УДК 539.3

Босяков С.М., Мартыненко И.М.

ФУНДАМЕНТАЛЬНАЯ МАТРИЦА ДЛЯ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ ПОЛУМОМЕНТНОЙ УПРУГОСТИ

Одним из распространенных подходов к решению задач математической физики и механики деформируемого твердого тела является технология, основанная на сведении их к фредгольмовым уравнениям второго рода. При этом в данной процедуре приведения одним из узловых моментов является построение фундаментального (основного сингулярного) решения- функции (или матрицы), зависящей от двух точек и удовлетворяющей по одной из точек исходному дифференциальному уравнению (или системе уравнений). Несмотря на то, что аппарат построения таких фундаментальных решений достаточно теоретически развит [1], нахождение фундаментальных решений для конкретных трехмерных по пространственной координате систем уравнений, описывающих среды со сложными свойствами, составляет важную и актуальную задачу механики деформируемого твердого тела. В настоящей работе представлены результаты построения фундаментальных матриц эллиптических уравнений, описывающих полумоментное упругое напряженно-деформированное состояние на базе алгебраических методов, развитых в [2, 3].

Разрешающую систему дифференциальных уравнений полумоментной теории упругости изотропной среды в пренебрежении инерцией микрополярного вращения представим в виде [4, 5]:

$$(\lambda+\mu+\eta\Delta)\,\boldsymbol{graddivu_k}+(\mu-\eta\Delta)\Delta \boldsymbol{u_k}+ +\frac{\rho}{2}\sum_{\boldsymbol{l,r}=1}^{3}\varepsilon_{\boldsymbol{klr}}\partial_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{l_r}+\rho \boldsymbol{f_k}=\rho\ddot{\boldsymbol{u}}_{\boldsymbol{k}},\ \boldsymbol{k}=\overline{1,3}, \tag{1}$$

где λ,μ - константы Ламе; η - микрополярная константа упругости; $\boldsymbol{u_k}$ - компоненты вектора перемещений; $\varepsilon_{\boldsymbol{klr}}$ - альтернирующий тензор; Δ - оператор Лапласа в декартовых координатах; $\boldsymbol{l_r}$ - объемные моменты; ρ - плотность среды; $\boldsymbol{f_k}$ - объемные силы.

Из (1) будем иметь следующее уравнение упруго-колебательного состояния среды, соответствующее массовым силам $\rho\vec{\boldsymbol{f}}$, объемным моментам $\frac{\rho}{2}\boldsymbol{rot}\vec{\boldsymbol{l}}$ и частоте колебаний ω (уравнение колебаний):

$$(\lambda+\mu+\eta\Delta)\,\boldsymbol{grad\,divu_k}+(\mu-\eta\Delta)\Delta \boldsymbol{u_k}+ +\rho \boldsymbol{f_k}+\frac{\rho}{2}\sum_{\boldsymbol{l,r}=1}^{3}\varepsilon_{\boldsymbol{klr}}\partial_{\boldsymbol{l}}\boldsymbol{l_r}+\rho \boldsymbol{u_k}\omega^2=0,\ \boldsymbol{k}=\overline{1,3}. \tag{2}$$

Введем матричный дифференциальный оператор:

$$\left\|\boldsymbol{M_{kj}}\right\|_{3\times 3}=\left((\lambda+\mu)+\eta\Delta\right)\partial_{\boldsymbol{k}}\partial_{\boldsymbol{j}}+ +\left((\mu-\eta\Delta)\Delta+\rho\omega^2\right)\delta_{\boldsymbol{kj}}. \tag{3}$$

Тогда уравнение упруго-колебательного состояния полумоментной среды (2) примет вид:

$$\boldsymbol{Mu}=0, \tag{4}$$

где $\boldsymbol{M}$ - матричный дифференциальный оператор (3), $\boldsymbol{u}$ - трехкомпонентный вектор-столбец, $\boldsymbol{u}=(\boldsymbol{u_1},\boldsymbol{u_2},\boldsymbol{u_3})$, $\delta_{\boldsymbol{kj}}=1$, если $\boldsymbol{k}=\boldsymbol{j}$ и $\delta_{\boldsymbol{kj}}=0$, если $\boldsymbol{k}\neq\boldsymbol{j}$, $\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}=\overline{1,3}$.

Найдем определитель матрицы $\boldsymbol{M}$:

$$\mathbf{det}\left\|\boldsymbol{M}^{(1)}\right\|_{3\times 3}= =\mu^2(\lambda+2\mu)\left(\left(1-\frac{\eta\Delta}{\mu}\right)\Delta+\boldsymbol{k}_2^2\right)^2\left(\Delta+\boldsymbol{k}_1^2\right). \tag{5}$$

Здесь $\boldsymbol{k}_1=\sqrt{\rho\omega^2/(\lambda+2\mu)},\ \boldsymbol{k}_2=\sqrt{\rho\omega^2/\mu}$.

Вычисляя в определителе (5) алгебраическое дополнение $\boldsymbol{m_{ij}}$ элемента $\boldsymbol{M_{ij}}$, получим

$$\boldsymbol{m_{kj}}=\left(\left((\lambda+2\mu)\Delta+\omega^2\rho\right)\delta_{\boldsymbol{kj}}-(\lambda+\mu+\eta\Delta)\partial_{\boldsymbol{k}}\partial_{\boldsymbol{j}}\right)\times \times\left((\mu-\eta\Delta)\Delta+\omega^2\rho\right). \tag{6}$$

Подставим в уравнение (4) вместо $\boldsymbol{u}$ матрицу следующего вида

$$\boldsymbol{u}=\boldsymbol{m}\varphi, \tag{7}$$

где φ - скалярная функция.

Учтем, что

$$\boldsymbol{Mm}\varphi=\left\|\mu^2(\lambda+2\mu)\delta_{\boldsymbol{kj}}\left(\left(1-\frac{\eta\Delta}{\mu}\right)\Delta+\boldsymbol{k}_2^2\right)^2\left(\Delta+\boldsymbol{k}_1^2\right)\varphi\right\|_{3\times 3}. \tag{8}$$

Здесь $\boldsymbol{k},\boldsymbol{j}=\overline{1,3}$

После несложных преобразований из (4) для определения функции φ получим следующее уравнение

$$\left(\left(1-\frac{\eta\Delta}{\mu}\right)\Delta+\boldsymbol{k}_2^2\right)^2\left(\Delta+\boldsymbol{k}_1^2\right)\varphi=0. \tag{9}$$

Поскольку все элементы матрицы $\boldsymbol{m}$ содержат множитель $\left(1-\frac{\eta\Delta}{\mu}\right)\Delta+\boldsymbol{k}_2^2$, достаточно найти функцию

$$\psi=\mu^2(\lambda+2\mu)\left(\left(1-\frac{\eta\Delta}{\mu}\right)\Delta+\boldsymbol{k}_2^2\right)\varphi, \tag{10}$$

которая удовлетворяет уравнению

$$\left(\left(1-\frac{\eta\Delta}{\mu}\right)\Delta+\boldsymbol{k}_2^2\right)\left(\Delta+\boldsymbol{k}_1^2\right)\psi=0,$$

или

Босяков Сергей Михайлович, *доцент каф. теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета. Беларусь, БГУ, 220050 Беларусь, Минск, пр. Независимости, 4.*

$$\left(\Delta+\lambda_1^2\right)\left(\Delta+\lambda_2^2\right)\left(\Delta+\lambda_3^2\right)\psi=0,$$

где $\quad \lambda_1\equiv k_1, \qquad \lambda_2=\dfrac{i\sqrt[4]{\mu}}{\sqrt{\eta}}\left(\sqrt{4k_2^2\eta+\mu}+\sqrt{\mu}\right),$

$\lambda_3=\dfrac{\sqrt[4]{\mu}}{\sqrt{\eta}}\left(\sqrt{4k_2^2\eta+\mu}-\sqrt{\mu}\right)$, i - мнимая единица.

Будем искать такое конкретное решение последнего уравнения, у которого частные производные четвертого порядка имеют изолированную особенность вида $|x|^{-1}=\left(x_1^2+x_2^2+x_3^2\right)^{-1/2}$. Если такое решение существует, оно должно удовлетворять условиям

$$\left(\Delta+\lambda_k^2\right)\psi=\frac{\exp\left(i\lambda_{k+2}|x|\right)-\exp\left(i\lambda_{k+1}|x|\right)}{2\pi|x|\left(\lambda_{k+1}^2-\lambda_{k+2}^2\right)},$$

$k=\overline{1,3}$,

где $\lambda_4\equiv\lambda_1, \lambda_5\equiv\lambda_2$.

Отсюда получим

$$\psi=\frac{1}{2\pi|x|}\sum_{k=1}^{3}\frac{\exp\left(i\lambda_k|x|\right)}{\left(\lambda_{k+1}^2-\lambda_k^2\right)\left(\lambda_{k+2}^2-\lambda_k^2\right)}. \qquad (11)$$

Из (10) имеем

$$\left(\left(1-\frac{\eta\Delta}{\mu}\right)\Delta+k_2^2\right)\varphi=\frac{\psi}{\mu^2(\lambda+2\mu)}. \qquad (12)$$

Внесем выражение для функции ψ в (7) с учетом (12). В результате будем иметь фундаментальную матрицу решений уравнения (4):

$$\Gamma(x,\omega)=\left\|\Gamma_{kj}(x,\omega)\right\|_{3\times3}, \qquad (13)$$

где:

$$\begin{aligned}\Gamma_{jj}=\sum_{k=1}^{3}\frac{\exp(i|x|\lambda_k)}{|x|}&\Bigg(\frac{\rho\omega^2}{\left(\lambda_{k+1}^2-\lambda_k^2\right)\left(\lambda_{k+2}^2-\lambda_k^2\right)}-\gamma\left(\lambda_{k+1}^2-\lambda_{k+2}^2\right)\Bigg(\frac{x_j^4}{|x|^4}\lambda_k^2\times\\&\times\left(\eta\lambda_k^2+\mu\right)+\frac{|x|^2-x_j^2}{|x|^2}\Bigg(\eta\lambda_k^2\frac{1-i|x|\lambda_k}{|x|^2}+\lambda\left(\frac{|x|^2-x_j^2}{|x|^2}\lambda_k^2-\frac{1-i|x|\lambda_k}{|x|^2}\right)+\\&+\mu\left(2\lambda_k^2\frac{|x|^2-x_j^2}{|x|^2}-\frac{1-i|x|\lambda_k}{|x|^2}\right)\Bigg)+\frac{x_j^2}{|x|^2}\Bigg(\lambda\left(2\frac{1-i|x|\lambda_k}{|x|^2}+\lambda_k^2\frac{|x|^2-x_j^2}{|x|^2}\right)+\\&+\eta\lambda_k^2\left(\lambda_k^2\frac{x^2-x_m^2}{|x|^2}-2\frac{1-i|x|\lambda_k}{|x|^2}\right)\Bigg)+\mu\left(2\frac{1-i|x|\lambda_k}{|x|^2}+3\lambda_k^2\frac{|x|^2-x_m^2}{|x|^2}\right)\Bigg)\Bigg),\end{aligned} \qquad (14)$$

$$\begin{aligned}\Gamma_{jm}=\frac{x_jx_m\gamma}{|x|^2}\sum_{k=1}^{3}\frac{\exp(i|x|\lambda_k)}{|x|}&\left(\eta\lambda_k^2-(\lambda+\mu)\right)\times\\&\times\left(\lambda_{k+2}^2-\lambda_{k+1}^2\right)\left(\lambda_k^2-\frac{3(1-i|x|\lambda_k)}{|x|^2}\right),\end{aligned} \qquad (15)$$

где

$$\gamma=\left(2\pi\mu^2(\lambda+2\mu)\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)\left(\lambda_1^2-\lambda_3^2\right)\left(\lambda_2^2-\lambda_3^2\right)\right)^{-1},$$

$j\neq m=\overline{1,3}$.

В заключение отметим, что матрица $\Gamma(x,\omega)$ является симметричной, и ее каждый столбец или строка удовлетворяют уравнению (4) в произвольной точке $x\in E_3$ кроме начала координат ($x\neq0$).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Журавков М. А., Мартыненко М. Д. Интегральные и сингулярные уравнения теории упругости. Мн.: Университетское. 2002. 360 с.
2. Леви Э. Э. О линейных эллиптических уравнениях в частных производных //УМН. 1940. Вып. 8. С. 249 – 292.
3. Купрадзе В. Д., Гегелиа Т. Г., Башелейшвили М. О., Бурчуладзе Т. В. Трехмерные задачи математической теории упругости и термоупругости. М.: Наука, 1976. 663 с.
4. Миндлин Р. Д., Тирстен Г. Ф. Эффекты моментных напряжений в линейной теории упругости // Механика. 1964. Т. 86, № 4. С. 81 - 114.
5. Эринген А. К. Теория микрополярной упругости // Разрушение. Под ред. Г. Либовица. М.: Наука. 1975. Т. 2 С. 647 - 851.