

7. Aristizabal-Ochoa J. D. Stability Problems of Columns and Frames// ACI Structural Journal. — 1997. — Vol. 94, № 4. — P. 389–398.
 8. Васильев Б. Ф., Розенблюм А. Я. Железобетонные колонны одноэтажных производственных зданий. — М.: Стройиздат, 1974. — С. 198.
 9. Рак Н. А. Расчет железобетонных колонн по деформированной схеме с учетом конструктивно-нелинейной работы узлов сопряжения// Эффективные строительные конст-

рукции зданий и сооружений. — Мн.: БелНИИС, 1995. — С.21–27.
 10. Туровский Л.М. К динамическому расчету плоских и пространственных рам с податливыми узлами// Расчет пространственных конструкций. — М., 1970. — Вып.13. — С.211–251.
 11. Корноухов Н. В. Прочность и устойчивость стержневых систем. — М.: Стройиздат, 1949. — С. 376.

УДК 624.04

Борисевич А.А., Казутов М.А., Трепачко В.М.

НЕКОТОРЫЕ ОСОБЕННОСТИ РАСЧЕТА ФИЗИЧЕСКИ НЕЛИНЕЙНЫХ НЕРАЗРЕЗНЫХ БАЛОК

Расчет нелинейно упругих изгибаемых статически неопределимых систем выполняется в проектно-конструкторских организациях с использованием, как правило, тех же программных комплексов, что и линейных систем. При этом изгибную жесткость элементов принимают равной $\alpha \cdot E_0 \cdot I$, где E_0 – начальный модуль упругости материала, I – осевой момент инерции сечения, α – безразмерный коэффициент, приблизительно равный 0,85, $\alpha \cdot E_0$ – секущий модуль упругости материала. Такой подход к расчету приводит лишь к приближенному определению напряженно-деформированного состояния системы, которое в отдельных случаях может существенно отличаться от истинного.

В работе предлагается итерационный способ расчета нелинейно упругих неразрезных балок и оцениваются погрешности, возникающие при линейном расчете этих систем.

Физическая нелинейность задавалась выражением

$$\sigma = E_0 \varepsilon - A \cdot \varepsilon^3, \quad (1)$$

где $A = \frac{4E_0^3}{27\sigma_{pp}^2}$ – постоянный коэффициент; σ_{pp} – предел прочности материала.

В расчетах нелинейно упругих систем необходимо учесть изменчивость модуля упругости материала, как по высоте сечения, так и по длине стержня. Если использовать понятие приведенного модуля упругости, определяемого по выражению С. П. Тимошенко

$$E_r = \frac{12}{\left(\frac{h}{\rho}\right)^3} \cdot \int_{\varepsilon_2}^{\varepsilon_1} \sigma \varepsilon d\varepsilon, \quad (2)$$

где h – высота прямоугольного сечения, ρ – радиус кривизны, то кривую $E_r = E_r\left(\frac{h}{\rho}\right)$ для строительной стали с

$E_0 = 2,1 \cdot 10^7$ МПа получим в виде, представленном на рис. 1.

В выражении (2) через h обозначается высота прямоугольного сечения, через ρ – радиус кривизны.

Выражение (2) позволяет использовать в расчетах уравне-

ние

$$\frac{E_r \cdot I}{\rho} = M \text{ или } \frac{EI_{pr}}{\rho} = M, \quad (3)$$

где $E_r \cdot I = EI_{pr}$ – приведенная жесткость элемента по сечению.

Для принятого закона $\sigma = \sigma(\varepsilon)$ (1) приведенная жесткость EI_{pr} в заданном сечении балки определяется по формуле

$$EI_{pr} = \frac{bh^3}{8} \left[\frac{2}{3} E - \frac{h^2}{10} \left(\frac{1}{\rho} \right)^2 \cdot A \right], \quad (4)$$

а зависимость между кривизной оси балки и изгибающим моментом получается в виде

$$M = \frac{E_0 I_2}{\rho} - \frac{A \cdot I_4}{\rho^3}, \quad (5)$$

где b – ширина прямоугольного сечения; I_2 и I_4 – моменты инерции сечения второго и четвертого порядков соответственно; $I_2 = \frac{bh^3}{12}$, $I_4 = \frac{bh^5}{80}$.

Для исследования была принята расчетная схема неразрезной балки, показанная на рис. 2а, с постоянными размерами поперечного сечения по всей длине. Численные значения величин, используемых в расчетах, принимались следующими: $E_0 = 35000$ МПа; $\sigma_{pp} = 50$ МПа; $b = 0,2$ м; $h = 0,44$ м. Начальная изгибная жесткость EI_0 , определяемая для линейной системы, равна $EI_0 = 4,97 \cdot 10^4$ кН·м². Расчетная жесткость EI_p , используемая в линейных расчетах, равна $EI_p = 0,85 \cdot EI_0 = 4,22 \cdot 10^4$ кН·м².

Эпюра изгибающих моментов для варианта $EI_p = const$ по всей длине балки показана на рис. 2б.

Для расчета (приближенного) балки как физически нелинейной системы следует разбить ее по длине на отдельные, относительно равно-напряженные участки (рис. 2а) и на каждом из них принять приведенную жесткость EI_{pr} постоян-

Борисевич Арсений Александрович, доктор технических наук, профессор, зав. каф. строительной механики БГПА.

Казутов Максим Александрович, студент строительного факультета БГПА.

Трепачко Виктор Михайлович, аспирант кафедры строительной механики БГПА.

Беларусь, г. Минск, Белорусская государственная политехническая академия, пр. Ф. Скорины 65.

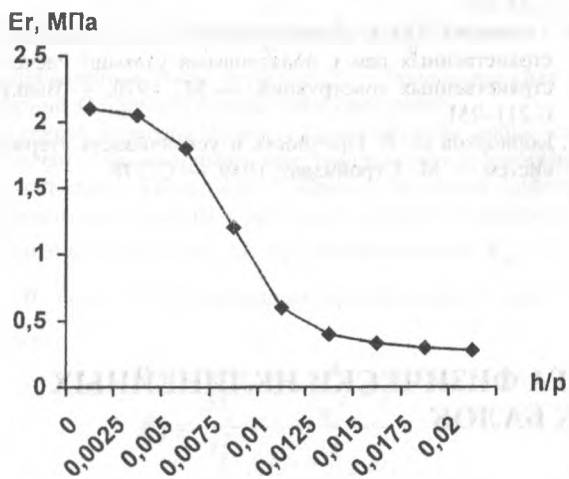


Рисунок 1. Зависимость модуля упругости для физически нелинейного материала по С.П. Тимошенко

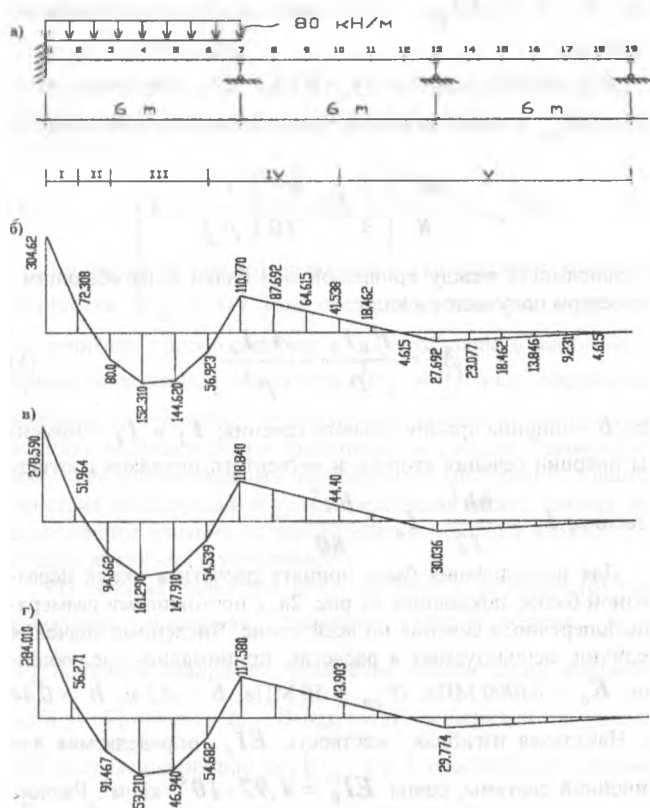


Рисунок 2. Расчётная схема неразрезной балки (а) и эпюры изгибающих моментов:

- б) для линейного расчёта $EIp = const$;
- в) после первого цикла решений физически нелинейной задачи;
- г) после третьего цикла решений физически нелинейной задачи.

постоянной. EI_{pr} определяется для сечения, в котором действует максимальный (по абсолютной величине) изгибающий момент на участке. Положение нейтральной оси

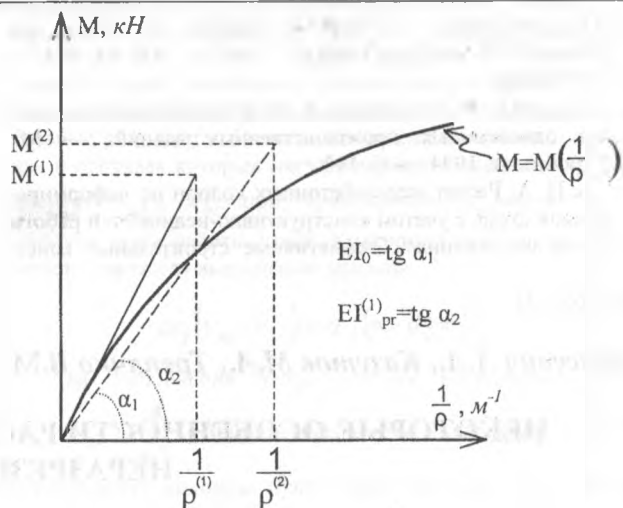


Рисунок 3.

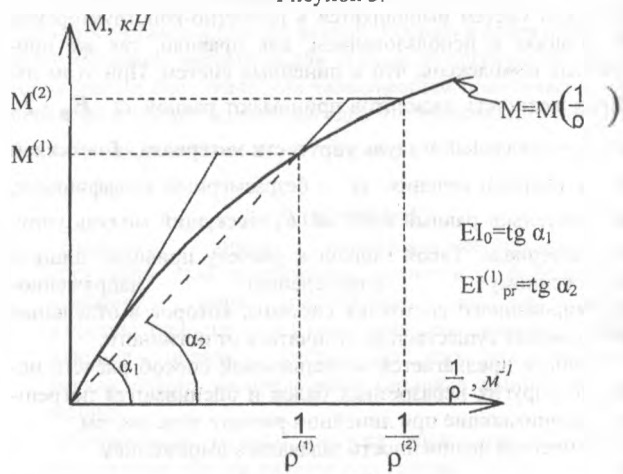


Рисунок 4.

в сечении, определяемое из уравнения $\int_{\epsilon_1}^{\epsilon_2} \sigma(\epsilon) d\epsilon = 0$,

принимая совпадающим с осью, проходящей через центр тяжести прямоугольного сечения.

Напряжения в волокнах балки, определяемые по линейной схеме расчета с начальным модулем упругости E_0 , при одинаковых ϵ , будут всегда больше напряжений, определяемых с использованием заданной зависимости $\sigma = \sigma(\epsilon)$, в которой второе слагаемое принято со знаком минус. Как следствие этого, при одинаковых деформациях усилия в сечении при линейном расчете оказываются больше усилий, определяемых с учетом физической нелинейности материала.

Необходимо найти такие жесткости элементов по сечениям, при которых бы усилия (в рассматриваемом примере – изгибающие моменты), определяемые по линейной схеме расчета с помощью известных программных комплексов, оказались бы равными усилиям, полученным из расчета физически нелинейной системы и при этом были бы равны относительные деформации ϵ , например, крайних волокон (принимается гипотеза плоских сечений).

Если зависимость между кривизной оси балки и изгибающим моментом $M = M\left(\frac{1}{\rho}\right)$ определена явно, то

задача состоит в том, чтобы организовать итерационную

схему решения этого уравнения. Рассмотрены и опробованы следующие пути реализации этой идеи.

1. Выполняется расчет системы с начальным модулем упругости E_0 , находятся значения $M^{(1)}$ (рис. 3) и соответствующие линейной схеме относительные деформации крайних волокон $\varepsilon^{(1)} = \frac{z}{\rho^{(1)}} = \frac{h/2}{\rho^{(1)}}$.

$$\varepsilon^{(1)} = \frac{z}{\rho^{(1)}} = \frac{h/2}{\rho^{(1)}}$$

После определения кривизны на всех участках балки, определяются приведенные жесткости $EI_{pr}^{(1)}$ каждого участка балки и выполняется второй шаг расчета. Далее вычисления продолжают так же, как и после первого шага. Вычисления повторяются до тех пор, пока не будет достигнута нужная степень сходимости.

В случае расчета нелинейно упругих систем по рекомендациям п. 1 не обязательно иметь в явной записи зависимость между изгибающим моментом и кривизной оси балки, т. к. по результатам вычислений на предыдущей итерации EI_{pr} определяется для последующей.

2. Считая, что для строительных конструкций, обладающих большими жесткостями элементов, различие в усилиях по линейному и нелинейному вариантам расчета невелико, вычислительный процесс можно ускорить. После расчета исходной системы с начальным модулем упругости E_0

предполагаем, что $M^{(1)}$ удовлетворяет уравнению $M = M\left(\frac{1}{\rho}\right)$ (рис. 4).

После определения из уравнения $M = M\left(\frac{1}{\rho}\right)$ первого

приближения для $\frac{1}{\rho^{(1)}}$ вычисляются приведенные

жесткости $EI_{pr}^{(1)}$ для всех участков балки и осуществляется второй шаг линейного расчета системы со скорректированными жесткостями. Сходимость процесса

зависит от многих факторов (вида функции $M = M\left(\frac{1}{\rho}\right)$,

типа конструкции и др.) и здесь не рассматривается.

3. Шаговые методы расчета, в которых предусматривается постепенное накопление нагрузки до полной. Применение их предполагает вычисление в конце каждого шага приведенной жесткости с использованием рекомендаций п. 1 или п. 2.

Покажем вначале решение задачи с использованием методики, изложенной в п. 2. Изгибающие моменты в расчетных сечениях балки при $EI_p = const$ (см. рис. 2): $M_I = 380,77$ кН·м, $M_{II} = 100,0$ кН·м, $M_{III} = 190,38$ кН·м, $M_{IV} = 138,46$ кН·м, $M_V = 51,92$ кН·м.

В общем случае в практических расчетах приведенная жесткость определяется приближенно, для чего используется деление сечения на части. При разбиении сечения, например, на четыре равные части ($h = 4hI$) получим

$$EI_{pr} = 2 \cdot (E_1 I_{21} + E_2 I_{22}),$$

где E_1 – касательный модуль упругости материала в средних точках крайних растянутых участков ($zI = \pm 1,5hI$); E_2 – касательный модуль упругости материала в средних точках

средних участков ($z2 = \pm 0,5hI$); I_{21}, I_{22} – моменты инерции второго порядка крайних и средних частей сечения относительно горизонтальной оси (x).

Так как, $E = \sigma = E_0 - 3A \cdot \varepsilon^2$, то

$$E_1 = E_0 - 3A \cdot \varepsilon_1^2 = E_0 - 3A \cdot \left(\frac{z_1}{\rho}\right)^2; \\ E_2 = E_0 - 3A \cdot \varepsilon_2^2 = E_0 - 3A \cdot \left(\frac{z_2}{\rho}\right)^2, \quad (6)$$

Из уравнения (5) определяем кривизну $\frac{1}{\rho}$.

Поясним изложенное вычислениями для 3-го участка балки.

$$I_2 = 1,4197 \cdot 10^{-3} \text{ м}^4, \quad I_4 = 4,1229 \cdot 10^{-5} \text{ м}^6,$$

$$M = M_{III} = 152,31 \cdot 10^3 \text{ Н·м}, \quad A = 2,5407 \cdot 10^{15} \text{ Па}.$$

Уравнение (5) даст три корня:

$$\frac{1}{\rho} = -2,3175 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1},$$

$$\frac{1}{\rho} = 3,1298 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}, \quad \frac{1}{\rho} = 2,0046 \cdot 10^{-2} \text{ м}^{-1}.$$

В расчетах используем корень, который удовлетворяет условиям

$$\frac{1}{\rho} \geq 0, \quad \frac{1}{\rho} \leq \left(\frac{1}{\rho}\right)_{max}$$

где $\left(\frac{1}{\rho}\right)_{max}$ – значение кривизны, соответствующей максимальному изгибающему моменту:

$$\left(\frac{1}{\rho}\right)_{max} = \frac{2}{h} \sqrt{\frac{E_0}{3A}} = 9,74 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}.$$

Следовательно, в дальнейшем используем значение кривизны, равное $3,1298 \cdot 10^{-3} \text{ м}^{-1}$.

По формуле (6) находим $E_1 = 32,97 \cdot 10^9$ Па, $E_2 = 34,77 \cdot 10^9$ Па.

Определим изгибную жесткость сечения балки на 3 участке

$$I_{21} = 6,2113 \cdot 10^{-4} \text{ м}^4, \quad I_{22} = 8,8733 \cdot 10^{-5} \text{ м}^4,$$

$$EI_{pr} = 4,71 \cdot 10^4 \text{ кН·м}^2.$$

Аналогичный расчет для других участков дает следующие значения жесткостей:

$$EI_{prI} = 3,76 \cdot 10^4 \text{ кН·м}^2, \quad EI_{prII} = 4,9 \cdot 10^4 \text{ кН·м}^2,$$

$$EI_{prIII} = 4,71 \cdot 10^4 \text{ кН·м}^2, \quad EI_{prIV} = 4,84 \cdot 10^4 \text{ кН·м}^2,$$

$$EI_{prV} = 4,95 \cdot 10^4 \text{ кН·м}^2.$$

Выполнив расчет балки с учетом истинного распределения жесткостей по участкам вдоль балки, найдем уточненную картину распределения изгибающих моментов в балке (в сеч. 1 – 281,61 кН, в сеч. 4 – 160,22 кН, в сеч. 7 – 117,94 кН) и значительные несоответствия с теми результатами расчета, которые представлены на рис. 2б.

Очевидно, что при разбиении расчетного сечения на большее число участков значение изгибной жесткости получится более точным. Если разбить сечение на 6 участков, то получим следующие значения жесткостей:

$$EI_{prI} = 3,58 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2, EI_{prII} = 4,83 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

$$EI_{prIII} = 4,62 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2, EI_{prIV} = 4,76 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

$$EI_{prV} = 4,88 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

Распределение усилий при данных значениях жесткостей см. на рис. 2в. Точное значение приведенной жесткости в расчётном сечении получим, если разбить сечение на бесконечно большое число бесконечно малых участков. В рассматриваемой работе точное значение EI_{pr} определяем по выражению (4).

Далее в расчетах будем использовать значения жесткостей, полученные при разбиении сечения на шесть частей.

Таким образом, на рис. 2в, в показана эпюра моментов, которая соответствует первому приближенному решению физически нелинейной задачи. Для получения второго приближения организуем второй цикл вычислений, аналогичный первому. Значения моментов будем брать с эпюры, полученной в первом приближении (см. рис. 2в). Выполним расчет, получим следующие значения жесткостей:

$$EI_{prI} = 3,85 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2, EI_{prII} = 4,8 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

$$EI_{prIII} = 4,59 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2, EI_{prIV} = 4,73 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

$$EI_{prV} = 4,88 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

и соответствующую этому эпюру моментов.

Выполнив затем аналогично расчет для третьего приближения, получим следующие значения жесткостей:

$$EI_{prI} = 3,77 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2, EI_{prII} = 4,81 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

$$EI_{prIII} = 4,6 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2, EI_{prIV} = 4,74 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2,$$

$$EI_{prV} = 4,88 \cdot 10^4 \text{ кН}\cdot\text{м}^2.$$

Третьему приближению соответствует эпюра моментов, показанная на рис. 2, г.

Анализ полученных результатов показывает, что эпюра усилий, полученная после третьего цикла уже незначительно отличается от эпюры, полученной после второго цикла, что позволяет утверждать, что процесс решения является сходящимся.

Сущность шагового метода расчета заключается в том, что балка загружается не полной нагрузкой, а ее частями (например, 1/5 от полной нагрузки) с накоплением до полной. В этом случае решение сводится к следующему. На первом шаге расчета принимается постоянная для всех участков балки изгибная жесткость $EI_{pr} = EI_0$ и балка загружается первой долей нагрузки. После выполнения расчетов для первого шага определяется EI_{pr} для второго шага на каждом участке и выполняется расчет на следующую долю нагружения и т. д. до нагружения балки полной нагрузкой.

При реализации этого метода в рассматриваемой задаче осуществлено два варианта нагружений - частями по 16 кН и по 8 кН. Анализ результатов показывает, что с уменьшением нагрузки на одном шаге и соответственно с увеличением цикла шагов результаты становятся более достоверными. Так,

в сечении балки у защемления изгибающий момент по линейной схеме равен 304,62 кНм; по нелинейному варианту в первом подходе (после третьего цикла расчёта) был равен 286,25 кНм, а при шаговом методе при нагружении по 16 кН равен 291,83 кНм и при нагружении по 8 кН – 288,38 кНм.

Точность расчётов можно также увеличить при увеличении числа участков разбивки балки по её длине. Так, был выполнен расчёт балки при разбивке её на 15 участков. И здесь уже в первом приближении эпюра изгибающих моментов получена практически совпадающей с соответствующей эпюрой, полученной при разбивке балки на 5 участков (рис. 2г) в третьем приближении. При этом вычисленная эпюра моментов незначительно отличается от эпюры моментов, полученной при использовании в расчётах точных значений приведенных жесткостей, вычисленных по формуле:

$$EI_{pr} = E_0 I_2 - 3A \left(\frac{1}{\rho} \right)^2 I_4.$$

Таким образом, можно сделать вывод, что точность определения приведенной жесткости при разбиении сечения на 6 частей по высоте является в большинстве случаев достаточной для инженерных расчётов.

Проведенные исследования позволяют сделать следующие выводы.

1. Расчет конструкции по линейному варианту, даже с учетом секущего модуля упругости, приводит к искаженной оценке напряженно-деформированного состояния балки. Так, при расчете по линейному варианту изгибающие моменты в сечениях 1 и 4 (см. рис. 2б) были равны 304,62 кН·м и 152,32 кН·м, а при расчете с учетом физической нелинейности (рис. 2г) соответственно 284,00 кН·м и 159,21 кН·м. Максимальная ошибка составляет 7,2% (сечение 1). В 7-ом сечении значение изгибающего момента увеличилось со 110,77 кН·м (рис. 10, а) до 117,58 кН·м (рис.2г). Погрешность составляет 6,2%.
2. Практические расчеты конструкций с нелинейными механическими характеристиками материалов должны выполняться с учетом изменчивости жесткостных характеристик этих конструкций вдоль их осей. Целесообразно в расчетах использовать два метода, изложенных в данной работе:
 - а) метод последовательных приближений с вариантом нагружения конструкции полной нагрузкой;
 - б) шаговый метод расчета.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лукаш П. А. Основы нелинейной строительной механики. М.: Стройиздат, 1978. – 204 с.
2. Ржаницын А. Р. Строительная механика: Учеб. Пособие для вузов. – М.: Высш. школа, 1982. – 400 с.
3. Тимошенко С. П. Сопrotивление материалов. Том 2. М.: Наука. Главная редакция физико-математической литературы, 1965. – С. 480.