

Рис. 6. График вертикальных перемещений поверхности полупространства от действия гармонической силы

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Lamb H. On the propagation of Tremors over the surface of fn Elastic solid. Phil. Trans, Poy. Soc., London, (A), 203, 1904. pp.1-42.
2. Шехтер О.Я. Об учете инерционных свойств грунта при расчете вертикальных вынужденных колебаний массивных фундаментов. Сб. тр. НИИ оснований № 42 «Вибрации сооружений». Стройвоенмориздат, 1948. С. 72-104.
3. Сеймов В. Динамические контактные задачи. К., Наукова думка, 1976. 283с.
4. Развитие теории контактных задач в СССР, -М., Наука, 1976. 493с.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. -М., ФМ, 1963. 1100с.
6. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. -М., Наука, 1967. 368с.

УДК 519.3

Игнатюк В.И., Богомолов Д.В.

О ФОРМИРОВАНИИ РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ МКЭ В РАСЧЕТАХ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ УПРУГОЙ ПОДАТЛИВОСТИ УЗЛОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Соединение элементов на расчётных схемах сооружений чаще всего принимается жёстким либо шарнирным. Однако в реальных сооружениях связи в узлах в большинстве случаев имеют упругую податливость, которая может существенно влиять на распределение и величины усилий в сооружениях. Исследование и оценка этого влияния представляет большой интерес при анализе работы сооружений.

При расчете сооружений методом конечных элементов основным разрешающим уравнением [1, 3] является уравнение вида:

$$[K]\{\Delta\} = \{P\}, \quad (1)$$

где: $[K]$ – матрица жесткости системы; $\{\Delta\}$ – вектор пере-

мещений узлов системы; $\{P\}$ – вектор внешних узловых нагрузок.

Учет упруго-податливого соединения элементов в узлах вызовет соответствующие изменения в матрицах $[K]$ и $\{P\}$. Так как матрица жесткости системы $[K]$ включает матрицы жесткости конечных элементов (КЭ) [1, 3], учет упруго-податливого присоединения КЭ к узлам может быть выполнен на уровне определения матриц жесткости отдельных конечных элементов.

Матрица жесткости плоского стержневого КЭ в общем случае имеет вид [4]:

Игнатюк Валерий Иванович. К.т.н., доцент, зав. каф. строительной механики Брестского государственного технического университета.

Богомолов Дмитрий Владимирович. Студент строительного факультета Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

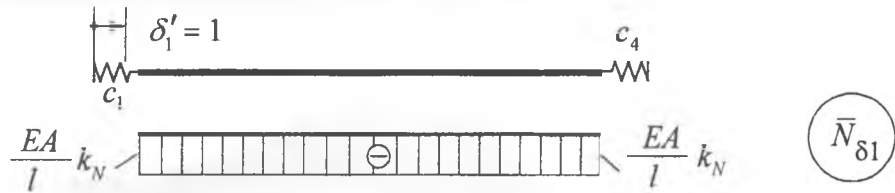


Рис. 1. Эпюры усилий и реакции связей в КЭ от $\delta'_1 = 1$

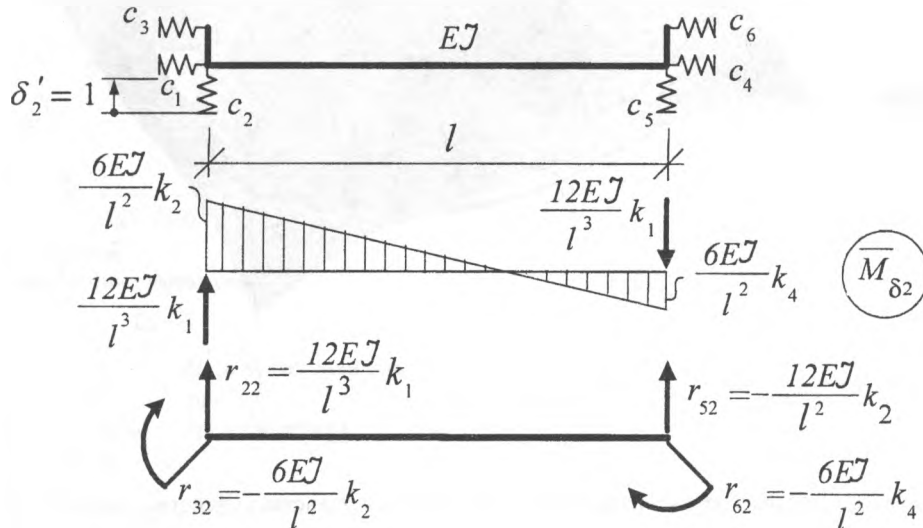


Рис. 2. Эпюры усилий и реакции связей в КЭ от $\delta'_2 = 1$

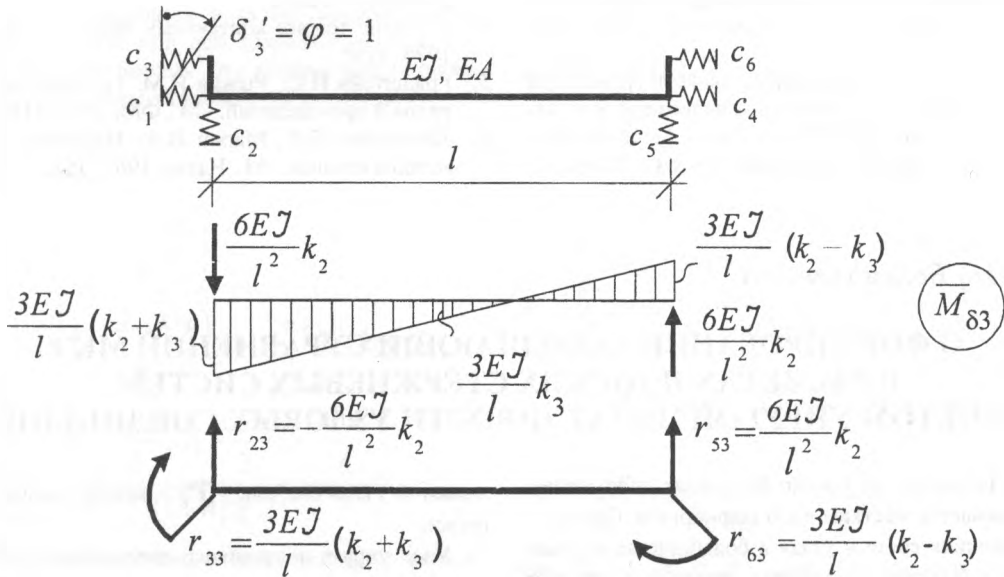


Рис. 3. Эпюры усилий и реакции связей в КЭ от $\delta'_3 = 1$.

$$[K_2] = \begin{bmatrix} r_{11} & r_{12} & r_{13} & r_{14} & r_{15} & r_{16} \\ r_{21} & r_{22} & r_{23} & r_{24} & r_{25} & r_{26} \\ r_{31} & r_{32} & r_{33} & r_{34} & r_{35} & r_{36} \\ r_{41} & r_{42} & r_{43} & r_{44} & r_{45} & r_{46} \\ r_{51} & r_{52} & r_{53} & r_{54} & r_{55} & r_{56} \\ r_{61} & r_{62} & r_{63} & r_{64} & r_{65} & r_{66} \end{bmatrix}, \quad (2)$$

где коэффициенты r_{ik} представляют собой реакции на концах КЭ в направлении действия i -той связи от единичного перемещения k -той связи.

Получим матрицу жесткости КЭ в местной системе координат, присоединяющегося упруго к узлам с помощью трех связей в каждом из узлов, жесткости которых равны: c_1, c_4 – горизонтальных связей в начале и в конце стержня, c_2, c_5 – соответствующих вертикальных связей и c_3, c_6 – угловых связей (рис. 1 – 3). Такая система имеет три лишние связи

$$[K'_3] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} k_N & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} k_N & 0 & 0 \\ 0 & \frac{12EJ}{l^3} k_1 & -\frac{6EJ}{l^2} k_2 & 0 & -\frac{12EJ}{l^3} k_1 & \frac{6EJ}{l^2} k_4 \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} k_2 & \frac{3EJ}{l} (k_2 + k_3) & 0 & \frac{6EJ}{l^2} k_2 & \frac{3EJ}{l} (k_2 - k_3) \\ \hline -\frac{EA}{l} k_N & 0 & 0 & \frac{EA}{l} k_N & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{12EJ}{l^3} k_1 & \frac{6EJ}{l^2} k_2 & 0 & \frac{12EJ}{l^3} k_1 & \frac{6EJ}{l^2} k_4 \\ 0 & -\frac{6EJ}{l^2} k_4 & \frac{3EJ}{l} (k_2 - k_3) & 0 & \frac{6EJ}{l^2} k_4 & \frac{3EJ}{l} (k_4 + k_5) \end{bmatrix} \quad (3)$$

и может быть рассчитана методом сил. В результате расчета [2] получим эпюры усилий в элементе и реакции в опорах в виде, представленном для единичного горизонтального смещения левой горизонтальной связи – на рис. 1, для единичного смещения левой вертикальной связи – на рис. 2, для единичного угла поворота левой угловой связи – на рис. 3. Аналогично определяют эпюры и реакции усилий от единичных смещений связей на правом конце элемента.

В результате матрица жесткости КЭ в местной системе координат с учетом упруго-податливого присоединения его к узлам будет иметь вид (3),

$$\text{где обозначено: } k_N = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_4}\right) \frac{EA}{l}}, \quad k_1 = \frac{t_4}{t_2 t_4 - 3t_3^2};$$

$$k_2 = \frac{t_3 + t_4}{t_2 t_4 - 3t_3^2}; \quad k_3 = \frac{1}{3t_4} + \frac{t_3}{t_4} k_2; \quad k_4 = \frac{t_4 - t_3}{t_2 t_4 - 3t_3^2};$$

$$k_5 = \frac{1}{3t_4} - \frac{t_3}{t_4} k_4; \quad (4)$$

$$t_2 = 1 + \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_5}\right) \frac{12EJ}{l^3} + \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_6}\right) \frac{3EJ}{l}; \quad (5)$$

$$t_3 = \left(\frac{1}{c_6} - \frac{1}{c_3}\right) \frac{EJ}{l}; \quad t_4 = 1 + \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_6}\right) \frac{EJ}{l}.$$

Принимая в выражении (3) значения c_3 либо c_6 равными нулю, получим соответственно матрицы жесткости КЭ в случаях его шарнирного закрепления с левой и с правой сторон. Их можно получить также из расчета соответствующих

$$[K'_3] = \begin{bmatrix} \frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 & -\frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & \frac{3EJ}{l^3} f_2 & -\frac{3EJ}{l^2} f_2 & 0 & -\frac{3EJ}{l^3} f_2 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^2} f_2 & \frac{3EJ}{l} f_2 & 0 & \frac{3EJ}{l^2} f_2 & 0 \\ \hline -\frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 & \frac{EA}{l} f_1 & 0 & 0 \\ 0 & -\frac{3EJ}{l^3} f_2 & \frac{3EJ}{l^2} f_2 & 0 & \frac{3EJ}{l^3} f_2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad (6)$$

КЭ методом сил.

Матрица жёсткости конечного элемента с упругими связями и с шарнирным опиранием справа будет иметь вид (6).

$$\text{где: } f_1 = k_N = \frac{1}{1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_4}\right) \frac{EA}{l}};$$

$$f_2 = \frac{1}{1 + \frac{3EJ}{l^3} \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_5}\right) + \frac{3EJ}{c_3 l}} \quad (7)$$

Матрица жесткости КЭ с упруго-податливыми связями присоединения его к узлам и с шарнирным опиранием слева будет иметь подобный вид.

Матрица жесткости КЭ в общей системе координат определяется выражением [4]

$$[K] = [T_\alpha]^T \cdot [K'] \cdot [T_\alpha], \quad (8)$$

где $[T_\alpha]$, $[T_\alpha]^T$ – обычная и транспонированная матрицы преобразования координат.

При действии на КЭ распределённых нагрузок в методе конечных элементов их необходимо преобразовывать к узловым. Это преобразование для конечных элементов, упруго-податливо присоединяемых к узлам, не будет совпадать со случаями жёстко-шарнирного соединения КЭ в узлах и может быть получено также на основе расчётов соответствующих конечных элементов методом сил [2]. Далее приведены некоторые схемы нагружений таких КЭ и полученные величины узловых нагрузок для них:

1) загрузка конечного элемента с упруго-податливым присоединением концов стержня к узлам равномерно распределёнными нагрузками

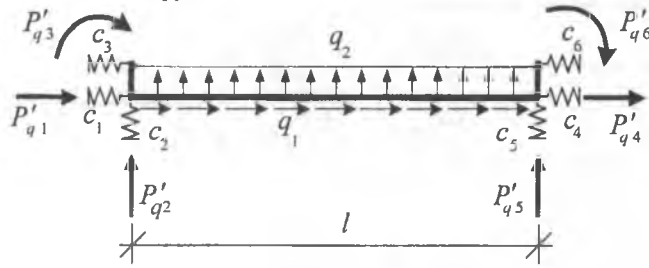


Рис. 4

$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{2}(2 - f_{q1}) \\ \frac{q_2 l}{2}(1 - f_{q2}) \\ -\frac{q_2 l^2}{12}(1,5 - 3f_{q2} - f_{q3}) \\ \frac{q_1 l}{2} f_{q1} \\ \frac{q_2 l}{2}(1 + f_{q2}) \\ \frac{q_2 l^2}{12}(1,5 + 3f_{q2} - f_{q3}) \end{Bmatrix} \quad (9)$$

здесь $f_{q2} = \frac{3t_{q2}t_4 - t_{q3}t_3}{6t_3^2 - 2t_2t_4}$; $f_{q3} = 3f_{q2} \frac{t_3}{t_4} + \frac{t_{q3}}{2t_4}$,

где: $t_{q2} = \frac{EJ}{l} \left(\frac{1}{c_6} - \frac{1}{c_3} \right) + \frac{8EJ}{l^3} \left(\frac{1}{c_5} - \frac{1}{c_2} \right)$;

$t_{q3} = 1 + \frac{3EJ}{l} \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_6} \right)$; t_2, t_3, t_4 - см. (5);

2) загрузка конечного элемента с упруго-податливым присоединением концов стержня к узлам и шарниром справа равномерно распределёнными нагрузками (рис. 5)

$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{2}(2 - f_{q1}) \\ q_2 l \left(1 - \frac{3}{8} f_{q2} \right) \\ -\frac{q_2 l^2}{8}(4 - 3f_{q2}) \\ \frac{q_1 l}{2} f_{q1} \\ \frac{3q_2 l}{8} f_{q2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (10)$$

где f_1 и f_2 - см. (7);

$f_{q1} = \left(1 + \frac{2EA}{c_1 l} \right) f_1$; $f_{q2} = \left(1 + \frac{8EJ}{c_2 l^3} + \frac{4EJ}{c_3 l} \right) f_2$;

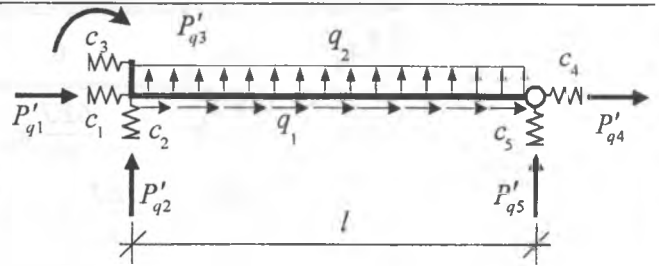


Рис. 5

3) для конечного элемента с упруго-податливым присоединением концов стержня к узлам и с шарниром слева матрицу $\{P'_q\}$ при действии равномерно распределённых нагрузок легко получить из матрицы (10);

4) при загрузке конечного элемента с шарнирами по обоим концам и с упруго-податливыми остальными связями равномерно распределёнными нагрузками q_1 и q_2 силы P'_{q1} и P'_{q4} будут такими же, как во всех вышеприведенных матрицах $\{P'_q\}$, а силы $P'_{q2} = P'_{q5} = \frac{q_2 l}{2}$ как в обычной двухопорной балке;

5) загрузка конечного элемента с упруго-податливым присоединением концов стержня к узлам и шарниром справа треугольной убывающей нагрузкой

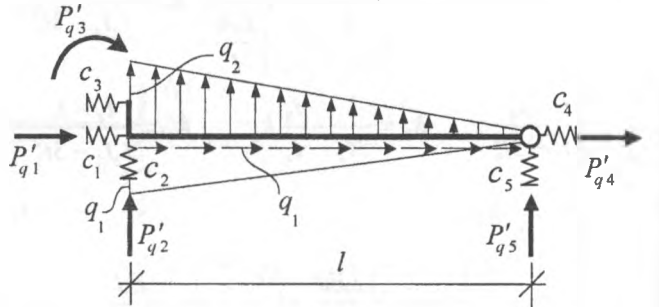


Рис. 6

$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{6}(3 - s_{q1}) \\ \frac{q_2 l}{10}(5 - f_2 s_{q2}) \\ -\frac{q_2 l^2}{30}(5 - 3f_2 s_{q2}) \\ \frac{q_1 l}{6} s_{q1} \\ \frac{q_2 l}{10} f_2 s_{q2} \\ 0 \end{Bmatrix} \quad (11)$$

где $s_{q1} = \frac{1 + 3 \frac{EA}{c_1 l}}{1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_4} \right) \frac{EA}{l}}$; $s_{q2} = 1 + \frac{15EJ}{c_2 l^3} + \frac{5EJ}{c_3 l}$;

f_2 - см. (7);

б) загрузка КЭ с упруго-податливым присоединением концов стержня к узлам узлам и шарниром справа треугольной возрастающей нагрузкой

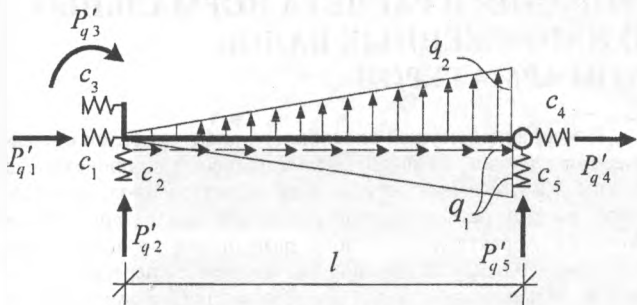


Рис. 7

$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{6} s_{q1}^* \\ \frac{q_2 l}{40} (20 - 11 f_2 s_{q3}) \\ -\frac{q_2 l^2}{120} (40 - 33 f_2 s_{q3}) \\ \hline \frac{q_1 l}{6} (3 - s_{q1}^*) \\ \frac{11 q_2 l}{40} f_2 s_{q3} \\ 0 \end{Bmatrix},$$

где $f_2 = \frac{1}{1 + \frac{3EJ}{l^3} \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_5} \right) + \frac{3EJ}{c_3 l}}$;

$$s_{q2} = 1 + \frac{60EJ}{11c_2 l^2} + \frac{40EJ}{11c_3 l}; \quad s_{q1}^* = \frac{1 + 3 \frac{EA}{c_4 l}}{1 + \left(\frac{1}{c_1} + \frac{1}{c_4} \right) \frac{EA}{l}};$$

7) загрузка конечного элемента с упруго-податливым присоединением концов стержня к узлам треугольной убывающей нагрузкой (рис. 8)

$$\{P'_q\} = \begin{Bmatrix} \frac{q_1 l}{6} (3 - s_{q1}) \\ \frac{q_2 l}{20} (10 - u_{q1}) \\ -\frac{q_2 l^2}{120} (20 + u_{q2} - 6u_{q1}) \\ \hline \frac{q_1 l}{6} s_{q1} \\ \frac{q_2 l}{20} u_{q1} \\ \frac{q_2 l^2}{120} u_{q2} \end{Bmatrix}, \quad (13)$$

здесь $u_{q1} = \frac{8s_{q2}u_3 - 5s_{q3}u_2}{4u_1u_3 - 3u_2^2}$; $u_{q2} = \frac{3u_2u_{q1} - 5s_{q3}}{u_3}$,

где: $f_2 = \frac{1}{1 + \frac{3EJ}{l^3} \left(\frac{1}{c_2} + \frac{1}{c_5} \right) + \frac{3EJ}{c_3 l}}$

$$u_1 = \frac{1}{f_2}; \quad u_2 = 1 + \frac{2EJ}{c_3 l};$$

$$u_3 = 1 + \left(\frac{1}{c_3} + \frac{1}{c_6} \right) \frac{EJ}{l}; \quad s_{q2} = 1 + \frac{15EJ}{c_2 l^3} + \frac{5EJ}{c_3 l};$$

$$s_{q3} = 1 + \frac{4EJ}{c_3 l}.$$

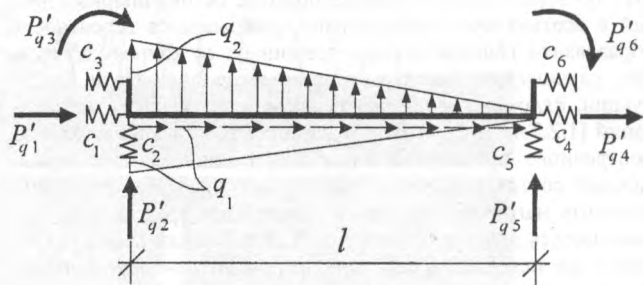


Рис. 8

Преобразование векторов внешних нагрузок из местной в общую систему координат производят по формуле [3]

$$\{P_q\} = [T_a]^T \cdot \{P'_q\}, \quad (14)$$

Полученные матрицы жёсткости конечных элементов, а также матрицы сосредоточенных узловых усилий от распределённых равномерно и по треугольным законам нагрузок позволяют выполнять расчёты равно-стержневых систем методом конечных элементов с учётом упруго-податливого присоединения конечных элементов к узлам и оценивать влияние упругого соединения стержней в узлах на величины и распределение внутренних усилий в сооружениях.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Еременко С. Ю. Методы конечных элементов в механике деформируемых тел. – Харьков: Основа, 1991. – 272 с.
2. Игнатюк В.И., Богомолов Д.В. Об учете упругой податливости соединения стержней в узлах в расчетах плоских стержневых систем методом конечных элементов / БГТУ. – Брест, 2002. – 13 с. – Деп. в БелИСА 24.05.2002 г., № Д200240.
3. Масленников А. М. Расчет строительных конструкций численными методами. – Л.: ЛГУ, 1987. – 224 с.
4. Расчет плоских стержневых систем методом конечных элементов с использованием ЭВМ: Методические указания по строительной механике для студентов строительных специальностей / Игнатюк В.И.; БрПИ. – Брест, 1990. – 42 с.