

6. Jones R. The ultimate strength of reinforced concrete beams in shear // Magazine of concrete research., 1956 v.8 №23;
7. Krefeld W., Thurston C. Contribution of longitudinal steel to shear resistance of reinforced concrete beams // ACI structural journal., 1966 v.63;
8. Гимейн В.С. Экспериментальные исследования прочности железобетонных конструкций гидросооружений при изгибе с поперечной силой в зависимости от продольного армирования, пролёта среза и масштабного фактора // Известия ВНИИГ. – 1970 – 93с.;
9. Жемочкин Б.Н. Расчёт упругой заделки стержня – М.: СИ, 1948 – 65с.;
10. Помернацев А.М., Соловьёв Г.П. Предельный сдвиг кромок горизонтальных трещин, пересечённых хомутами // Исследование и расчёт современных мостовых конструкций: Труды МИИТ. – М.: Транспорт, 1974. – вып. 463 – с. 82-88;
11. Ермуханов К. Е. Сопротивление балок и плит различной ширины действию концентрированной нагрузки. Автореф. дис. ... канд. техн. наук. М.: 1980 – 21с.;
12. Романов В.П., Григорьев В.И. Расчёт прочности фибро-железобетонных балок по наклонным сечениям. Исследования и расчёт строительных конструкций энергетических сооружений. Межвузовский сборник ЛИСИ, Ленинград: 1987 – с. 126-131;
13. Залесов А.С., Старишко И.Н. Влияние преднапряжения на прочность элементов по наклонным сечениям // Бетон и железобетон. – 1987, №8 – с.24-25;
14. Гвоздев А.А., Залесов А.С., Титов И.А. Силы зацепления в наклонных трещинах // Бетон и железобетон. – 1975, №7 – с.44-45;
15. Ставров Г.Н., Кукша Л.Л. К определению усилия в продольной арматуре в наклонных сечениях // Бетон и железобетон. – 1978, №12 – с.25-26;
16. Старишко И.Н. Работа продольной арматуры в наклонной трещине // Бетон и железобетон. – 1991, №5 – с.15-17;
17. Leonhardt F., Walther R. Beitrage zur Behandlung der Schubprobleme im Stahlbetobau.// Beton und Stahlbaubeton, 1961 v.56 №12, 1962 v.57 №2, 3, 6-8;
18. Ермуханов К.Е. Прочность высоких балок по наклонному сечению при действии изгибающих моментов и поперечных сил // Бетон и железобетон. – 1983, №11 – с.23-24;
19. Зайцев В.В. О пониженном сопротивлении элементов из лёгких бетонов действию поперечных сил при изгибе // Бетон и железобетон. – 1975, №4 – с.29-31;
20. Karim S. Rebeiz Shear strength prediction for concrete members // Journal of structural engineering – 1999, №3 – с.301-308;
21. Тур В.В., Кондратчик А.А. Расчёт железобетонных конструкций при действии перерезывающих сил. Монография. – Брест: изд. БГТУ, 2000 – 400с.

УДК 624.012.45

Лешкевич О.Н.

НЕЛИНЕЙНЫЙ АНАЛИЗ ЖЕЛЕЗОБЕТОННЫХ ПРОСТРАНСТВЕННЫХ СТЕРЖНЕВЫХ СИСТЕМ

Одним из путей снижения расхода материала в стержневых железобетонных конструкциях является разработка и использование точных методов расчета, в которых, наряду со специфическими свойствами железобетона – трещинами, анизотропией, неупругими свойствами бетона и арматуры, учитывались бы также особенности работы статически неопределимых конструкций, связанные с возможностью значительного перераспределения усилий и с учетом деформированной расчетной схемы. Наряду с этим, согласно требованию проекта СНБ 5.03.01 "Конструкции бетонные и железобетонные. Нормы проектирования" в общем случае расчет стержневых систем должен рассматриваться с учетом физической нелинейности деформирования и особенностей пространственного деформирования конструкций.

Расчет нормального сечения железобетонного элемента представляет собой как физически, так и геометрически нелинейную задачу. В отличие от металлических элементов, у которых геометрические сечения постоянны и физические свойства материала характеризуются либо модулем упругости, либо диаграммой "напряжение-деформация", железобетонные сечения в зависимости от внутренних усилий имеют непостоянные геометрические и физические характеристики. Дополнительная сложность определения геометрических характеристик железобетонного сечения возникает из-за перераспределения усилий внутри самого сечения при изменении внешней нагрузки. Следовательно, жесткость железобетонного сечения при расчете конструкций по методу конеч-

ных элементов нельзя рассматривать как величину постоянную.

Общая схема расчета железобетонной конструкции как нелинейной системы обычно строится на аналогии с расчетом упруго-пластических тел. Идея метода состоит в том, что решение нелинейной задачи получается в виде последовательности решений линейных задач сходящихся к результату. Так как на каждом этапе рассматривается эквивалентная линейно-деформируемая система, представляется возможным использование классических методов строительной механики. Наиболее просто переменный характер жесткости можно учесть при применении метода конечных элементов (МКЭ). Необычайная популярность и широкое распространение МКЭ в практике проектирования последних десятилетий объясняются большой физической прозрачностью, применимостью для задач с произвольной формой области решения и простотой реализации его основных операций на базе современной компьютерной техники.

При использовании метода конечных элементов матрица жесткости $[K]$ формируется на основании физических жесткостей $[k]_j$ стержня из системы, вычисляемой для каждого конечного элемента (КЭ). Жесткости $[k]_j$ зависят от уровня напряженного состояния, они принимают различные значения для различных КЭ. Таким образом, задача расчета железобетонных конструкций сводится к решению

Лешкевич Олег Николаевич. Младший научный сотрудник каф. «Железобетонные и каменные конструкции» Полоцкого государственного университета.

Беларусь, ПГУ, 211440, г. Новополоцк, ул. Блохина, 29.

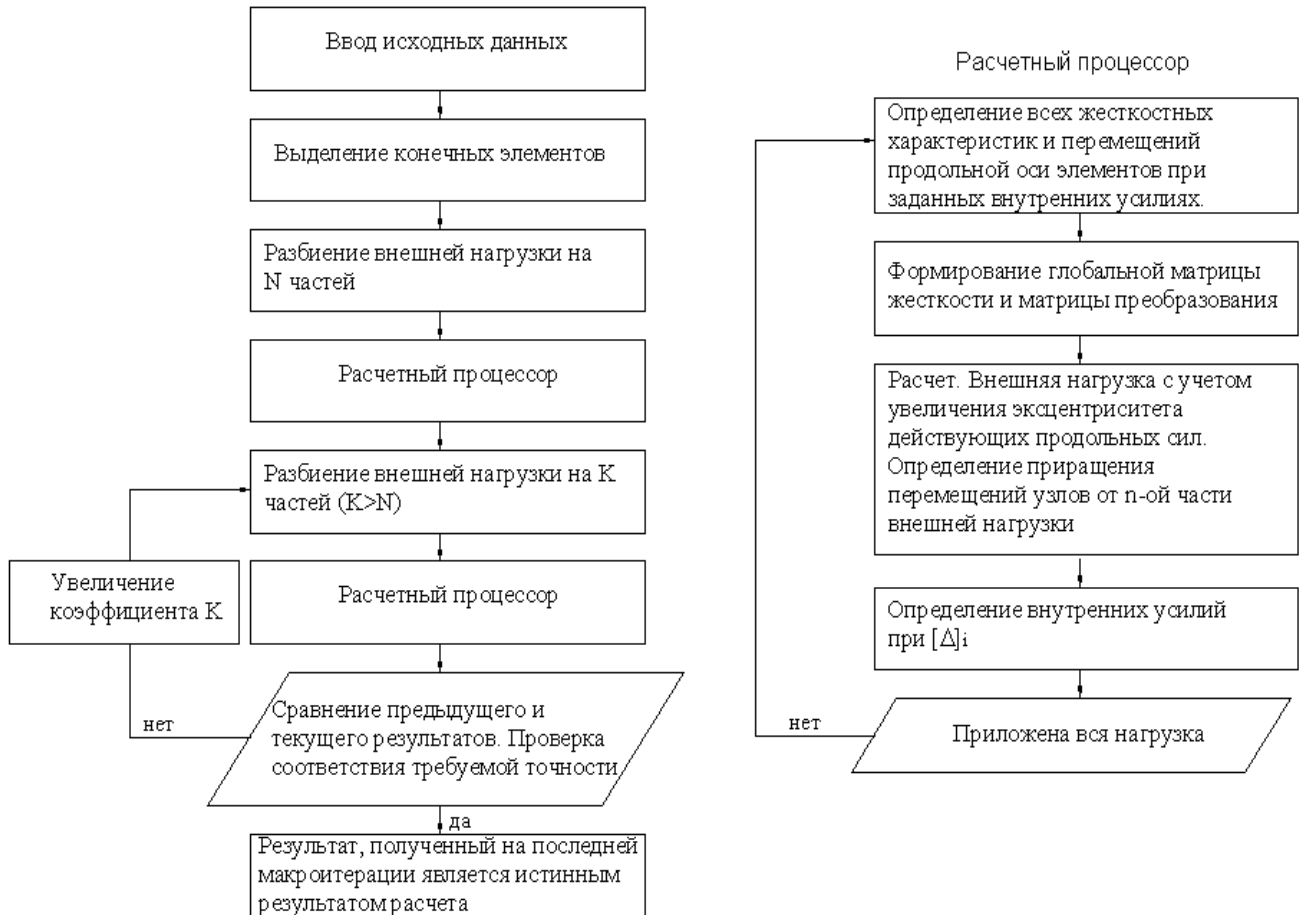


Рисунок 1 – Укрупненная блок-схема алгоритма нелинейного расчета железобетонных стержневых систем.

алгебраических уравнений с переменными (нелинейными) коэффициентами. Решение нелинейной системы определяется в виде некоторой сходящейся последовательности решения линейных задач. Такая идея впервые была применена А.А. Ильюшиным [1] для решения задачи теории пластичности и получила название метода упругих решений.

В.М. Бондаренко предложил рассматривать сочетание процессов внутренних и внешних итераций в решении задачи о напряженно-деформированном состоянии статически неопределимых нелинейно-деформируемых систем с помощью последовательных приближений. Однако, при расчете статически неопределимых систем в процессе внешних итераций может оказаться, что численные значения усилий в ряде последовательных уточнений не сближаются, а расходятся – происходит так называемая “раскачка” искомых величин. В сечениях, в которых при нулевом решении оказываются наибольшие усилия, в последующем первом приближении принимается наименьшая жесткость и, значит, наименьшие усилия, поэтому во втором приближении соотношение жесткостей резко меняется в пользу данного сечения, и расчетные усилия в нем вновь резко увеличиваются и т. д. [2]. В виду того, что расчет пространственных железобетонных конструкций требует значительных затрат вычислительных ресурсов данную методику необходимо модифицировать для получения гарантированной сходимости итерационного процесса. С тем чтобы не допустить значительной “раскачки” искомых величин на соседних итерациях и получить решение с минимальным объемом вычислений, необходима организация итерационного процесса с плавно изменяющейся расчетной жесткостью сечений, что требует разбиения процесса нагружения на отдельные этапы. Деление на

этапы может соответствовать реальным изменениям режима нагружения конструкции или быть условным. Отличительной особенностью этапа нагружения является то обстоятельство, что за исходную точку принимается состояние конструкции в конце предыдущего этапа (рис 1).

Для любого вектора внешней узловой нагрузки $\{F\}$ в расчет вводится приращение нагрузки $\{\Delta F\}$ необходимое для определения узловой нагрузки на k -ом этапе нагружения:

$$\{F\}_k = \{F\}_{k-1} + \{\Delta F\}, \quad (1)$$

где $\{F\}_k$ – вектор внешней нагрузки на текущем этапе нагружения, $\{F\}_{k-1}$ – вектор внешней узловой нагрузки в конце предыдущего этапа нагружения.

В результате нелинейного расчета определяется поле глобальных узловых перемещений при жесткостях элементов от нагрузки, действующей на k -ом этапе нагружения

$$\{\delta\}_k = [K]_k^{-1} \{F\}_k, \quad (2)$$

где $\{\delta\}_k$ – поле текущих узловых перемещений, $[K]_k$ – матрица жесткости системы на k -ом этапе нагружения.

В качестве способа организации нелинейного вычислительного процесса в пределах этапа принят метод переменных параметров упругости. Он заключается в использовании “секущих” коэффициентов упругости при построении глобальной матрицы жесткости на итерации. Таким образом, при расчете конструкции поэтапное приращение внешней нагрузки позволяет поэтапно изменять жесткости сечений, в результате итерационный процесс гарантировано сходится.

$$\begin{aligned}
 \bar{[k]} = & \begin{bmatrix} \frac{4B_w}{l} & \frac{2B_w}{l} & \frac{6B_w}{l^2} & -\frac{6B_w}{l^2} \\ \frac{2B_w}{l} & \frac{4B_w}{l} & \frac{6B_w}{l^2} & -\frac{6B_w}{l^2} \\ \frac{6B_w}{l^2} & \frac{6B_w}{l^2} & \frac{12B_w}{l^3} & \frac{12B_w}{l^3} \\ \frac{6B_w}{l^2} & -\frac{6B_w}{l^2} & \frac{12B_w}{l^3} & \frac{12B_w}{l^3} \\ \frac{4B_v}{l} & \frac{2B_v}{l} & -\frac{6B_v}{l^2} & \frac{6B_v}{l^2} \\ \frac{2B_v}{l} & \frac{4B_v}{l} & -\frac{6B_v}{l^2} & \frac{6B_v}{l^2} \\ \frac{6B_v}{l^2} & \frac{6B_v}{l^2} & \frac{12B_v}{l^3} & \frac{12B_v}{l^3} \\ \frac{6B_v}{l^2} & -\frac{6B_v}{l^2} & \frac{12B_v}{l^3} & \frac{12B_v}{l^3} \\ \frac{g_u}{l} & -\frac{g_u}{l} & & \\ -\frac{g_u}{l} & \frac{g_u}{l} & & \\ & & \frac{\omega_u}{l} & -\frac{\omega_u}{l} \\ & & -\frac{\omega_u}{l} & \frac{\omega_u}{l} \end{bmatrix} \quad (3)
 \end{aligned}$$

На первой итерации матрица жесткости $[K]_{(1)}$ определяется из уравнений равновесия при нулевом значении внутренних усилий. Далее определяется первое приближение поля приращений узловых перемещений $\{\delta\}_{(1)}$ от действия нагрузки $\{\bar{F}\}_l$. В дальнейшем на j -й итерации матрица $[K]_{(j)}$ строится на основе $\{\delta\}_{(j)}$ и из решения (2) определяется $\{\Delta\delta\}_{(j+1)}$. Процесс считается законченным, когда к системе приложена вся внешняя нагрузка.

Количество этапов нагружения, соответствующее требуемой точности, определяется следующим образом:

1. Первоначально осуществляется расчет с минимальным количеством шагов нагружения;
2. Далее осуществляется новый расчет, в котором количество этапов нагружения увеличивается умножением предыдущего значения на некоторый коэффициент, устанавливаемый пользователем;
3. Сравниваются два предыдущих результата на соответствие последнего заданной точности, если точность не обеспечивается, производится новая итерация с большим количеством этапов нагружения. Расчет с поэтапным увеличением количества шагов нагружения осуществляется до тех пор, пока не выполнится условие требуемой точности. Проверка сходимости и оценка результатов по ожидаемой точности производится по всем сечениям.

Матрица жесткости железобетонного стержня имеет вид (3),

где B_w, B_v, g_u, ω_u – соответственно жесткость на изгиб относительно локальной оси w , жесткость на изгиб относительно локальной оси v , жесткость на кручение и продольная жесткость сечения. В пространстве двухсторонне защем-

ленный стержень имеет 12 независимых компонент перемещений концов. Такой стержень с независимыми компонентами возможных перемещений концов стержня и с соответствующими компонентами сил на концах стержня по отношению к локальной системе координат $u-v-w$ представлен на рисунке 2.

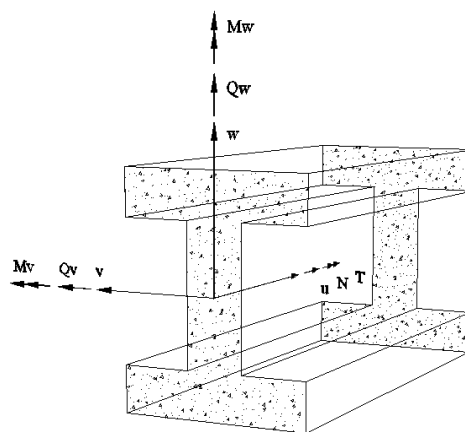


Рисунок 2 – Локальные оси и внутренние усилия конечного элемента.

Для определения деформационных характеристик нелинейно деформируемого элемента использование принципа суперпозиции, отражающего внутренние изменения в материале при конкретных уровнях и соотношениях M_w, M_v и N неприемлемо. Для пространственной задачи взаимное влияние всех внутренних усилий на соответствующую каждой из них жесткость приводит к перераспределению напряжений по сечению, что сказывается на характере перераспре-

деления усилий для конструкции в целом. По существующей в действующих нормах проектирования методике не представляется возможным определить жесткостные параметры железобетонного сечения общего вида и зависимость, связывающую жесткость элемента со всеми внутренними усилиями в сечении.

Решение этой задачи для поперечного сечения любой формы с произвольными классами арматуры и бетона возможно с использованием деформационной модели, которая является базовой расчетной моделью нормального сечения железобетонных элементов в проекте СНБ 5.03.01. Данная расчетная модель включает в себя: уравнения равновесия внешних и внутренних сил, условие деформирования расчетного нормального сечения в виде гипотезы плоских сечений и диаграмм деформирования бетона и арматуры.

Согласно деформационной модели сечение рассматривается как совокупность элементарных площадок, в пределах которых деформации считаются равномерно распределенными. В рассматриваемой задаче применяется гипотеза плоских сечений в постановке В.И. Мурашева - Я.М. Немировского для средних продольных деформаций растянутой и сжатой зоны.

Напряженно-деформированное состояние железобетонных элементов описывается уравнениями равновесия, содержащими условия распределения деформаций по сечению в соответствии с гипотезой плоских сечений и зависимостью между деформациями и напряжениями для элементарных площадок и арматуры. Система уравнений напряженно-деформированного состояния сечения должна быть записана в виде:

$$\begin{cases} M_y = -\iint_C \sigma(x, y)(y - y_o) dx dy + N(y_{oe} - y_o) \\ M_x = -\iint_C \sigma(x, y)(x - x_o) dx dy + N(x_{oe} - x_o) \\ N = \iint_C \sigma(x, y) dx dy \\ \varepsilon(x, y) = \varepsilon_z - \frac{1}{r_x}(x - x_o) - \frac{1}{r_y}(y - y_o) + q \end{cases} \quad (4)$$

где $\sigma(x, y)$ – нормальные напряжения в элементарной площадке бетона или арматуры; $\varepsilon(x, y)$ – продольные деформации элементарной площадки бетона или арматуры; x_o и y_o – расстояние от центра изгиба сечения до соответственно оси x и y ; x_{oe} и y_{oe} – расстояние от места приложения продольного усилия до соответственно оси x и y ; N – продольная сила от действия внешней нагрузки; $\frac{1}{r_x}$ и $\frac{1}{r_y}$ – кривизна продольной оси элемента относительно соответственно оси x и y ; q – остаточные деформации от различных предшествующих процессов деформирования (предварительное напряжение, эксплуатация и др.).

Оси $x - y$ поперечного сечения в программе по расчету железобетонных сечений соответствуют локальным осям $v - w$ в программе по расчету конструкций по МКЭ.

Известное значение кривизны продольной оси элемента при заданных усилиях позволит найти соответствующие изгибные жесткости из соотношения:

$$\frac{1}{r_x} = \frac{M_x}{B_x}, \quad \frac{1}{r_y} = \frac{M_y}{B_y} \quad (5)$$

где B_x и B_y – изгибная жесткость сечения относительно соответственно осей x и y .

Корреляционная функция изгибной жесткости совпадает с корреляционной функцией изгибающего момента.

Жесткость сечения при растяжении-сжатии определяется суммированием по элементарным площадкам сечения на основании действующих в них напряжений по диаграмме $\sigma - \varepsilon$ бетона и арматуры:

$$\varpi = \int_x \left[\int_y E(x, y) dy \right] dx = \int_x \left[\int_y \frac{\sigma(x, y)}{\varepsilon(x, y)} dy \right] dx \quad (6)$$

где $E(x, y)$ – секущий модуль деформации элементарной площадки, определяемый диаграммой деформирования бетона и арматуры.

Для учета геометрической нелинейности деформирования элементов конструкций наибольшее распространение получили две теории: теория больших перемещений и малых деформаций, и теория больших перемещений и больших деформаций. В первом случае рассматриваются геометрически нелинейные эффекты, вызванные приобретением и увеличением эксцентриситетов действующих в элементах продольных сил. Во втором случае учитывается также искривление и продольные деформации осей и срединных поверхностей элементов, вызывающих изменение расстояний между узлами [3]. Однако, влияние смещения узлов на напряженно-деформированное состояние железобетонных конструкций в пределах допустимых деформаций крайне мало, в пределах погрешности расчета, то для реализации геометрически нелинейного расчета используем только теорию больших перемещений и малых деформаций.

Приращение эксцентриситетов действующих в элементах продольных сил вызывает появление дополнительного изгибающего момента. Эксцентриситет продольной силы найдем, используя касательный модуль деформации каждой элементарной площадки системы:

$$E' = \frac{\sigma(\varepsilon(x, y) + \Delta\varepsilon) - \sigma(\varepsilon(x, y))}{\Delta\varepsilon}, \quad (7)$$

где E' – касательный модуль деформации элементарной площадки; $\sigma(x, y)$ и $\varepsilon(x, y)$ – из уравнений равновесия (4); $\Delta\varepsilon$ – некоторая условная весьма малая продольная деформация элементарной площадки.

Компоненты эксцентриситета продольной оси от действия продольной силы вычисляются на основании уже известных касательных модулей упругости каждой элементарной площадки:

$$\begin{cases} \Delta_x = \frac{\int_x \left[\int_y E'(x, y)(x - x_o) dy \right] dx}{\int_x \left[\int_y E'(x, y) dy \right] dx} \\ \Delta_y = \frac{\int_x \left[\int_y E'(x, y)(y - y_o) dy \right] dx}{\int_x \left[\int_y E'(x, y) dy \right] dx} \end{cases} \quad (8)$$

На основании известных эксцентриситетов вычисляются дополнительные изгибающие моменты в сечении от действия продольной силы.

Данный алгоритм расчета статически неопределимых систем с учетом нелинейности деформирования является двухуровневым: статический расчет системы с переменными жесткостями, которые используются в процессе внешних

итераций, и расчет жесткостей сечений при заданных усилиях, которые применяется в процессе внутренних итераций. В результате для расчета требуются значительные затраты машинных ресурсов, однако алгоритм всегда сходится и обеспечивает заданную точность расчета. Как показал анализ, для получения решения, при котором отличие между результатами двух соседних итераций составляет не более 1%, обычно достаточно трех-пяти макроитераций расчета. На последней макроитерации характер изменения расчетных жесткостей сечений является оптимальным, в результате итоговое расчетное распределение жесткости в элементах конструкции соответствует фактическому. Поскольку предложенный метод является шаговым и алгоритм подразумевает обязательный расчет с различным количеством шагов с поэтапным сравнением полученных данных, то результатам подобного нелинейного расчета вполне можно доверять [4].

Анализ испытаний балок [5], внецентренно сжатых колонн [6], и статически неопределимых рам [7] подтвердил высокую надежность предложенных алгоритмов и возможность их использования для определения напряженно-деформированного состояния железобетонных конструкций, находящихся в сложном напряженном состоянии.

Предложенная методика реализована в программах **БЕТА** (авторы: Т.М. Пецольд, Д.Н. Лазовский, Д.О. Глухов) и **RADUGA** (авторы: О.Н. Лешкевич, В.Н. Лешкевич), которые предоставляют проектировщику комплексное решение по расчету стержневых железобетонных конструкций на основании требований проекта СНБ 5.03.01 "Конструкции бетонные и железобетонные. Нормы проектирования".

УДК 624.94.012.4.044

Туснин А.Р.

МАТРИЦА ПРЕОБРАЗОВАНИЯ КООРДИНАТ ДЛЯ ТОНКОСТЕННОГО ЭЛЕМЕНТА ОТКРЫТОГО ПРОФИЛЯ

Для определения перемещений узлов конструкции необходимо сформировать матрицу жесткости всей конструкции в общей системе координат. Для построения матрицы жесткости всей конструкции необходимо преобразовать локальные матрицы жесткости отдельных стержней из местных систем координат в матрицы жесткости в общей системе координат.

Матрица жесткости в местной системе координат преобразуется в матрицу жесткости в общей системе координат следующим образом:

$$R = T^T \cdot r \cdot T, \quad (1)$$

где R - матрица жесткости стержня в общей системе координат, r - матрица жесткости стержня в местной системе координат, T - матрица преобразования координат, T^T - транспонированная матрица преобразования координат. Матрица преобразования координат имеет размерность 14x14, и кроме направляющих косинусов осей местной системы координат относительно общей системы включает коэффициенты преобразования деформации.

Матрица преобразования координат имеет вид:

$$T = \begin{pmatrix} C & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & C & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & d_n & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & C & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & C & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & d_k \end{pmatrix}, \quad (2)$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Ильющин А.А. Пластичность// М.- Л.: Гостехиздат, 1948.- 372с.
2. Бондаренко В.М., Бондаренко С.В. Инженерные методы нелинейной теории железобетона.- М.: Стройиздат, 1982.- 287с.
3. Алявдин П.В., Симбиркин В.Н. Расчет стержневых железобетонных конструкций по деформированной схеме// Математическое моделирование в механике сплошных сред на основе методов граничных и конечных элементов: Доклады XVII Международной конференции, Санкт-Петербург. Россия, 22-25 июня 1999г. - СПб.: НИИХ СПбГУ, 1999.- с. 24-32.
4. Сидорович Е.М. Нелинейное деформирование, статическая и динамическая устойчивость пространственных систем. - Мн.: БГПА, 1999.- 200с.
5. Benmokrane B., Chaallal O., and Masmoudi R. Flexural Response of Concrete Beams Reinforced with FPR Reinforcing Bars. ACI Structural Journal, January-February 1996, pp. 46-55.
6. Lloyd N.A., and Rangan B.V. Studies on High-Strength Concrete Columns under Eccentric Compression. ACI Structural Journal, November-December 1996, pp. 631-638.
7. Воробцов И.А. Влияние трещин и неупругих деформаций бетона на работу железобетонных рам.: Дис... канд. техн. наук.- Ленинград, 1967.-180с.

где $C = \begin{pmatrix} l_1 & m_1 & n_1 \\ l_2 & m_2 & n_2 \\ l_3 & m_3 & n_3 \end{pmatrix}$ - матрица направляющих косинусов, (3)

d_n и d_k - коэффициенты преобразования деформации для начала и конца стержня.

В выражении (3): l_1 направляющий косинус оси X_1 относительно оси X , m_1 направляющий косинус оси X_1 относительно оси Y , n_1 направляющий косинус оси X_1 относительно оси Z ; l_2, m_2, n_2 - направляющие косинусы оси Y_1 относительно осей X, Y, Z соответственно; l_3, m_3, n_3 - направляющие косинусы оси Z_1 относительно осей X, Y, Z соответственно. Система координат $X Y Z$ - общая, система координат $X_1 Y_1 Z_1$ - местная. Для определения направляющих косинусов можно использовать известные соотношения [1].

При расчете геометрически нелинейных систем широко применяется метод последовательных нагружений. В этом случае после каждого шага приложения нагрузки меняется геометрия системы. От правильного назначения направляющих косинусов на каждом шаге приложения нагрузки зависит