7. Crystal Growth and Optical Characterization of Ordered Vacancy Compounds of the I-III$_3$-VI$_5$ and I-III$_5$-VI$_8$ Families / G.Marin [et al] // Jpn. J. Appl. Phys. – 2000. – Vol. 39. Suppl. 39–1. – P. 44–45.
8. Фотоэлектрические свойства структур In/CuIn$_3$Se$_5$ и In/CuGa$_3$Se$_5$ / И.В. Боднарь, Т.Л. Кушнер, В.Ю. Рудь [и др.] // Журнал прикладной спектроскопии. – 2002. – Т. 69, № 4. – С. 520–522.
9. Stryctural and Physical-Chemical Properties of the Ternary Compounds CuIn$_3$Se$_5$, CuGa$_3$Se$_5$ and CuGa$_5$Se$_8$ Proceedings of 13th International Conference Ternary and Multinary Compounds, Paris (France), 14–18 October 2002 / Ecole Nationale Supérieure de Chimie de Paris. – Paris, 2002. – P. 175.
10. Уиллардсон, Р. Оптические свойства полупроводников / Р. Уиллардсон, А. Бир. – М: Мир, 1970. – 488 с.
11. Бонч-Бруевич, В.Л. Физика полупроводников / В.Л. Бонч-Бруевич, С.Г. Калашников. – М.: Наука, 1977. – 672с.
12. Stryctural and physical-chemical properties of the CuGa$_5$Se$_8$, CuGa$_3$Se$_5$ and CuIn$_3$Se$_5$ Compounds / N.S. Orlova, I.V. Bodnar, and T.L. Kushner // J. Phys. Chem. Solids. – 2003. – № 64. – P. 1895–1899.
13. Pässler, R. Basic model relations for temperature dependencies of fundamental energy gaps in semiconductors / R. Pässler // Phys. Stat. Sol. (b) – 1997. – Vol. 200. – P. 155–172.
14. Pässler, R. Dispersion-related assessments of temperature dependences of the fundamental band gap of hexagonal GaN / R. Pässler // J. Appl. Phys. – 2001. – Vol. 90, № 8. – P. 3956–3964.
15. Codu, G.D. Bose-Einstein occupation factor in Semiconductors / G.D. Codu // Semiconductors and Semimetals. – 1984. – Vol. 21(b), № 2. – P. 11–79.
16. Структура и тепловые свойства соединений CuIn$_3$Se$_5$, CuGa$_3$Se$_5$ и CuGa$_5$Se$_8$ / Н.С. Орлова, И.В.Боднарь, Т.Л.Кушнер // Актуальные проблемы физики твердого тела: Тез. докл. межд. науч. конф. к 40-летию ИФТТП НАНБ и 90-летию основателя института академика Н.Н.Сироты, Минск, 4-6 ноября 2003 г. / ИФТТП НАНБ. – Минск: изд-й. центр БГУ, 2003. – С. 167–168.

Статья поступила в редакцию 21.12.2006

УДК 519.64+513.6

Веремейчик А.И.

К РЕШЕНИЮ НЕСТАЦИОНАРНЫХ ЗАДАЧ ТЕПЛОПРОВОДНОСТИ МЕТОДОМ ТЕОРИИ ПОТЕНЦИАЛА В ИЗОБРАЖЕНИЯХ

Введение

Потребности современной техники во многих случаях требуют исследования напряженно-деформированного состояния конструкций, которые подвергаются воздействию механических нагрузок и изменяющихся во времени температур. Сложность форм применяемых конструкций и их отдельных элементов наряду со сложным характером упомянутых воздействий требуют разработки новых методов расчета на прочность для получения данных об их поведении при эксплуатации еще на этапе проектирования. Вопрос о нестационарных тепловых воздействиях на элементы конструкций актуален еще и потому, что механизмы эксплуатируются в условиях неравномерного нагрева, который вызывает значительные температурные напряжения и в сочетании с напряжениями, вызванными действием физической природы, часто становится причиной частичного или полного вывода механизмов из строя. При резко нестационарных процессах теплообмена возникает также большая неравномерность температуры и напряжений. Все это требует развития исследований нестационарных задач теплопроводности, связанных со строгим удовлетворением граничных условий по всей границе области при произвольном распределении в ней температуры.

1. Постановка задачи

При исследовании напряженно-деформированного состояния конструктивных элементов машин, механизмов и строительных конструкций, подвергающихся одновременному воздействию механических усилий и изменяющихся во времени температур, возникают дополнительные трудности из-за появления в разрешающих уравнениях времени как дополнительной независимой переменной. Один из подходов состоит в учете времени аналогично учету координат; при этом численное интегрирование производится по отрезку времени так же, как и по границе рассматриваемого тела. Однако этот метод значительно усложняет вычислительные операции. Для преодоления этих трудностей целесообразно применить интегральное преобразование Лапласа к исходным дифференциальным уравнениям в частных производных и краевым условиям задачи путем исключения времени из числа независимых переменных [1]. Использование данного подхода позволяет одинаково хорошо решать краевые задачи с различного рода начальными и граничными условиями благодаря значительному упрощению исходных уравнений. Применение метода потенциала для решения задачи в изображениях значительно упрощает процедуру вычислений.

Рассмотрим дифференциальное уравнение несвязанной теплопроводности в виде [1]:

$$\nabla^2 T = \frac{1}{a}\frac{\partial T}{\partial t}, \tag{1}$$

где $T = T(x,t)$ – распределение температуры как функция координат произвольной точки x и времени t, $a = \frac{\lambda}{c\rho}$ – коэффициент температуропроводности, λ – коэффициент теплопроводности, ρ – плотность материала, c – удельная теплоемкость.

2. Методика решения

Одно из решений уравнения (1), описывающее двумерное распространение тепла от точечного источника с интенсивностью, равной единице, который начинает действовать в некоторой произвольной точке тела x_0 в нулевой момент времени, является фундаментальным решением уравнения теплопроводности и имеет вид [2]:

$$T(x,t) = F(x_0,x,t) = \frac{1}{2\sqrt{\pi a t}} e^{\left(-\frac{r^2}{4at}\right)}, \tag{2}$$

***Веремейчик Андрей Иванович**, ст. преподаватель кафедры сопротивления материалов и теоретической механики БрГТУ.*
Беларусь, Брестский государственный технический университет, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

где r – расстояние между точками x и x_0.

Используя преобразование Лапласа к уравнению (1), получаем:

$$\nabla^2 T_L - \frac{s}{a} T_L + \frac{1}{a} T(x,0) = 0\,, \qquad (3)$$

где $T_L = T_L(x,s)$ – трансформанта Лапласа температуры T как функция координат и параметра преобразования s (изображение функции T по Лапласу), $T(x,0)$ - функция начального распределения температуры. Если в начальный момент времени распределение температуры равно нулю, то выражение (3) упрощается:

$$\nabla^2 T_L = \frac{s}{a} T_L\,. \qquad (4)$$

Уравнению (4) удовлетворяет трансформанта Лапласа функции (2):

$$T_L = F_L = \frac{1}{2\pi a} K_0 \left(\sqrt{\frac{s}{a}} r \right), \qquad (5)$$

где K_0 – модифицированная функция Бесселя второго рода нулевого порядка.

С помощью второй формулы Грина [2] можно из выражения (4) получить следующее тождество:

$$T_L(X,s) = 2a \int_S \left[\frac{\partial T_L(y,s)}{\partial n} \cdot F_L(x,y,s) - T_L(y,s) \cdot \frac{\partial F_L(x,y,s)}{\partial n} \right] dS_x\,, \qquad (6)$$

где S – граница плоской области, y – точка, принадлежащая границе, n – внешняя нормаль к S в точке y.

Таким образом, если всюду на границе известны значение температуры T_L и теплового потока $Q_L = \dfrac{\partial T_L}{\partial n}$ при любом параметре s, то значение температуры в любой внутренней точке x можно определить для данного значения s по формуле (5) при помощи квадратурных формул Гаусса.

Однако в краевой задаче теплопроводности иногда задается только часть граничных условий. Уравнение (6) может использоваться в данном случае для определения недостающих граничных значений температур. Для возможности такого его использования необходимо в уравнении (6) перейти к пределу при стремлении внутренней точки x к произвольной точке x' границы:

$$T_L(x',s) + 2a \int_S \left[T_L(y,s) \frac{\partial F_L(x',y,s)}{\partial n} - \frac{\partial T_L(y,s)}{\partial n} F_L(x',y,s) \right] dS_x = 0. \qquad (7)$$

Если заданы граничные условия, соответствующие корректно поставленной задаче, уравнение (7) может рассматриваться как сингулярное интегральное уравнение относительно T_L и $\dfrac{\partial T_L}{\partial n}$ на тех участках границы, где не задана какая-либо одна из этих величин.

Получить решение уравнения (7) аналитически практически не представляется возможным, особенно при сложной геометрии границы. Поэтому проводится приближенное решение численными методами.

После того, как будут определены неизвестные значения на границе области, величину трансформанты температуры T_L в любой внутренней точке можно найти по формуле (6) при помощи простого интегрирования.

Для решения уравнения (7) граница области S разбивается на некоторое число сегментов, математически это можно представить в виде:

$$T_L(x',s) + 2a \sum_{i=1}^{N} \int_{S_i} \left[T_L(y,s) \frac{\partial F_L(x',y,s)}{\partial n} - \frac{\partial T_L(y,s)}{\partial n} F_L(x',y,s) \right] dS_x = 0, \qquad (8)$$

где каждое значение индекса i соответствует одному из N сегментов S_i. Способ разбиения границы произвольный и зависит от требуемой точности результатов (чем меньше размер сегментов, тем выше точность вычислений). Затем уравнение (8) сводится к системе алгебраических уравнений $T_L(y,s)$ и $\dfrac{\partial T_L(y,s)}{\partial n}$ на каждом сегменте при помощи функций от s заданного вида, т.е. полиномами некоторой степени. Так, $T_L(y,s)$ можно представить, например, на i-м сегменте постоянной $T_L(y_i,s)$. Если последовательно на каждом из сегментов приписывать точке x дискретное значение x_j, то уравнение (8) переходит в систему

$$T_L(x_j',s) + 2a \sum_{i=1}^{N} \left[T_L(y_i,s) \int_{S_i} \frac{\partial F_L(x_j',y,s)}{\partial n} dS_x - \frac{\partial T_L(y_i,s)}{\partial n} \int_{S_i} F_L(x_j',y,s) dS_x \right] = 0, \quad j = 1,2,\ldots,N \qquad (9)$$

Для заданного значения s интегралы в уравнениях (9) содержат лишь известные функции, значения которых определены для каждого x_j' во всех точках y на границе. Они могут быть вычислены путем численного интегрирования и представляют собой коэффициенты при переменных $T_L(y_i,s)$ и $\dfrac{\partial T_L(y_i,s)}{\partial n}$.

Сложность возникает при вычислении контурных сингулярных интегралов (при фиксированном шаге времени) типа

$$I(P_k) = \int_S Q(x) T_L(x,y,s) dS_x\,. \qquad (10)$$

Вычисление, например, сингулярного интеграла типа $I = \int_{-h}^{h} \dfrac{f(x)}{x} dx$, к которому приводятся интегральные уравнения нестационарной теплопроводности, осуществляется по формуле:

$$I = \int_{-h}^{h} \frac{f(x)}{x} dx = h \sum_{k=1}^{n} \omega_k \frac{f(x_k)}{x_k} + R_c\,, \qquad (11)$$

где ω_k – веса квадратурной формулы Гаусса R_c – остаточный член. Сравнивая (11) и формулу Гаусса [3], можно сделать вывод, что квадратурная формула для сингулярного интеграла при четном n отличается от формулы Гаусса только остаточным членом.

Применяя к вычислению интегралов формулу (7), получим:

$$I_i = \int_{\Delta l_i} Q(x) T_L(x,y,s) dl = h_i \sum_{j=1}^{m} \omega_j Q(x_j,S) T_L(x,y_{ij},s) + R_i\,, \qquad (12)$$

где R_i – остаточный член.

Точка y_{ij} лежит внутри i-го сегмента, значения $T_L\left(x, y_{ij}, s\right)$ известны, для вычисления $Q\left(x_j\right)$ применим формулу:

$$Q\left(x_j\right)=\sum_{t=0}^{P} Q\left(x_t\right) A\left(x_t, x_j\right)+\omega_p\left(x_j\right) \frac{Q^{(P+1)}\left(\xi_j\right)}{(p+1)!}, \quad (13)$$

где x_t – координаты точек, через которые проводится интерполяционный полином, $Q\left(x_t\right)=Q^t$ – значения плотностей в этих точках, $A\left(x_t, x_j\right)=A_j^t=\dfrac{\omega_p\left(x_j\right)}{\left(x_j-x_t\right)\omega_p'\left(x_t\right)}$ – матрица весов квадратурной формулы.

Внося (13) в (12) получим два варианта формулы для вычисления интеграла по отрезку Δl_i:

$$I_i=h_i \sum_{t=0}^{p} Q^t \sum_{j=1}^{m} \omega_j A_j^t T_{Lj}+R_i'+R_i ; \quad (14)$$

$$I_i=h_i \sum_{j=1}^{m} \omega_j T_{Lj} \sum_{t=0}^{p} Q^t A_j^t+R_i'+R_i \quad (15)$$

где $R_i'=h_i \sum_{j=1}^{m} \omega_j T_{Lj}+\omega_p\left(x_j\right) \dfrac{Q^{(p+1)}\left(\xi_i\right)}{(p+1)!}$.

Формула (14) применяется в случае, когда плотности потенциалов неизвестны.

Формула (15) используется, когда плотности потенциалов Q^t в точках, через которые проходит интерполяционный полином, известны. Предварительно находятся $\sum_{t=0}^{p} Q^t A_j^t$ – значения плотности в узловых точках x_j, а затем производится суммирование по j. Величина $h_i \sum_{j=1}^{m} \omega_j A_j^t T_j^*$ в (12) является добавкой в матрицу коэффициентов влияния плотности в точках x_t.

Если заданы значения переменных, соответствующие известным граничным условиям корректно поставленной граничной задачи, то остальные значения можно определить из решения алгебраических уравнений.

Для получения окончательного решения уравнения (1) необходимо провести обращение преобразования Лапласа. Здесь возможны различные подходы. Удобно пользоваться рекомендациями [3], приняв зависимость температуры от времени в виде полинома. Представим искомую функцию от времени приближенно в виде:

$$T=A+Bt+\sum_{k=1}^{m} a_k e^{-b_k t}, \quad (16)$$

где A, B, a_k, b_k, m – постоянные. Преобразуя уравнение (16) по Лапласу и умножая на параметр преобразования s, можно получить:

$$sT_L(s)=A+\frac{B}{s}+\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{1+\frac{b_k}{s}}. \quad (17)$$

Сначала необходимо задать число m и последовательность значений параметра s: $s=s_n, n=1,2,\ldots,M$, где $M=m+2$. Входящие в формулу (16) m постоянных b_k принимаются равными первым m значениям s_n. Затем вычисляется трансформанта функции $T_L(s)$ для каждого из M значений s_n. При подстановке этих величин для каждого значения s_n в формулу (17) получается M уравнений:

$$s_n T_L(s_n)=A+\frac{B}{s}+\sum_{k=1}^{m} \frac{a_k}{1+\frac{s_k}{s_n}}, \quad n=1,2,\ldots,M. \quad (18)$$

Они образуют систему линейных алгебраических уравнений относительно M неизвестных A, B и a_k, решение которой не представляет особых трудностей.

Выводы

Разработан алгоритм численного решения нестационарных задач теплопроводности с использованием метода граничных элементов и преобразования Лапласа. Результаты, полученные при решении задачи теплопроводности, используются как исходные данные в процессе решения задачи теории упругости для получения перемещений и напряжений [4]. Объединение алгоритмов, использующихся в статической теории упругости и нестационарной теплопроводности, позволит разработать методику численного решения задач несвязанной нестационарной термоупругости.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. – М.: Высшая школа, 1967.
2. А.Н.Тихонов, А.А.Самарский. Уравнения математической физики. – М.: Наука, 1966. – 724 с.
3. Метод ГИУ. Вычислительные аспекты и приложения в механике. Под ред. Т.Круза и Ф.Риццо. – М.: Мир, 1978.
4. Веремейчик А.И. Применение интегрального преобразования Лапласа к исследованию нестационарных тепловых процессов. // Вестник БГТУ.- Физика, математика, химия, №5, 2000. – с.32-33.

Статья поступила в редакцию 02.11.2006

УДК 681.511.4

Кузнецов А.П., Марков А.В., Алькатауна Х.А.

МЕТОДИКА РАСЧЕТА БЫСТРОДЕЙСТВУЮЩИХ СИСТЕМ СИНХРОНИЗАЦИИ С МЕЛКИМ ШАГОМ ВЫХОДНОГО СИГНАЛА

Введение

Одним из возможных способов уменьшения шага выходного сигнала (выходной частоты или скорости) системы синхронизации является использование в контуре фазовой автоподстройкой частоты этой системы делителя с дробным переменным коэффициентом деления (ДДПКД).

Одним из вариантов построения ДДПКД может быт делитель, выполненный на базе цифрового синтезатора отсчетов (ЦСО).

Использование различных методов перестройки ЦСО может обеспечить дробность шага перестройки эквивалентного коэффициента деления до $10^{-5} \div 10^{-7}$.

Кузнецов А.П., Марков А.В., Алькатауна Х.А. *БГУИР, г. Минск.*