

ВЫВОДЫ

В результате обработки гравия керамзитового гидрофильной смесью состава: гипс – 65%, портландцемент – 15%, пуццолановая добавка (керамзит) – 20%, происходят изменения свойств материала сыпучего утеплителя:

- ✓ влажность материала снижается в 1,5...2,6 раза.
- ✓ уменьшается объем открытых пор в гранулах;
- ✓ в результате контактного омоноличивания мелких гранул керамзита изменяется зерновой состав материала – снижается остаток на поддоне;

Все эти изменения свойств материала позволяют решить основную задачу выполненных исследований: на 30...65% увеличить сопротивление теплоизоляции эксплуатируемых совмещенных кровель.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Черноиван В.Н., Самкевич В.А. К оценке физических свойств сыпучих утеплителей, используемых в эксплуатируемых совмещенных кровлях с прямым размещением слоев. Вестник БГТУ. Сборник материалов научно-технической конференции молодых ученых и специалистов., –Брест, 2002.

2. Могилат А.Н., Кривобок Э.Н. Проектирование теплозащиты покрытий гражданских зданий, –Киев: "Будівельник", 1982, 142 с.

3. Волженский А.В., Стамбулко В.И., Ферронская А.В. Гипсоцементнопуццолановые вяжущие, бетоны и изделия. – М., "Стройиздат", 1971, 364 с.

4. Волженский А.В., Коган Г.С., Краснослободская З.С. Влияние активного кремнезема на процессы взаимодействия алюминатных составляющих портландцементного клинкера с гипсом, "Строительные материалы", 1963, №1.

5. Камбефор А. Инъекция грунтов. Пер. с франц. –М.: Энергия, 1971, 262 с.

6. Пособие по химическому закреплению грунтов инъекцией в промышленном и гражданском строительстве (к СНиП 3.02.01-83), –М.: "Стройиздат", 1986, 128 с.

7. ГОСТ 9758-86 "Заполнители пористые неорганические для строительных работ. Методы испытаний". Издание официальное. Государственный строительный комитет СССР. –М.: 1987, 62 с.

8. ГОСТ 30256-94 Метод определения теплопроводности цилиндрическим зондом. Издание официальное. Межгосударственная научно-техническая комиссия по стандартизации и техническому нормированию в строительстве, – Минск, 1996, 12 с.

УДК 539.3

Босаков С.В., Генфуд Салах

К ЧИСЛЕННОЙ РЕАЛИЗАЦИИ РЕШЕНИЯ Г. ЛЭМБА ДЛЯ ПОЛУПРОСТРАНСТВА С ИНЕРЦИОННЫМИ СВОЙСТВАМИ

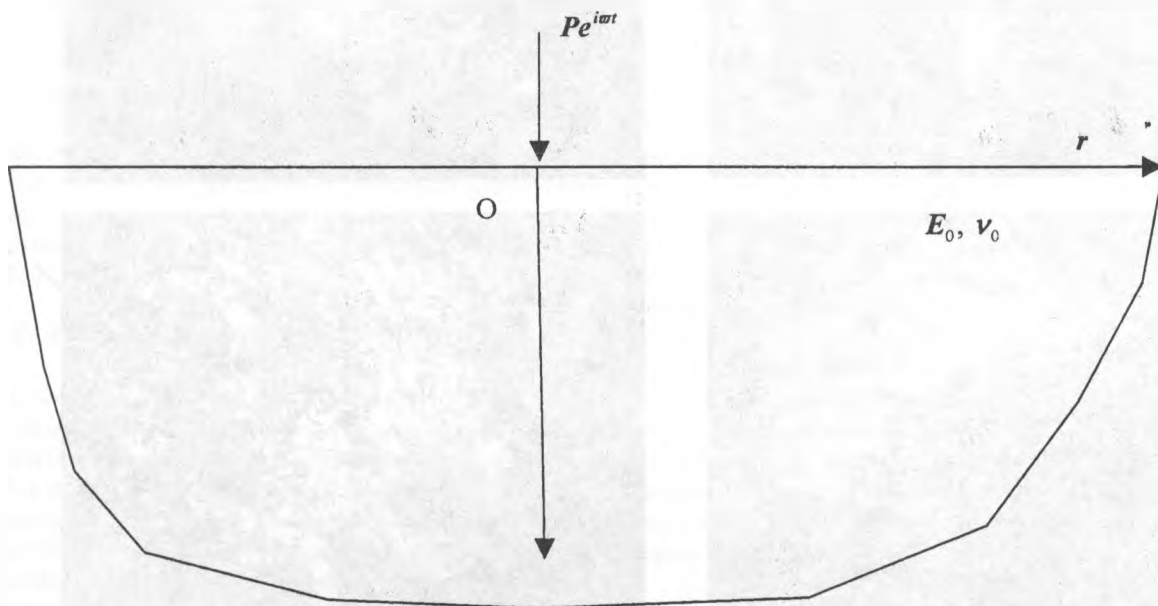


Рис. 1. Действие гармонической силы на полупространство.

При расчете фундаментных балок и плит на динамическую составляющую внешней нагрузки при неучете касательных напряжений в контактной зоне необходимо иметь решение задачи о действии вертикальной сосредоточенной гармонической силе $Pe^{i\omega t}$, приложенной к границе упругого однородного изотропного полупространства с инерционными

свойствами. Эту задачу впервые в начале прошлого века решил английский ученый Г. Лэмб [1]. Согласно решению Лэмба, в полупространстве от действия этой силы возникают разнообразные волны (продольные, поперечные, поверхностные, ...). Очевидно, при расчете фундаментов на динамическую нагрузку необходимо учитывать волновой характер перемещений, возникающих на контакте фундамента с упругим ос-

*Босаков С.В. Д.т.н., профессор каф. строительной механики Белорусского национального технического университета. Беларусь, БНТУ, 220027, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 65.
Генфуд Салах. Доцент университета Гаумы, Алжир.*

нованием. Однако даже при современном состоянии вычислительной техники численная реализация решения Лэмба сопряжена с большими математическими трудностями [2, 3, 4]. Ниже автор последовательно выводит формулы динамических перемещений поверхности полупространства от действия гармонической силы, полученные на основании решения Лэмба [1].

Следуя подходу О.Я. Шехтер [2], запишем формулу вертикальных перемещений поверхности упругого однородного изотропного полупространства от действия гармонической силы (рис. 1)

$$W(r) = -\frac{Pke^{i\omega t}}{2\pi G_0}(f_1 + if_2); \quad (1)$$

$$f_1 = \int_0^1 K_1(u, \Theta) J_0(kru) du +$$

$$+ \int_1^\infty K_2(u, \Theta) J_0(kru) du;$$

$$f_2 = \int_0^\Theta K_3(u, \Theta) J_0(kru) du +$$

$$+ \int_\Theta^1 K_4(u, \Theta) J_0(kru) du - \pi \frac{\chi}{k} K J_0(\chi r);$$

$$K_1(u, \Theta) = \frac{u\sqrt{u^2 - \Theta^2} (2u^2 - 1)^2}{(2u^2 - 1)^4 + 16u^4(u^2 - \Theta^2)(1 - u^2)};$$

$$K_2(u, \Theta) = \frac{u\sqrt{u^2 - \Theta^2}}{(2u^2 - 1)^2 - 4u^2\sqrt{u^2 - \Theta^2}\sqrt{u^2 - 1}};$$

$$K_3(u, \Theta) = \frac{u\sqrt{\Theta^2 - u^2}}{(2u^2 - 1)^2 + 4u^2\sqrt{\Theta^2 - u^2}\sqrt{1 - u^2}};$$

$$K_4(u, \Theta) = \frac{4u^3(u^2 - \Theta^2)\sqrt{1 - u^2}}{(2u^2 - 1)^4 + 16u^4(u^2 - \Theta^2)(1 - u^2)};$$

$$\Theta = \sqrt{\frac{1 - 2\nu_0}{2(1 - \nu_0)}}; \quad k = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho}{G_0}}; \quad h = \sqrt{\frac{\omega^2 \rho}{\lambda + 2G_0}};$$

$$\lambda = \nu_0 \frac{2G_0}{1 - 2\nu_0}; \quad G_0 = \frac{E_0}{2(1 + \nu_0)};$$

$$K = \frac{2k^2\sqrt{\chi^2 - h^2} (2\chi^2 - k^2)^2}{-F'(\chi)f(\chi)};$$

$$F(\xi) = (2\xi^2 - k^2)^2 - 4\xi^2\sqrt{\xi^2 - k^2}\sqrt{\xi^2 - h^2};$$

$$f(\xi) = (2\xi^2 - k^2)^2 + 4\xi^2\sqrt{\xi^2 - 1}\sqrt{\xi^2 - k^2};$$

где χ – действительный положительный корень уравнения $F(\chi) = 0$. Для всех $0 \leq \nu_0 \leq 0,5$ он является единственным;

ρ – плотность материала полупространства;

E_0, ν_0 – модуль упругости и коэффициент Пуассона материала полупространства;

$J_0(\alpha u)$ – функция Бесселя первого рода [5].

Аппроксимируем на интервале интегрирования функций $K_1(u, \Theta)$, $K_3(u, \Theta)$ и $K_4(u, \Theta)$ степенными полиномами, коэффициенты при которых найдем по методу наименьших квадратов [6]. То есть,

$$K_1(u, \Theta) = \sum_{n=0}^7 a_n u^n;$$

$$K_3(u, \Theta) = \sum_{n=0}^6 c_n u^{2n+1}; \quad (2)$$

$$K_4(u, \Theta) = \sum_{n=0}^{13} d_n u^n.$$

Функция $K_2(u, \Theta)$ имеет на отрезке интегрирования особенность в точке $u = \chi$. Поэтому эту функцию аппроксимируем с выделением особенности

$$K_2(u, \Theta) = \frac{b_1}{\chi - u} + \sum_{n=2}^7 \frac{b_n}{u^{2n-1}} \quad (3)$$

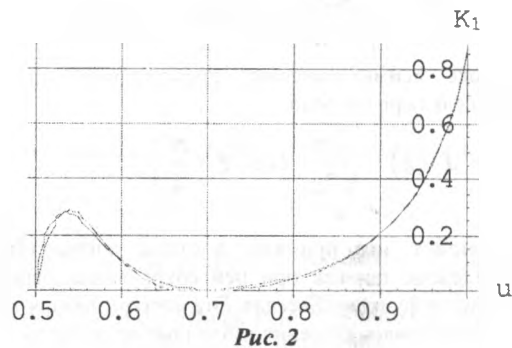


Рис. 2

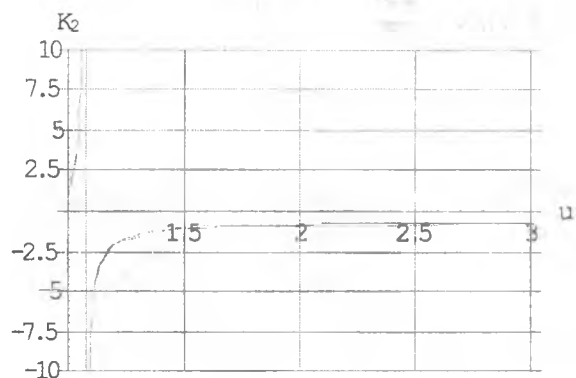


Рис. 3

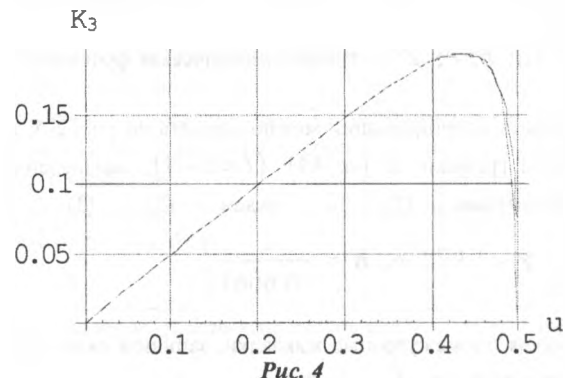


Рис. 4

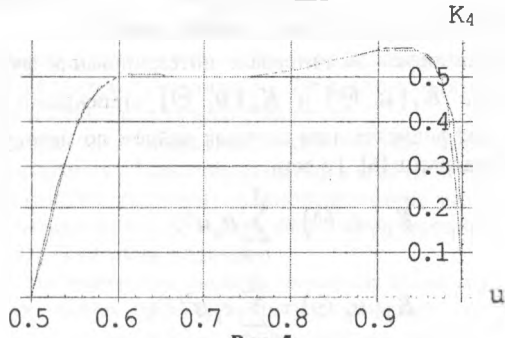


Рис. 5.

Графики функций $K_i(u, \Theta)$ при

$$v_0 = \frac{1}{3} \left(\chi = 1.07236; K = \frac{1}{20.6061} \right)$$

----- - точные выражения
 ————— - аппроксимированные выражения

При вычислении $\int_1^{\infty} \frac{J_0(kru)}{u^{2n+1}} du$ в выражении для f_1

использовалось асимптотическое представление [5] для функции Бесселя первого рода

$$J_0(z) \sim \sqrt{\frac{\pi}{2z}} \cos\left(z - \frac{\pi}{4}\right) \quad (4)$$

Автор считает, что принятая в статье аппроксимация удобна и надежна, так как при ней сохраняются осциллирующие свойства функции Бесселя. Эта аппроксимация также позволяет использовать значения табличных интегралов

$$\int_0^a u^n J_0(kru) du = \frac{a^{1+n}}{1+n} {}_1F_2\left(\frac{1+n}{2}; 1, \frac{3+n}{2}; -\frac{a^2 k^2 r^2}{4}\right);$$

$$\int_1^{\infty} \frac{J_0(kru)}{\chi - u} du = \left(\int_0^{\infty} - \int_0^1 \right) \frac{J_0(kru)}{\chi - u} du = \frac{\pi}{2} [Y_0(kr\chi) + H_0(kr\chi)] - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{}_1F_2\left(\frac{1+n}{2}; 1, \frac{3+n}{2}; -\frac{k^2 r^2}{4}\right)}{(1+n)\chi^{1+n}}, \quad (5)$$

где $Y_0(\alpha u)$, $H_0(\alpha u)$ – функции Бесселя второго рода и Струве [5];

${}_pF_q(a; b; c; Z)$ – гипергеометрическая функция [5].

Точность аппроксимации можно оценить по рис. 2-5, где приведены графики $K_i(u, \Theta)$ ($i=1-4$), вычисленные по формулам (1) и рядам (2), (3) для

$$v_0 = \frac{1}{3} \left(\chi = 1.07236; K = \frac{1}{20.6061} \right).$$

Опуская промежуточные выкладки, запишем окончательные выражения для f_1 и f_2 из (1)

$$f_1 = \sum_{n=0}^7 a_n \left[\frac{\Gamma\left(\frac{n+1}{2}\right)}{2} {}_1\Phi_2\left(\frac{1+n}{2}; 1, \frac{3+n}{2}; -\frac{h^2 p^2}{4}\right) \times \left(\frac{h}{k}\right)^{n+1} + \frac{\Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right)}{2} {}_1\Phi_2\left(\frac{1+n}{2}; 1, \frac{3+n}{2}; -\frac{k^2 r^2}{4}\right) \right] +$$

$$+ b_1 \left[\frac{\pi}{2} ((Y_0(\chi kr) + H_0(\chi kr)) - \sum_{n=0}^{\infty} \frac{{}_1F_2\left(\frac{1+n}{2}; 1, \frac{3+n}{2}; -\frac{k^2 r^2}{4}\right)}{\chi^{n+1}(1+n)}) \right] +$$

$$+ \sum_{n=2}^7 \frac{b_n}{\sqrt{2}} \left[\frac{{}_2F_2\left(\frac{3}{4}-n, \frac{1}{2}, \frac{7}{4}-n; -\frac{k^2 r^2}{4}\right)}{-3+4n} + \right.$$

$$\left. + \frac{1}{(4n-5)r^2 k^2} \left[2r^3 k^3 {}_1F_2\left(\frac{5}{4}-n, \frac{3}{2}, \frac{9}{4}-n; -\frac{k^2 r^2}{4}\right) + \right. \right.$$

$$\left. + (4n-5)(rk)^{2+2n} \Gamma\left(\frac{3}{2}-2n\right) \times \left(\cos\left(\frac{3}{4}-n\right)\pi + \sin\left(\frac{3}{4}-n\right)\pi \right) \right]; \quad (6)$$

$$f_2 = \sum_{n=0}^6 c_n \frac{{}_1F_2\left(1+n; 1, 2+n; -\frac{h^2 r^2}{4}\right)}{2(1+n)} \left(\frac{h^2}{k^2}\right)^{1+n} +$$

$$+ \frac{1}{2} \sum_{n=0}^{13} d_n \left[-\left(\frac{h}{k}\right)^{n+1} \Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right) {}_1\Phi_2\left(\frac{1+n}{2}; 1, \frac{3+n}{2}; -\frac{1}{4} h^2 r^2\right) + \right.$$

$$\left. + \Gamma\left(\frac{1+n}{2}\right) {}_1\Phi_2\left(\frac{1+n}{2}; 1, \frac{3+n}{2}; -\frac{1}{4} k^2 r^2\right) \right] - \frac{\pi \chi}{k} KJ_0(\chi r),$$

где ${}_1\Phi_2(a; b; c; z)$ – регуляризованная гипергеометрическая функция;

${}_1F_2(a; b; c; z)$ – гипергеометрическая функция;

$\Gamma(z)$ – гамма-функция [5].

На рис. 6 приведен график вертикальных перемещений поверхности упругого полупространства при следующих данныхх

- ✓ гармоническая сила $P \cos 4\pi t$;
- ✓ плотность материала основания $\rho = 2000 \text{ кг/м}^3$;
- ✓ упругие постоянные материала полупространства $G_0 = 1.5 \cdot 10^7 \frac{\text{Н}}{\text{м}^2}$; $v_0 = \frac{1}{3}$;
- ✓ момент времени $t = 5 \text{ сек.}$

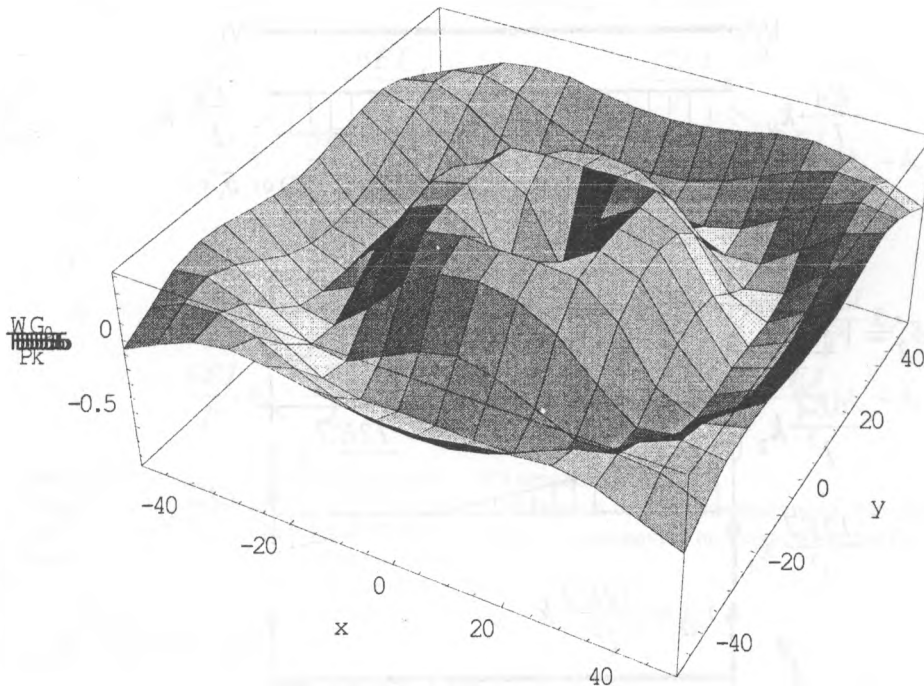


Рис. 6. График вертикальных перемещений поверхности полупространства от действия гармонической силы

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Lamb H. On the propagation of Tremors over the surface of fn Elastic solid. Phil. Trans, Poy. Soc., London, (A), 203, 1904. pp.1-42.
2. Шехтер О.Я. Об учете инерционных свойств грунта при расчете вертикальных вынужденных колебаний массивных фундаментов. Сб. тр. НИИ оснований № 42 «Вибрации сооружений». Стройвоенмориздат, 1948. С. 72-104.
3. Сеймов В. Динамические контактные задачи. К., Наукова думка, 1976. 283с.
4. Развитие теории контактных задач в СССР, -М., Наука, 1976. 493с.
5. Градштейн И.С., Рыжик И.М. Таблицы интегралов сумм, рядов и произведений. -М., ФМ, 1963. 1100с.
6. Демидович Б.П., Марон И.А., Шувалова Э.З. Численные методы анализа. -М., Наука, 1967. 368с.

УДК 519.3

Игнатюк В.И., Богомолов Д.В.

О ФОРМИРОВАНИИ РАЗРЕШАЮЩИХ УРАВНЕНИЙ МКЭ В РАСЧЕТАХ ПЛОСКИХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ С УЧЕТОМ УПРУГОЙ ПОДАТЛИВОСТИ УЗЛОВЫХ СОЕДИНЕНИЙ

Соединение элементов на расчётных схемах сооружений чаще всего принимается жёстким либо шарнирным. Однако в реальных сооружениях связи в узлах в большинстве случаев имеют упругую податливость, которая может существенно влиять на распределение и величины усилий в сооружениях. Исследование и оценка этого влияния представляет большой интерес при анализе работы сооружений.

При расчете сооружений методом конечных элементов основным разрешающим уравнением [1, 3] является уравнение вида:

$$[K]\{\Delta\} = \{P\}, \quad (1)$$

где: $[K]$ – матрица жесткости системы; $\{\Delta\}$ – вектор пере-

мещений узлов системы; $\{P\}$ – вектор внешних узловых нагрузок.

Учет упруго-податливого соединения элементов в узлах вызовет соответствующие изменения в матрицах $[K]$ и $\{P\}$. Так как матрица жесткости системы $[K]$ включает матрицы жесткости конечных элементов (КЭ) [1, 3], учет упруго-податливого присоединения КЭ к узлам может быть выполнен на уровне определения матриц жесткости отдельных конечных элементов.

Матрица жесткости плоского стержневого КЭ в общем случае имеет вид [4]:

Игнатюк Валерий Иванович. К.т.н., доцент, зав. каф. строительной механики Брестского государственного технического университета.

Богомолов Дмитрий Владимирович. Студент строительного факультета Брестского государственного технического университета.

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.