Причём в ряде случаев для одинаковых сечений в разных литературных источниках приводятся разные, часто отличающиеся, значения коэффициента неравномерности распределения касательных напряжений при изгибе  $k$ .

Здесь рассматривается получение выражений для определения и значений этого коэффициента для ряда поперечных сечений, не встречающихся в литературе.