

тетности над последующим. Число λ указывает, во сколько раз i -й критерий ряда приоритетности более предпочтителен, чем $i+1$ -й. Количественно это выражается тем, что при сравнении двух вариантов по этим критериям приращение i -го критерия дополнительно умножается на λ .

Вектор значимости (весомости) \vec{q} состоит из компонент, являющихся весами критериев. В отличие от вектора приоритетности, где показывается сравнительная характеристика, компоненты вектора \vec{q} показывают общую значимость критерия в общей совокупности.

При решении конкретных задач строительного производства можно столкнуться со следующими трудностями:

- Выбор критериев. При сравнении конструктивных вариантов это не представляет трудностей, так как здесь нет разногласий в применении традиционных критериев приведенных затрат. При сравнении и оптимизации технологических решений в качестве критериев могут выступать приведенные затраты, продолжительность, трудоемкость работ. При сравнении организационных решений могут возникать трудности, так как обычно расходы на реализацию различных организационных решений при одной технологии одинаковы. Критерий продолжительности выполнения работ можно поставить под сомнение, так как часто неоправданное или чрезмерное сокращение сроков может привести к дополнительным трудностям по реализации данного решения. Такие критерии, как ритмичность, непрерывность, равномерность, совмещение являются более важными, так как обеспечивают стабильную и устойчивую работу строительной организации в разрезе объекта или комплекса объектов. Однако такие кри-

терии поддаются количественной оценке только косвенно, причем разными авторами предлагаются различные оценки.

- Оценка приоритетности критериев. Какой бы строго обоснованный метод оценки приоритетности мы не выбрали, все равно невозможно избавиться от субъективности оценок. Разными специалистами могут даваться разные оценки приоритетности при одних и тех же условиях строительного производства, что дает различные решения.

- Трудность формализации. Сведение задач строительного производства к различным математическим методам может быть затруднено. Всякая строительная организация представляет собой сложную динамическую систему и поэтому приходится учитывать большое количество внутренних и внешних факторов, оказывающих на нее влияние. Решить такую задачу строго аналитическими методами не всегда возможно даже с использованием средств вычислительной техники.

- Влияние случайных факторов. Многие факторы при построении математической модели могут быть заданы только с некоторой степенью достоверности, в некоторых случаях может иметь место полная неопределенность информационной базы, что доставляет дополнительные трудности.

Таким образом, разработка организационно-технологических решений, их оценка и сравнение, представляет собой весьма трудоемкий процесс, требующий применения средств вычислительной техники. Это требует привлечения дополнительных средств на проектирование. В большинстве случаев эти затраты себя оправдывают, так как пересчет нескольких дополнительных вариантов организационно-технологических решений, занимающий несколько часов машинного времени или несколько дней работы ИТР, может привести к существенной экономии средств на стадии выполнения проекта

УДК 624.04: 539.4

Алявдин П.В.

ЗАДАЧИ СИНТЕЗА КОНСТРУКЦИЙ С ПОВЫШЕННОЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТЬЮ

1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы были проведены исследования автора [1] - [6] по созданию нового класса конструкций, обладающих повышенной жесткостью и несущей способностью. Эти качества могут быть выявлены только в результате учета геометрически нелинейных эффектов, вызванных изменением формы конструкции под нагрузкой. В данной работе рассмотрены особенности реализации нового класса систем применительно к обычным или предварительно напряженным конструкциям, подвергающимся однократным и повторно-переменным квазистатическим воздействиям. Сформулирована оптимизационная задача синтеза конструкций, обладающих повышенной несущей способностью.

Предложены критерии, гарантирующие повышенную несущую способность конструкций вследствие пластических деформаций и геометрически нелинейных эффектов в предельных состояниях. Рассматривается общий случай повторно-переменных квазистатических воздействий; однократные воздействия представляют собой их частный случай. Учтена возможность хрупкого разрушения основных или дополнительных элементов конструкции.

Выявлен механический смысл предложенных критериев.

Показано, что устойчивость пластического деформирования системы «в малом» определяется соответствующими геометрическими матрицами конструкции в рассматриваемом, в том числе в предельном состоянии. В зависимости от их положительной определенности система или будет разрушаться, или будет способна воспринять еще дополнительную нагрузку. Рассмотрена также устойчивость пластического деформирования системы «в большом»; ее необходимо анализировать численными методами.

Отметим, что классическая теория предельного равновесия, позволяющая достаточно просто определить несущую способность идеально упругопластических строительных и других конструкций на основе геометрически линейного анализа, не может оценить предельное поведение конструкции. Такая оценка важна для прогнозирования поведения конструкции в экстремальных обстоятельствах, для анализа ее живучести, а также в случаях, когда определяющим фактором оказывается не прочность, а жесткость системы. Аналогичные проблемы возникают и при анализе приспособляемости конструкций, на которые действуют повторно-переменные нагрузки.

Алявдин Петр Владимирович. Профессор, доктор технических наук. Кафедра строительной механики Политехника Зеленогурской, Зеленая Гора, Польша. E-mail: palawdin@brick.wbis.pz.zgora.pl.

2. ОСНОВНЫЕ ЗАВИСИМОСТИ ДЛЯ КОНСТРУКЦИИ

Конструкции представлены здесь как дискретные механические системы с конечным числом степеней свободы. Они воспринимают квазистатические нагрузки и кинематические воздействия (включая температурные, осадки опор, заданные начальные смещения или дисторсии) и усилия преднапряжения. Материалы и элементы испытывают упругие и пластические деформации с упрочнением и разупрочнением, после чего возможно их хрупкое разрушение. Диаграммы деформирования здесь приняты в форме кусочно-непрерывных и негладких функций.

Приняты следующие основные обозначения ([1] - [6]):

$u, F \in R^n$ – векторы, объединяющие подвекторы обобщенных перемещений и внешних сил в свободных узлах конечных элементов; n – число степеней свободы системы;

$q, e, p, d, S \in R^m$ — аналогично векторы полных, упругих и пластических обобщенных деформаций, а также заданных дисторсий и внутренних сил (усилий); m — размерность векторов усилий и деформаций, зависящая от количества связей в процессе адаптации; $m \in (n + 1):m_{\max}; m_{\max}$ — общее число связей;

$\lambda, \varphi, \phi, \xi, K \in R^y$ - векторы пластических множителей деформаций, функций текучести, пластических потенциалов, функций упрочнения и констант текучести для всего множества [1:y] режимов течения; y – количество возможных режимов течения;

d_j, F_j, T_j - векторы отдельных j -х переменных воздействий, нагрузок на конструкцию и весовых коэффициентов нагрузок, $j \in J; J$ – множество этих нагрузок;

d_0, F_0 - векторы постоянных воздействий и нагрузок;

Ω_F, Ω_d - множества (классы) нагрузок F и кинематических или температурных воздействий (дисторсий) d .

Рассмотрим повторно-переменное нагружение конструкций, когда нагрузки F и дисторсии d произвольным образом изменяются в заданных областях,

$$F \in \Omega_F (F_0, F_j, j \in J) \quad (1)$$

$$d \in \Omega_d (d_0, d_j, j \in J) \quad (2)$$

Множества Ω_F и Ω_d определяют характер циклов воздействий на конструкцию. Эти множества можно представить в виде многогранников в n - и m -мерном пространстве нагрузок и воздействий соответственно [2-4]. Вершины этих многогранников линейно зависят от векторов отдельных нагрузок F_j и воздействий $d_j, j \in J$ и представляют собой расчетные сочетания нагрузок и воздействий.

Параметры состояния системы в виде внутренних сил S , перемещений u и деформаций q разделим на упругие и пластические (остаточные) составляющие, а также на параметры предварительного напряжения. Эти составляющие обозначим соответственно индексами e, r и p . Отметим, что остаточные усилия S_r и остаточные деформации p возникают в элементах, выполненных только из пластических материалов, $\forall x \in V_{pls}$; в хрупких материалах

$S_r = 0, p = 0 \quad \forall x \in V_{br}$, где V_{pls} и V_{br} – объемы тела, в которых размещены соответственно пластические и хрупкие материалы; $V_{pls} \cup V_{br} \subseteq V$; V – общий объем тела (конструкции). В результате получим:

$$S = S_e + S_r + S_p \quad \forall x \in V_{pls}, \quad (3.a)$$

$$S = S_e + S_p \quad \forall x \in V_{br}, \quad (3.6)$$

$$u = u_e + u_r + u_p, \quad (4)$$

$$q = e + p + d \quad \forall x \in V_{pls}, \quad (5.a)$$

$$q = e + d \quad \forall x \in V_{br}. \quad (5.6)$$

Соотношения состояния системы включают статические, геометрические и физические уравнения. При учете геометрических эффектов второго порядка статические уравнения имеют вид:

$$A(m)S + G(S_0)(u_e + u_r) = F, \quad (6)$$

где $A(m)$ — $n \times n$ -матрица уравнений равновесия, ее структура и размерность m изменяется вследствие разрушения элементов;

$G(S_0)$ – геометрическая матрица порядка n , ее элементы линейно зависят от внутренних сил

$$S_0 = S_r + S_p \quad (7)$$

в состоянии приспособляемости.

Остаточные усилия S_r и перемещения u_r приспособившейся системы не зависят от времени; они суммируются с усилиями S_p и перемещениями u_p состояния преднапряжения и удовлетворяют однородным уравнениям равновесия

$$A(m)S_0 + G(S_0)(u_e + u_r) = 0, \quad (8)$$

а также условиям текучести в форме неравенств (их количество y равно числу возможных режимов течения),

$$\varphi(\cdot) \leq 0, \quad (9)$$

эти неравенства определены ниже.

Геометрические уравнения конструкции в данной постановке линейны,

$$A^T u = q. \quad (10)$$

Физические уравнения в случае больших деформаций имеют вид

$$e = \zeta(S). \quad (11)$$

Если обобщенные упругие деформации связаны с усилиями законом Гука, то уравнения (11) становятся линейными,

$$e = DS, \quad (12)$$

где $D = \partial \zeta / \partial S$ – диагональная матрица упругости (матрица податливости) порядка m .

Здесь принята произвольная диаграмма деформирования и пластического течения материалов и элементов, имеющая $|L|$ участков упрочнения, разупрочнения или идеальной пластичности; L —множество l -х участков, $l \in L$ ([7] - [9]). На рис. 1.a показана диаграмма неупругого (пластического) деформирования разрушающегося элемента при $|L|=5$. В случае $L = \emptyset$ мы имеем разрушающийся хрупкий элемент (рис. 1.b).

Функции текучести существенно зависят от характеристик циклов и скорости нагружения [2]. Считая эти параметры фиксированными, примем линеаризованные соотношения для функции текучести на l -м участке,

$$\varphi_l = N_l^T S - H_l \lambda_l - K_l, l \in L, \quad (13)$$

где $N_l = \partial \varphi_l / \partial S$ — диагональная блочная $m \times y$ - матрица Якоби условий текучести φ ;

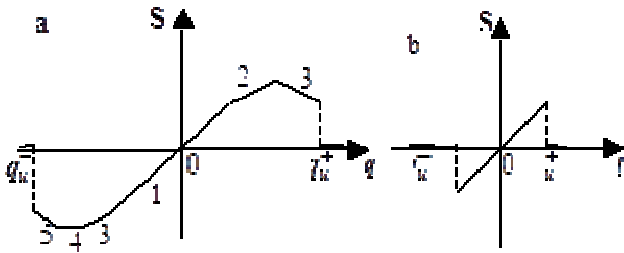


Рисунок 1. Диаграммы деформирования элементов: а - неупругий элемент, $|L|=5$; б - хрупкий элемент, $|L|=n$

H_l — то же, матрица упрочнения порядка y ; $\lambda_l, K_l \in R^y$ — векторы пластических множителей и констант пластичности, $l \in L$. Элементы матрицы H описывают различные случаи упрочнения или разупрочнения материалов конструкций [2, 3]; для идеально упругопластического материала $H = 0$. Индекс «Т» в (13) означает транспонирование.

В случае неассоциированного закона течения обобщенные пластические деформации выражаются следующим образом:

$$p = \sum_{l \in L} V_l \lambda_l, \quad (14)$$

$$\lambda_l \geq 0, \quad (15)$$

где пластические множители λ_l ограничены неравенствами,

$$0 \leq \lambda_l \leq \lambda_l^*, \quad l \in L; \quad (16)$$

λ_l^* - их предельное значение на l -м участке; $V_l = \partial \varphi_l / \partial S$ — диагональная блочная $m \times y$ -матрица Якоби пластических потенциалов ψ .

При этом удовлетворяются условия «дополняющей жесткости»

$$\varphi_l^T \lambda_l = 0, \quad (17)$$

Соотношения состояния (6)–(17) упругопластической конструкции эквивалентны условиям минимума некоторой функции (в [1,2] эта функция получена в общем случае для больших перемещений):

$$\Psi(u, \lambda) \rightarrow \min, \quad (18)$$

называемой мощностью диссипации энергии системы за единицу времени, при ограничениях

$$\lambda_l \geq 0, \quad l \in L. \quad (19)$$

3. КРИТЕРИИ ПОВЫШЕННОЙ НЕСУЩЕЙ СПОСОБНОСТИ КОНСТРУКЦИИ

Необходимые и достаточные условия оптимальности допустимого решения (u_*, λ_*) задачи (18), (19) имеют вид:

$$\begin{bmatrix} u_*^T & \lambda_*^T \end{bmatrix} H_\Psi(u_*, \lambda_*) \begin{bmatrix} u_* \\ \lambda_* \end{bmatrix} > 0, \quad (20)$$

или в развернутой форме

$$u_*^T \Psi_{,uu}(\cdot) u_* + 2 u_*^T \Psi_{,u\lambda}(\cdot) \lambda_* + \lambda_*^T \Psi_{,\lambda\lambda} \lambda_* > 0 \quad (21)$$

где u_* , λ_* - приращения переменных состояний u , λ в точке (u_*, λ_*) ; H_Ψ - матрица Гессе порядка $(n + y)$, содержащая значения вторых частных производных функции Ψ по u и λ ,

$$H_\Psi \equiv \begin{bmatrix} \Psi_{,uu} & \Psi_{,u\lambda} \\ \Psi_{,\lambda u} & \Psi_{,\lambda\lambda} \end{bmatrix}. \quad (22)$$

В случае ассоциированного закона течения ($\varphi = \psi$) и при $|L| = 1$ эти производные имеют вид

$$\Psi_{,uu}(\cdot) = G(u_*, \lambda_*) - A(u_*) C A(u_*)^T, \quad (23)$$

$$\Psi_{,u\lambda}(\cdot) = \Psi_{,\lambda u} = A(u_*) C N, \quad (24)$$

$$\Psi_{,\lambda\lambda} = H + N^T C V, \quad (25)$$

где $G(u, S)$ — геометрическая матрица порядка n , аналогичная матрице $G(S_0)$; $C = D^{-1}$ — диагональная матрица упругости (жесткости) порядка m .

Условия (20) отражают требования выпуклости функции Ψ или положительной определенности матрицы Гессе H_Ψ (22). С механической точки зрения условия (20) представляют собой критерий общей устойчивости состояния пластического течения конструкции при повторно-переменном или однократном нагружении [2, 7-9].

При учете геометрически нелинейных эффектов только второго порядка из условия (11) получается другая форма неравенства, найденная ранее в [7]. Это условие общей устойчивости состояния неупругого деформирования применено в [4] для системы, часть элементов которой испытывают пластическое течение на l -х участках диаграммы S - q , тогда как другие элементы уже разрушены. Оно имеет следующий вид:

$$\lambda_l^T M_l \lambda_l - d_p^T Z d_p > 0, \quad (26)$$

где M_l — матрица порядка y [7],

$$M_l = H_l - N_l^T Z V_l, \quad (27)$$

$$Z = C A^T T^{-1} A C - C; T = A C A^T + G, \quad (28)$$

d_p — дисторсии в разрушенных элементах,

$$d_p = d + \sum_{l \in L_a} V_l \lambda_l; \quad (29)$$

L_a — множество участков пластического деформирования разрушенных элементов; для хрупких элементов $L_a = \emptyset$. Первое слагаемое в неравенстве (29) относится к пластически деформирующимся элементам; второе относится к разрушенным элементам.

Возможны и другие формы критериев, которые анализируют устойчивость неупругого деформирования системы „в малом” в случае, когда система в предельном состоянии превратилась в механизм. Они также получаются из условия (22). Например, для жестко-пластической конструкции указанный критерий примет вид:

$$u_*^T G(S_0) u_* + \lambda_*^T H \lambda_* > 0. \quad (30)$$

При этом для такой системы, имеющей меньшее число степеней свободы, можно понизить размерность задачи, исключив из геометрических уравнений подвектор линейно зависимых перемещений [2].

Для анализа устойчивости „в большом” следует использовать численные процедуры, в которых непосредственно проверяется условие минимума мощности диссипации энергии Ψ в (18).

При выполнении критерия (20) конструкция, даже после превращения в пластический механизм, за счет изменения своей формы может воспринимать дополнительную нагрузку, превышающую нагрузку в состоянии предельного равновесия. Кроме того, еще в упругой стадии работы действительные усилия и перемещения таких конструкций будут меньше, чем получаемые из расчета по недеформированной схеме.

Для проверки симметричной матрицы H_{Ψ} (22) на положительную определенность существуют известные аналитические подходы и алгоритмические процедуры. Например, на основании критерия Сильвестра все ведущие главные определители (миноры) матрицы H_{Ψ} должны быть неотрицательными,

$$\det(H_{\Psi})_k \geq 0, \quad k \in l : (n + y). \quad (31)$$

Это означает, что все возможные механизмы разрушения такой конструкции будут находиться в состоянии устойчивого пластического деформирования.

Таким образом, приведенные выше критерии вида (22) определяют множество (класс) конструкций, обладающих повышенной прочностью, жесткостью и безотказностью (живучестью).

4. ЗАДАЧИ СИНТЕЗА ЭФФЕКТИВНЫХ КОНСТРУКЦИЙ

Для геометрически нелинейных конструкций задачи оптимального проектирования или синтеза отличаются от общепринятых в предельном анализе. В этом случае наряду с условиями текучести или прочности, как обычно, необходимо учесть также условия жесткости (второй группы предельных состояний) или условия работоспособности элементов:

$$u^- \leq u \leq u^+, \quad (32)$$

$$p^- \leq V\lambda \leq p^+, \quad (33)$$

$$q_u^- \leq q \leq q_u^+, \quad (34)$$

где $u^-, \dots, p^-, \dots, q_u^-, q_u^+$ — нижний и верхний пределы обобщенных перемещений, пластических и полных деформаций.

Кроме того, для рассматриваемых эффективных конструкций добавляется условие устойчивости пластического деформирования (20).

Математические модели задач оптимального проектирования или синтеза конструкций содержат вектор управляющих переменных (параметров проектирования) t и векторы переменных состояния (u, λ, S, F, d) при заданных отдельных нагрузках F_j и воздействиях $d_j, j \in J$.

В качестве управляющих переменных при синтезе конструкций следует выбирать преимущественно параметры геометрии (формы и размеров) и топологии (структуры или характера соединения элементов) системы.

В качестве целевой функции принимается один из критериев качества, например, стоимость конструкции, которую требуется минимизировать.

Тогда задача оптимального проектирования или синтеза конструкций при повторно-переменной нагрузке (и при учете геометрически нелинейных эффектов второго порядка) имеет вид: найти вектор параметров проектирования t из условия

$$C(t) \rightarrow \min \quad (35)$$

при ограничениях (1-17), (26-29), (32-34) и при конструктивных ограничениях параметров проектирования t : прямых

$$t \leq t \leq t^+ \quad (36)$$

и (или) функциональных

$$\Phi(t) \leq 0. \quad (37)$$

Эта задача относится к проблемам нелинейного математического программирования. Поскольку параметры топологии (а иногда и геометрии) в задачах унификации размеров изменяются дискретно, то задачи синтеза являются частично целочисленными проблемами оптимизации.

Однократная монотонно возрастающая нагрузка служит частным случаем повторно-переменной при $J=1$; ограни-

чение (26) здесь уже не требуется. В этом случае возникает аналогичная задача синтеза конструкций (3-17), (32-37).

Решение сформулированных задач синтеза, имеющих большую размерность, целесообразно производить декомпозиционным методом разделения и закрепления переменных состояния и проектирования сначала для заданной, а затем измененной топологии. Кроме того, в рамках декомпозиции можно из всего множества $\Omega_F \cup \Omega_d$ нагрузок F и воздействий d выбрать их невыгоднейшие расчетные сочетания [10], что существенно упрощает проблему.

Для синтеза топологии рассматриваемых конструкций автором предложены удобные эвристические способы [2], обобщающие идеи [11] образования простых плоских кинематических цепей и механизмов на двух- и трехмерные конструкции произвольного вида. При этом механизмы разрушения последних содержат пластические шарниры, поверхности или зоны (конечные элементы) в состоянии текучести. Главная особенность предлагаемых способов заключается в ограничении множества преобразований топологии конструкции путем введения условия (20) условия устойчивости неупругого деформирования для анализируемых механизмов разрушения. Ограничиваются также виды механизмов разрушения.

Наиболее простой способ обобщает прием Тобелеса [11]. В нем какая-либо связь или шарнир исходной конструкции (механизма) развивается путем образования нового звена с малыми размерами таким образом, чтобы, во-первых, число степеней свободы увеличивалось более чем на единицу; во-вторых, чтобы при действии всего класса заданных нагрузок в связях нового звена возникали преимущественного растягивающие усилия (условие (20)); в-третьих, чтобы новое звено не разрушилось при образовании любых механизмов разрушения.

В задачах синтеза конструкций при однократном нагружении вместо проверки условия (20) можно выполнить непосредственный расчет системы при увеличении нагрузки вплоть до образования механизма разрушения. В задачах синтеза при повторно-переменном нагружении также возможен анализ различных историй нагружения конструкции, с обязательным рассмотрением невыгоднейших расчетных сочетаний воздействий. Однако данный подход не только весьма трудоемок и сложен даже при компьютерных расчетах; главная проблема здесь заключается в отсутствии гарантии полученного результата для всего класса нагрузок

5. ПРИМЕРЫ

1. Исследовано влияние геометрии железобетонных арочных систем (I - III, рис.2) со шпренгелем, включающим стойки и стальной нижней пояс, на их несущую способность и характер деформирования при однократном нагружении. Нижние концы наклонных стоек E7 и E8 системы I смещены к центру (рис. 2.a); системы III смещены от центра (рис. 2.c); стойки E7 и E8 системы II - вертикальные (рис. 2.b). Поперечные сечения железобетонных элементов E1-E3 арок показаны на рис. 2.d; арматура - стержни 4 $\varnothing 16$, класса прочности Ат400, As1 = As2 = 8,04 см²; бетон класса В25. Поперечные сечения стальных элементов нижнего E4-E6 пояса показаны на рис. 2.e; площадь сечения A = 137,5 см²; модуль упругости E = 200 ГПа; предел текучести $\sigma_y = 240$ МПа. Параметры поперечных сечений стоек E7, E8 приняты аналогично элементам E1-E3 верхнего пояса.

Задача анализа систем I, II решалась непосредственно прямым методом нагружения по шагам, для системы III на участке "разупрочнения" (рис.3) использовался обратный метод. Как следует из рис.3, система I обладает повышенной, а система III- пониженной несущей способностью по

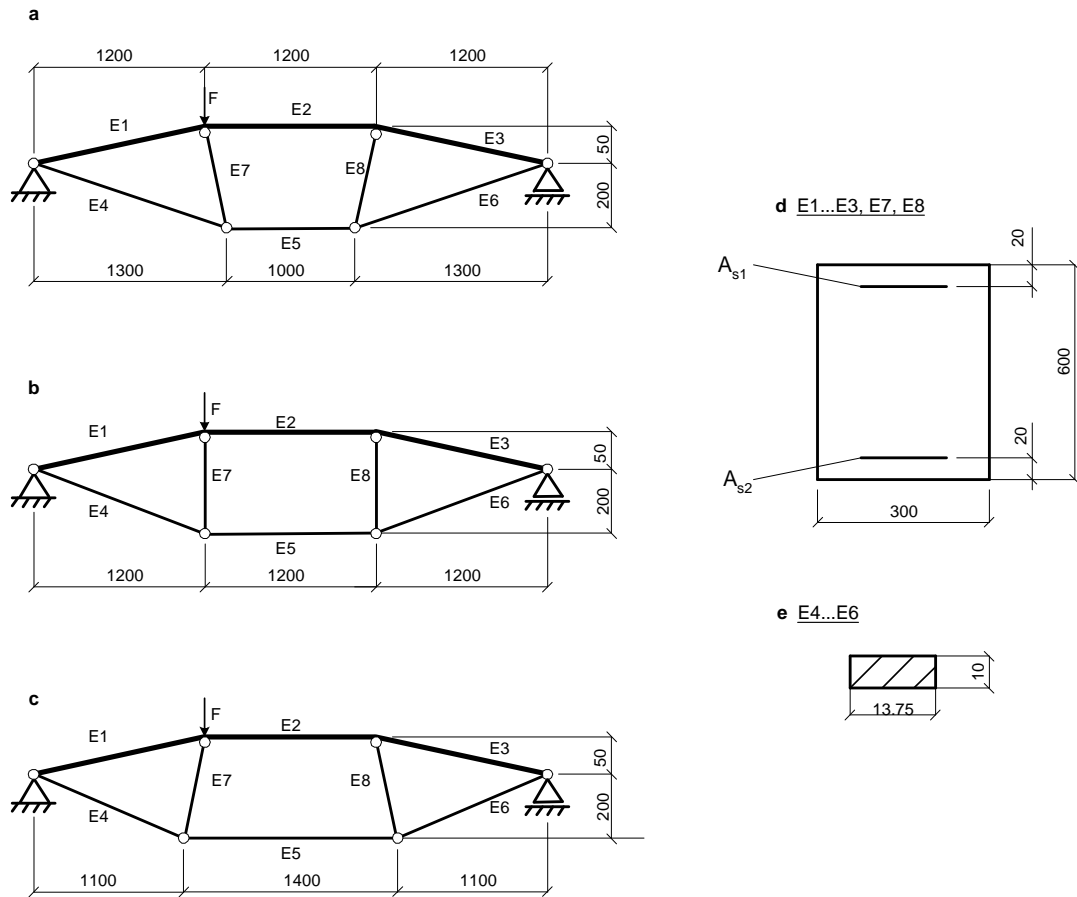


Рис. 2. Схема конструкции и нагрузки: а-с - системы I-III с наклонными и вертикальными стойками; d, e - сечения элементов верхнего, нижнего поясов и стоек (d)

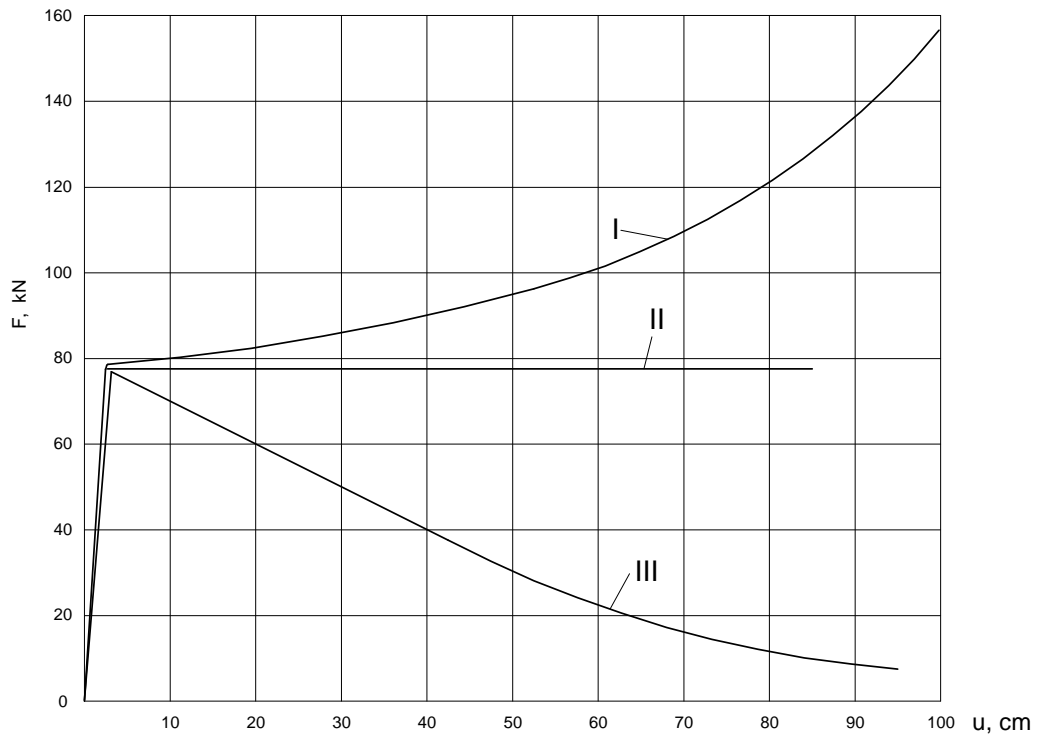


Рис. 3. Зависимость вертикального перемещения от нагрузки для систем I-III

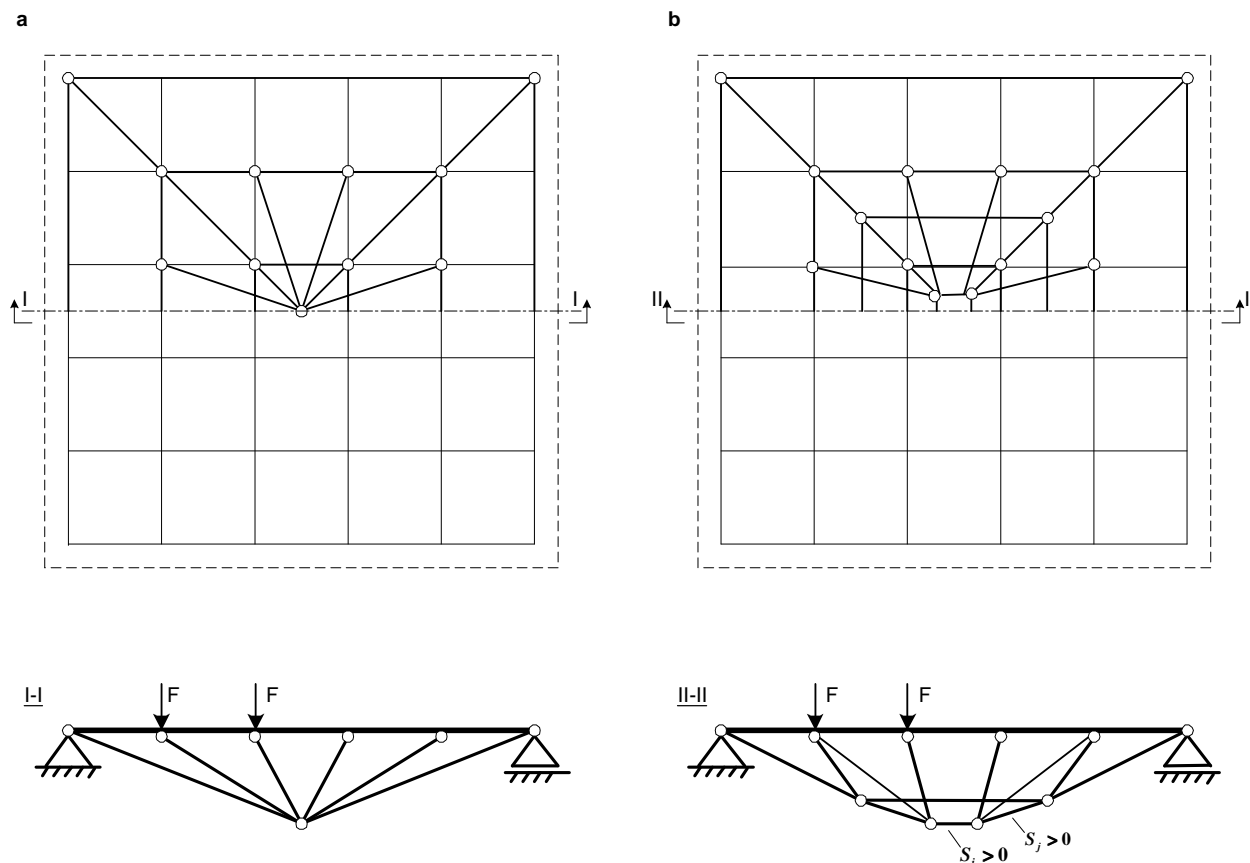


Рисунок 4. Преобразование ребристой плиты, подкрепленной шпренгелем; а, б – вид плит снизу и в сечениях I-I, II-II

сравнению с традиционно применяемой системой II. При повторно- переменной или подвижной нагрузке этот эффект сохраняется, если параметры нагрузки не изменяют знак (случай отнулевого или знакопостоянного циклов).

2. На рис.4 показано преобразование ребристой плиты (перекрестной балочной конструкции), подкрепленной шпренгелем (пример изменения топологии системы). Конструкция типа б) получается путем повторного развития центрального шарнира шпренгеля схемы а) в две четырехзвенные цепи. Схема а) конструкции при введении шарниров во все узлы становится геометрически изменяемой. Шарнирная схема конструкции типа б) обладает дополнительными степенями свободы, но даже эта изменяемая система может воспринять показанную на рис. 4 нагрузку. Совместная работа такой системы с ребристой плитой обеспечивает повышенную несущую способность конструкции для всевозможных вертикальных нагрузок одного знака, аналогично системе I на рис.2.

6. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Предложенные критерии и подходы позволяют создавать новые строительные конструкции, обладающие повышенной несущей способностью. На основе этих подходов можно также выполнять рациональное усиление существующих конструкций.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Алявдин П.В. Новый класс эффективных несущих конструкций: Анализ и синтез// Архитектура и строительство Беларуси, № 5-6, 1994. С. 6-10.
2. Алявдин П.В. Несущая способность и оптимальное проектирование упругопластических конструкций/ Белорусский политехнический институт, Минск, 1990. - Деп. во ВНИИТПИ 14.10.90, № 10856. - С 436.

3. Alyavdin P., Optimization problem for a new class of effective carrying structures. — Proc. of the Second World Congress of Structural and Multidisciplinary Optimization, WCSMO-2. May 26-30, 1997, Zakopane, Poland. Wydawnictwo Ekoinzynieria. – Vol. 2, pp. 905 –910.
4. Alyavdin P. Shakedown analysis of effective bearing structures with unsafe members under dynamic loading// Proc. 5th Internat. Conf. „Modern Building Materials, Structures and Techniques”, May 21-24, 1997, Vol. II, Vilnius, „Technica”, 1997, pp. 167-172. (In Russian).
5. Алявдин П.В. Приспособляемость эффективных железобетонных конструкций к динамическим воздействиям// Материалы межд. конференции// Инженерные проблемы современного бетона и железобетона. - Т.1, Ч. 1. - Минск, 1997. - С. 11-21.
6. Алявдин П.В. Предельный анализ эффективных конструкций при длительно действующих нагрузках// Материалы конгресса// II Белорусский конгресс по теоретической и прикладной механике, Минск, Стринко Лтд, - 1999. С. 38 – 48.
7. Maier G., A shakedown matrix theory allowing for workhardening and second-order geometric effects. — International Symposium on Foundations of Plasticity, Warsaw, 1972, Noordhoff International Publ., 1972/ Перев.: Майер Дж.// Механика. - № 18. - 1979. С. 75 - 93.
8. Алявдин П.В. Критерии повышенной несущей способности конструкций// Эффективные строительные материалы, конструкции и технологии// Междунар. научно-практич. конф.: Сб. трудов. Минск, Технопринт, 2000. – С. 270-279.
9. Bažant Z.P., Cedolin L.. Stability of Structures. Elastic, Inelastic, Fracture, and Damage Theories. Oxford University Press, New York, Oxford Engineering Science Series, Vol. 26, 1991. – 984 p.

10. Alyavdin P., Werner F. Auswahl maßgebender Lastkombinationen für große Tragwerke// Bauingenieur, Band -72, Heft 7/8, Juli/Aug. 1997. - S. 355 – 361.

11. Рабинович И.М. Кинематический метод в строительной механике в связи с графической кинематикой плоских цепей. – М., Изд-во Московск. высш. техн. учил-ща, 1928, 407 с.

УДК 539.3

БОСАКОВ С.В., ГЕНФУД С.

ПОСТРОЕНИЕ ФУНКЦИИ ГРИНА ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ИЗГИБАЕМОЙ ПЛАСТИНКИ С ЗАЩЕМЛЕННОЙ ТОЧКОЙ ПОД ДЕЙСТВИЕМ СОСРЕДОТОЧЕННОЙ СИЛЫ

Рассмотрим бесконечную изгибаемую пластинку с защемлением в начале координат под действием сосредоточенной силы P (рис. 1).

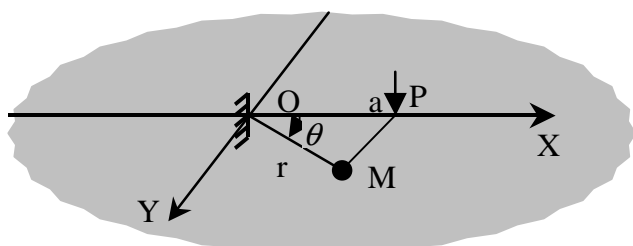


Рисунок 1. Бесконечная пластинка под действием сосредоточенной силы

Искомое решение для прогибов пластинки должно удовлетворять:

- уравнениям равновесия;
- статическим условиям на бесконечности для изгибающего момента и приведенной поперечной силы ($M_r = V_r = 0$ при $r \rightarrow \infty$);
- геометрическим условиям в начале координат

$$\left(W \Big|_{r \rightarrow \infty} = \frac{\partial W}{\partial r} \Big|_{r \rightarrow \infty} = 0 \right).$$

При построении решения будем использовать решение Клебша [1], которое применительно к рассматриваемой задаче с одной осью симметрии и действием сосредоточенной силы принимает вид [1]

$$W(r, \theta) = W_0(r) + \sum_{k=1}^{\infty} W_k(r) \cos k\theta;$$

$$W_0(r) = A_1 + A_2 r^2 + A_3 \ln r^2 + A_4 r^2 \ln r^2, \quad k=0;$$

$$W_1(r) = B_{11} r + B_{21} r^3 + B_{31} r^{-1} + B_{41} r \ln r, \quad k=1;$$

$$W_k(r) = B_{1k} r^k + B_{2k} r^{k+2} + B_{3k} r^{-k} + B_{4k} r^{-k+2}, \quad k > 1; \tag{1}$$

Из условий в начале координат при $r=0$ нам необходимо в (1) учесть только следующие частные решения

$$W_0(r) = A_2 r^2 + A_4 r^2 \ln r^2, \quad k=0;$$

$$W_1(r) = B_{21} r^3, \quad k=1;$$

$$W_k(r) = B_{1k} r^k + B_{2k} r^{k+2}, \quad k > 1;$$

Из статических условий на бесконечности для радиально-го изгибающего момента [2]

$$M_r = -D \left(\frac{\partial^2 W}{\partial r^2} + \frac{\nu}{r} \frac{\partial W}{\partial r} + \frac{\nu}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)$$

и приведенной поперечной силы [2]

$$V_r = -D \left(\frac{\partial^3 W}{\partial r^3} + \frac{2}{r^2} \frac{\partial^3 W}{\partial r \partial \theta^2} + \frac{1}{r} \frac{\partial^2 W}{\partial r^2} - \frac{3}{r^2} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} - \frac{1}{r^2} \frac{\partial W}{\partial r} - \frac{\nu}{r^3} \frac{\partial^2 W}{\partial \theta^2} \right)$$

нам также нужно в написанных выше формулах (2) ограничиться слагаемыми с r в степени не выше двух, чтобы выполнить статические граничные условия на бесконечности. Итак, имеем:

$$W_0(r) = A_2 r^2 + A_4 r^2 \ln r^2;$$

$$W_2(r) = B_{12} r^2 \cos 2\theta. \tag{3}$$

К этим функциям $W_0(r)$ и $W_2(r)$ необходимо добавить особое решение [3], соответствующее действию сосредоточенной силы, приложенной в точке $M(a, \theta)$ рассматриваемой пластинки. Поэтому, предварительно, принимаем:

$$W(r, \theta) = A_2 r^2 + A_4 r^2 \ln r^2 + B_{12} r^2 \cos 2\theta + \frac{P}{16\pi D} \times (a^2 - 2ar \cos \theta + r^2) \ln(a^2 - 2ar \cos \theta + r^2) \tag{4}$$

Проверим, как выполняются в (4) геометрические условия в начале координат

При $r=0$ то
$$\begin{cases} W(0, \theta) = \frac{P}{16\pi D} a^2 \ln a^2; \\ \frac{\partial W(0, \theta)}{\partial r} = -2a \cos 2\theta. \end{cases} \tag{5}$$

Из (5) следует, что к выражению (4) необходимо добавить два слагаемых, чтобы выполнялись граничных условия для

Босаков Сергей Владимирович. К.т.н., доцент каф. строительной механики Белорусской государственной политехнической академии.

Генфуд Салах. Аспирант каф. строительной механики Белорусской государственной политехнической академии. Беларусь, БГПА, 220027, г. Минск, пр. Ф.Скорины 65.

перемещения и угла поворота в начале координат. Вводя ве-