итераций, и расчет жесткостей сечений при заданных усилиях, которые применяется в процессе внутренних итераций. В результате для расчета требуются значительные затраты машинных ресурсов, однако алгоритм всегда сходится и обеспечивает заданную точность расчета. Как показал анализ, для получения решения, при котором отличие между результатами двух соседних итераций составляет не более 1%, обычно достаточно трех-пяти макроитераций расчета. На последней макроитерации характер изменения расчетных жесткостей сечений является оптимальным, в результате итоговое расчетное распределение жесткости в элементах конструкции соответствует фактическому. Поскольку предложенный метод является шаговым и алгоритм подразумевает обязательный расчет с различным количеством шагов с поэтапным сравнением полученных данных, то результатам подобного нелинейного расчета вполне можно доверять [4].

Анализ испытаний балок [5], внецентренно сжатых колон [6], и статически неопределимых рам [7] подтвердил высокую надежность предложенных алгоритмов и возможность их использования для определения напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций, находящихся в сложном напряженном состоянии.

Предложенная методика реализована в программах **БЕТА** (авторы: Т.М. Пецольд, Д.Н. Лазовский, Д.О. Глухов) и **RADUGA** (авторы: О.Н. Лешкевич, В.Н. Лешкевич), которые предоставляют проектировщику комплексное решение по расчету стержневых железобетонных конструкций на основании требований проекта СНБ 5.03.01 "Конструкции бетонные и железобетонные. Нормы проектирования".

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ильюшин А.А. Пластичность// М.– Л.: Гостехиздат, 1948.– 372с.
2. Бондаренко В.М., Бондаренко С.В. Инженерные методы нелинейной теории железобетона.– М.: Стройиздат, 1982.– 287с.
3. Алявдин П.В., Симбиркин В.Н. Расчет стержневых железобетонных конструкций по деформированной схеме// Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: Доклады XVII Международной конференции, Санкт-Петербург. Россия, 22-25 июня 1999г. – СПб.: НИИХ СпбГУ, 1999.– с. 24-32.
4. Сидорович Е.М. Нелинейное деформирование, статическая и динамическая устойчивость пространственных систем. – Мн.: БГПА, 1999.- 200с.
5. Benmokrane B., Chaallal O., and Masmoudi R. Flexural Response of Concrete Beams Reinforced with FPR Reinforcing Bars. ACI Structural Journal, January-February 1996, pp. 46-55.
6. Lloyd N.A., and Rangan B.V. Studies on High-Strength Concrete Columns under Eccentric Compression. ACI Structural Journal, November-December 1996, pp. 631-638.
7. Воробцов И.А. Влияние трещин и неупругих деформаций бетона на работу железобетонных рам.: Дис… канд. техн. наук.– Ленинград, 1967.–180с.

УДК 624.94.012.4.044

Туснин А.Р.

МАТРИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ ДЛЯ ТОНКОСТЕННОГО ЭЛЕМЕНТА ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Для определения перемещений узлов конструкции необходимо сформировать матрицу жесткости всей конструкции в общей системе координат. Для построения матрицы жесткости всей конструкции необходимо преобразовать локальные матрицы жесткости отдельных стержней из местных систем координат в матрицы жесткости в общей системе координат.

Матрица жесткости в местной системе координат преобразуется в матрицу жесткости в общей системе координат следующим образом:

$$\boldsymbol{R}=\boldsymbol{T}^{T}\cdot\boldsymbol{r}\cdot\boldsymbol{T}, \qquad (1)$$

где $\boldsymbol{R}$- матрица жесткости стержня в общей системе координат, $\boldsymbol{r}$- матрица жесткости стержня в местной системе координат, $\boldsymbol{T}$- матрица преобразования координат, $\boldsymbol{T}^{T}$- транспонированная матрица преобразования координат. Матрица преобразования координат имеет размерность 14x14, и кроме направляющих косинусов осей местной системы координат относительно общей системы включает коэффициенты преобразования депланации.

Матрица преобразования координат имеет вид:

$$\boldsymbol{T}=\begin{vmatrix} \boldsymbol{C} & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \boldsymbol{C} & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \boldsymbol{d_н} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{C} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{C} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \boldsymbol{d_к} \end{vmatrix}, \qquad (2)$$

где $\boldsymbol{C}=\begin{vmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{vmatrix}$- матрица направляющих косинусов, (3)

$\boldsymbol{d_н}$ и $\boldsymbol{d_к}$- коэффициенты преобразования депланации для начала и конца стержня.

В выражении (3): l_1 направляющий косинус оси X_1 относительно оси X, m_1 направляющий косинус оси X_1 относительно оси Y, n_1 направляющий косинус оси X_1 относительно оси Z; l_2, m_2, n_2 - направляющие косинусы оси Y_1 относительно осей X, Y, Z соответственно; l_3, m_3, n_3 - направляющие косинусы оси Z_1 относительно осей X, Y, Z соответственно. Система координат $X\ Y\ Z$- общая, система координат $X_1Y_1Z_1$- местная. Для определения направляющих косинусов можно использовать известные соотношения [1].

При расчете геометрически нелинейных систем широко применяется метод последовательных нагружений. В этом случае после каждого шага приложения нагрузки меняется геометрия системы. От правильного назначения направляющих косинусов на каждом шаге приложения нагрузки зависит

Туснин Александр Романович. *К.т.н., доцент, докторант каф. "Металлические конструкции" Московского государственного строительного университета.*

точность определения перемещений узлов и усилий в стержнях.

Применение традиционной методики для вычисления направляющих косинусов при изменении геометрии системы в процессе последовательных нагружений может привести к неверному определению значений косинусов. Представим стержень расположенный параллельно оси Z, пусть ось Y_1 параллельна оси X, ось Z_1 параллельна оси Y. Предположим, что стержень после приложения шага нагрузки изменил свою ориентацию так, чтобы ось X_1 стала параллельной оси X. После такого перемещения ось Y_1 будет параллельна оси Z, а ось Z_1 останется параллельна оси Y. Если же использовать традиционную методику определения направляющих косинусов то, после перемещения стержня ось Y_1 будет параллельна оси X, а ось Z_1 станет параллельна оси Z, что совершенно не соответствует действительному изменению ориентации стержня.

Для использования при расчете геометрически нелинейных систем методика определения направляющих косинусов доработана. Рассмотрим стержень произвольно ориентированный относительно общей системы координат. Символами «*н*» и «*к*» обозначим соответственно начало и конец стержня. Для определения направляющих косинусов необходимо знать координаты концов стержня в общей системе координат, а также угол ρ между горизонталью и осью Y_1. Горизонталь-это линия перпендикулярная оси стержня и параллельная плоскости XOY. Положительное направление на горизонтали выбирается так, чтобы ось X_1, горизонталь и ось Z образовали правую тройку векторов. Положительный угол ρ измеряется от положительного направления горизонтали против часовой стрелки если смотреть с конца стержня. Для вертикальных стержней, параллельных оси Z и направленных вверх, горизонталь совпадает с положительным направлением оси X. Тогда направляющие косинусы определяются следующим образом:

1. Для начальной геометрии системы направляющие косинусы вычисляются традиционным образом, после чего определяются перемещения узлов от первого шага загружения.
2. После определения перемещений узлов на рассматриваемом шаге загружения вычисляются перемещения в местной системе координат:

$$s_1 = T\,s\,, \qquad (4)$$

где s_1 - матрица-столбец перемещений центров узлов по концам стержня в местной системе координат, s- то же в общей системе координат, T- матрица преобразования координат на предшествующем шаге загружения.

3. Вычисляются перемещения центров тяжести и изгиба в местной системе координат на рассматриваемом шаге загружения:

в начале стержня:

$$u_{н1}' = u_{н1} + \beta_{н1} z_н - \gamma_{н1} y_н + \delta_{н1}\omega_н\,;$$
$$v_{н1}' = v_{н1} - \alpha_{н1}\Delta z_н\,; \qquad (5)$$
$$w_{н1}' = w_{н1} + \alpha_{н1}\Delta y_н\,;$$

в конце стержня:

$$u_{к1}' = u_{к1} + \beta_{к1} z_к - \gamma_{к1} y_к + \delta_{к1}\omega_к\,;$$
$$v_{к1}' = v_{к1} - \alpha_{к1}\Delta z_к\,; \qquad (6)$$
$$w_{к1}' = w_{к1} + \alpha_{к1}\Delta y_к$$

4. Определяются направляющие косинусы в местной системе, при этом для каждого стержня местная система координат $X_1Y_1Z_1$ на предшествующем шаге загружения считается общей, а местная система координат $X_1'Y_1'Z_1'$ после приращения перемещений, той системой координат направляющие косинусы которой определяются. Введем следующие обозначения: l_1' направляющий косинус оси X_1' относительно оси X_1, m_1' направляющий косинус оси X_1' относительно оси Y_1, n_1' направляющий косинус оси X_1' относительно оси Z_1; l_2', m_2', n_2' - направляющие косинусы оси Y_1' относительно осей X_1, Y_1, Z_1 соответственно; l_3', m_3', n_3' - направляющие косинусы оси Z_1' относительно осей X_1, Y_1, Z_1 соответственно.
5. Выполняется переход от направляющих косинусов в местной системе координат к направляющим косинусам в общей системе координат:

$$\begin{vmatrix} l_1 \\ m_1 \\ n_1 \end{vmatrix} = C^T \times \begin{vmatrix} l_1' \\ m_1' \\ n_1' \end{vmatrix}; \quad \begin{vmatrix} l_2 \\ m_2 \\ n_2 \end{vmatrix} = C^T \times \begin{vmatrix} l_2' \\ m_2' \\ n_2' \end{vmatrix};$$
$$\begin{vmatrix} l_3 \\ m_3 \\ n_3 \end{vmatrix} = C^T \times \begin{vmatrix} l_3' \\ m_3' \\ n_3' \end{vmatrix}, \qquad (7)$$

6. Пункты 2-5 повторяются на всех шагах загружения.

Конструктивные особенности узловых сопряжений тонкостенных стержней открытого профиля оказывают существенное влияние на напряженно-деформированное состояние конструкций. Для учета конструктивных особенностей узловых сопряжений в матрице преобразования используются коэффициенты преобразования депланации $d_н$ и $d_к$. Величины коэффициентов преобразования депланаций определяются для каждого стержня в зависимости от типа узлового сопряжения [2].

После преобразования матрицы жесткости в местной системе координат в матрицу жесткости в общей системе координат формируется матрица жесткости всей конструкции путем поэлементного суммирования матриц жесткости отдельных стержней с учетом нумерации узлов в начале и конце конкретного стержня. При формировании матрицы жесткости всей конструкции учитываются граничные условия. Внешняя нагрузка, действующая на конструкцию, приводится к узловой и представляется в виде матрицы нагрузки P. Определение перемещений узлов сводится к решению системы уравнений:

$$R_o U + P = 0\,, \qquad (8)$$

где R_o - матрица жесткости конструкции в общей системе координат с учетом граничных условий; U- матрица перемещений узлов конструкции; P - матрица нагрузки с учетом граничных условий. По перемещениям узлов конструкции находятся перемещения начала и конца каждого отдельного стержня в системе координат связанной со стержнем, а по местным перемещениям усилия в стержнях.

Разработанная методика численного расчета использована в вычислительном комплексе статического расчета пространственных конструкций из тонкостенных стержней открытого профиля.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Р.А.Резников. Решение задач строительной механики на ЭЦВМ. М., 1971. 312 с.
2. А.Р.Туснин. Тонкостенный конечный элемент для расчета на ЭВМ стержневых конструкций//Современные строительные конструкции. Проблемы и перспективы: Материалы XIX научно-технической конференции. Брест, 1995.- с.23-28.

УДК 624.94.012.4.044

Туснин А.Р.

КОНЕЧНЫЙ ЭЛЕМЕНТ ТОНКОСТЕННОГО СТЕРЖНЯ ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ ПРИ НАЛИЧИИ В УЗЛАХ ЭКСЦЕНТРИСИТЕТОВ И НЕСИММЕТРИЧНОМ СЕЧЕНИИ

В общем случае в пространственной конструкции находят применение тонкостенные стержни открытого профиля, у которых центры тяжести и изгиба не совпадают. При этом в узлах чаще всего имеет место несовпадение центра узла с центрами изгиба или центрами тяжести примыкающих стержней. Следствием этого является значительное усложнение матрицы жесткости тонкостенного конечного элемента (ТКЭ). Это обусловлено, как наличием эксцентриситетов по концам стержня, так и с тем, что именно центр изгиба является той точкой сечения, перемещения которой определяют появление в стержне поперечных сил, изгибающих и крутящих моментов, бимоментов.

Рассмотрим профиль, имеющий несовпадение центров тяжести и изгиба с эксцентричным закреплением в начале и конце. Обозначим систему координат, связанную с центром узла- $X_1Y_1Z_1$, систему координат, связанную с центром изгиба- $X_1'Y_1'Z_1'$, систему координат, связанную с центром и тяжести- $X_1''Y_1''Z_1''$.Введем обозначения $y_н$ - эксцентриситет центра тяжести относительно центра узла по оси Y_1 в начале стержне, $y_к$ - то же в конце, $z_н$ - эксцентриситет центра относительно центра узла по оси Z_1 в начале стержне, $z_к$ - то же в конце, y - координата центра тяжести относительно центра изгиба по оси Y_1', z - координата центра тяжести относительно центра изгиба по оси Z_1', $\omega_н$ - секториальная координата центра тяжести относительно центра узла в начале стержне, $\omega_к$ - то же в конце.

Пусть конец стержня жестко закреплен, а начало имеет все возможные перемещения. Обозначим перемещения центра узла:

- u_1 - линейное перемещение вдоль оси X_1;
- v_1 - линейное перемещение вдоль оси Y_1;
- w_1 - линейное перемещение вдоль оси Z_1;
- α_1 - угол поворота относительно оси X_1;
- β_1 - угол поворота относительно оси Y_1;
- γ_1 - угол поворота относительно оси Z_1;
- δ - депланация в центре узла.

Возможные перемещения центра изгиба сечения:

- u_1' - линейное перемещение вдоль оси X_1';
- v_1' - линейное перемещение вдоль оси Y_1';
- w_1' - линейное перемещение вдоль оси Z_1';
- α_1' - угол поворота относительно оси X_1';
- β_1' - угол поворота относительно оси Y_1';
- γ_1' - угол поворота относительно оси Z_1';
- δ' - депланация в центре тяжести и изгиба сечения.

Возможные перемещения центра тяжести сечения:

- u_1'' - линейное перемещение вдоль оси X_1'';
- v_1'' - линейное перемещение вдоль оси Y_1'';
- w_1'' - линейное перемещение вдоль оси Z_1'';
- α_1'' - угол поворота относительно оси X_1'';
- β_1'' - угол поворота относительно оси Y_1'';
- γ_1'' - угол поворота относительно оси Z_1'';
- δ'' - депланация в центре тяжести и изгиба сечения.

В общем случае, при одновременном неравенстве нулю эксцентриситетов по осям Y_1 и Z_1, и несовпадении центров тяжести и изгиба одинаковыми для всех трех центров являются только угол поворота относительно продольной оси и депланация, т.е. выполняются следующие равенства:

$$\alpha_1 = \alpha_1' = \alpha_1''\ ;\ \delta_1 = \delta_1' = \delta_1'' . \qquad (1)$$

Продольное усилие в стержне появляется в результате линейного перемещения вдоль продольной оси центра тяжести стержня. Для определения линейного перемещения вдоль продольной оси можно использовать соотношение:

$$u_1'' = u_1 + \beta_1 z_н - \gamma_1 y_н + \delta_1 \omega_н . \qquad (2)$$

Для определения поперечных сил, изгибающих и крутящего моментов, также бимоментов необходимо знать перемещения v_1', w_1', α_1', β_1', γ_1', δ_1' центра изгиба.