

Таким образом, предлагаемый универсальный подход к решению многих вычислительных задач позволяет провести достаточно глубокий анализ процесса вычислений без аналитических выкладок, что во многих случаях (особенно когда аналитическое исследование затруднено или вообще невозможно) имеет определенную практическую ценность.

2. Ниже предлагается еще один эффективный методологический прием вычислительной практики, который автору не удалось найти ни в учебной литературе, ни в каких-либо других источниках информации.

Пусть нам нужно, к примеру, получить решение какой-либо задачи для обыкновенного дифференциального уравнения (ОДУ) вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)})=0, \quad (1)$$

где $y=y(x)$ - неизвестная функция, удовлетворяющая каким-либо граничным, либо начальным условиям, либо другим условиям единственности решения.

Для апробации и отладки алгоритма предлагается решить задачу с заранее известным ответом, полагая $y=p(x)$, где известная функция $p(x)$ удовлетворяет, вообще говоря, другим условиям единственности. То есть, будет решаться задача для ОДУ вида

$$F(x, y, y', y'', \dots, y^{(n)}) = F(x, p, p', p'', \dots, p^{(n)}), \quad (2)$$

которая имеет довольно много общего с (1). При этом отрезок, где ищется решение задачи (2) можно взять небольшим для получения достаточно высокой точности при минимальном объеме вычислений.

После такой успешной отладочной апробации можно применять алгоритм к решению исходной задачи (1).

Значительный эффект от такого подхода можно получить, если используются типовые методы для решения краевых задач:

УДК 741.02:519

Игнатюк В.И., Игнатов А.Ю.

МОДЕЛИРОВАНИЕ ВРАЩЕНИЯ АКСОНОМЕТРИЧЕСКОГО ИЗОБРАЖЕНИЯ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ СТЕРЖНЕВОЙ СИСТЕМЫ НА ЭКРАНЕ МОНИТОРА

Введение. Изображение пространственной системы на экране монитора, представляющем собой по существу плоскость, требует преобразования ее в плоское изображение, как можно более наглядно отображающие исходную пространственную систему. Такое преобразование может быть выполнено с использованием, так называемых, аксонометрических проекций [1]. При этом плоскость, на которую проецируется изображение (плоскость экрана монитора), новые оси в этой плоскости, проекции точек и элементов также называют аксонометрическими. При таком преобразовании пространственной системы в плоское изображение, естественно, возникают искажения ее вида, которые описываются с помощью коэффициентов искажения k_x, k_y, k_z , представляющих собой отношения аксонометрических координат точек изображения на соответствующих осях (или длин соответствующих отрезков) к действительным координатам этих точек (длин отрезков).

Следует иметь в виду, что аксонометрические проекции могут иметь [1] самые разные виды. Они могут быть изометрическими (при одинаковых коэффициентах искажения по всем осям), диметрическими (если коэффициенты искажения

- метод конечных разностей (метод сеток),
- методы типа Бубнова – Галеркина или Рэлея – Ритца,
- методы конечных элементов, которые можно рассматривать как метод Ритца со специфическим выбором базисных функций,

а также другие методы, где решающую роль играет левая часть уравнения (2).

Очевидно, подобный прием можно успешно применять при решении самых разнообразных конечных, дифференциальных и интегральных уравнений и их систем, а также для решения других задач вычислительного характера.

Например, решая n – систему конечных уравнений вида

$$f(x) = 0, \quad (3)$$

можно вначале решить одну или несколько систем вида

$$f(x) = f(x_p), \quad (4)$$

где x_p - известный "пробный" вектор, и только затем уже решать систему (3).

При этом, вообще говоря, желательно, чтобы "пробный" (отладочный) вектор был по возможности близок к искомому решению. Это требование может быть реализовано на практике, когда приближенное решение данной задачи известно, например, из физических соображений.

Ввиду простоты и эффективности предлагаемых процедур, их можно рекомендовать для включения в разнообразные учебные курсы для образовательных заведений.

Заключение. Предлагаемые приемы вычислительной практики достаточно просты в реализации и могут эффективно использоваться при решении самых разнообразных задач вычислительного характера. В идеале такими приемами могут владеть не только специалисты в области вычислительной математики, но и инженеры, и экономисты, а также студенты соответствующих специальностей.

Статья поступила в редакцию 15.03.2007

равны только по двум осям) и триметрическими (если по всем осям коэффициенты искажения различны). С другой стороны, изометрия, диметрия и триметрия могут быть прямоугольными и косоугольными. Системы декартовых координат могут быть правыми и левыми.

Выбор аксонометрии. В качестве пространственных объектов в данной работе рассматриваются пространственные стержневые системы, расчетные схемы которых [2] состоят из узлов (точек) и стержней, присоединяющихся к этим узлам (по существу, соединяющих указанные точки). Анализ представления таких систем, выполненный при рассмотрении вопроса, с учетом также особенностей представления аналитических зависимостей, которые будут применяться для расчета систем [2, 3], привел к решению использовать для представления рассматриваемых пространственных стержневых систем правую аксонометрическую прямоугольную диметрию в виде, представленном на рис. 1. Здесь θ_y – угол направления оси y в аксонометрии (по отношению к оси x), принятый равным 35° .

Аксонометрические координаты точек системы через их действительные координаты выражаются следующим образом:

Игнатюк Валерий Иванович, к.т.н., доцент, заведующий кафедрой строительной механики БрГТУ.

Игнатов Алексей Юрьевич, студент строительного факультета БрГТУ.

Беларусь, Брестский государственный технический университет, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.

$$x_a = k_x x; \quad y_a = k_y y; \quad z_a = k_z z; \quad (1)$$

или с учетом $k_x = k_z = 1$:

$$x_a = x; \quad y_a = k_y y; \quad z_a = z. \quad (1')$$

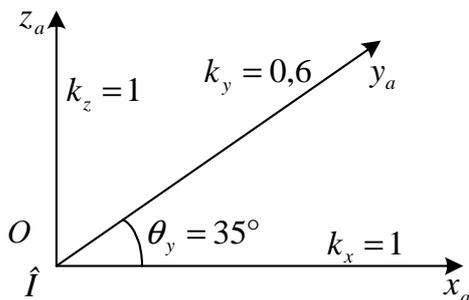


Рис. 1. Прямоугольная диметрия

При работе с изображениями на экране монитора часто возникает необходимость масштабирования (изменения масштаба) изображений. Поэтому введем дополнительно коэффициент масштабирования k_m , и примем его одинаковым по всем осям. С учетом этого коэффициента выражения (1) примут вид:

$$x_a = k_m x; \quad y_a = k_m k_y y; \quad z_a = k_m z. \quad (2)$$

При представлении пространственного объекта в плоском изображении все точки этого изображения описываются только двумя координатами – экранными координатами $x_{экр}$, $z_{экр}$. Преобразование аксонометрических координат в экранные может быть выполнено (рис. 2) с помощью соотношений:

$$\begin{aligned} x_{экр} &= x_a + y_a \cos \theta_y \quad \text{или} \\ x_{экр} &= k_m x + k_m k_y y \cos \theta_y; \\ z_{экр} &= z_a + y_a \sin \theta_y \quad \text{или} \\ z_{экр} &= k_m z + k_m k_y y \sin \theta_y. \end{aligned} \quad (3)$$

Поворот пространственной стержневой системы относительно осей x , y , z может быть описан поворотом ключевых, узловых точек. Зная их расположение, положение стержней определится соединением соответствующих точек прямолинейными отрезками.

Исследуем изменение экранных координат для произвольной точки при ее повороте относительно осей x , y , z . При этом направления поворотов, если смотреть из концов осей, приняты положительными: вокруг оси x – по часовой стрелке, вокруг оси y – против часовой стрелки и вокруг оси z – по часовой стрелке.

Поворот относительно оси x . Поворот произвольной точки A (рис. 3) в пространстве относительно оси x будет происходить по окружности, плоскость которой перпендикулярна оси x и радиус которой равен:

$$r_x = \sqrt{y^2 + z^2}, \quad (4)$$

где y , z – действительные координаты положения точки A в пространстве.

Обозначим для точки A угол наклона радиуса r_x по отношению к горизонтальной плоскости (оси y') через α_0 . Величина этого угла легко находится с помощью зависимости

$$\alpha_0 = \arcsin \frac{z}{r_x}. \quad (5)$$

Следует заметить, что угол α_0 может изменяться от 0° до 360° и одно и то же значение z/r_x будет соответствовать двум величинам угла α_0 . Поэтому для определения действительного значения угла α_0 необходимо анализировать величины и знаки обоих координат, определяющих положение точки в плоскости вращения, и сделать это можно, например, с помощью следующих соотношений:

если $z \geq 0$ и $y > 0$, то $0^\circ \leq \alpha_0 < 90^\circ$; если $z \geq 0$ а $y \leq 0$, то $90^\circ \leq \alpha_0 \leq 180^\circ$;

если $z < 0$ и $y \leq 0$, то $180^\circ < \alpha_0 \leq 270^\circ$; если $z < 0$ а $y \geq 0$, то $270^\circ < \alpha_0 \leq 360^\circ$. (6)

После поворота точки на угол $\Delta\alpha$ (рис. 3) положение радиуса r_x будет определяться углом

$$\alpha = \alpha_0 - \Delta\alpha, \quad (7)$$

а действительные координаты нового положения точки A (точки A') будут равны:

$$x_\alpha = x; \quad y_\alpha = r_x \cos \alpha = \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \cos \alpha; \quad (8)$$

$$z_\alpha = r_x \sin \alpha = \sqrt{y^2 + z^2} \cdot \sin \alpha.$$

Подставив теперь в (3) вместо x , y , z выражения (8), получим экранные координаты нового (повернутого относительно оси x на угол $\Delta\alpha$) положения точки A .

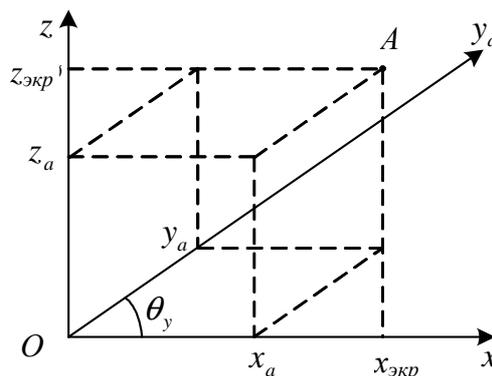


Рис. 2. Связь аксонометрических и экранных координат

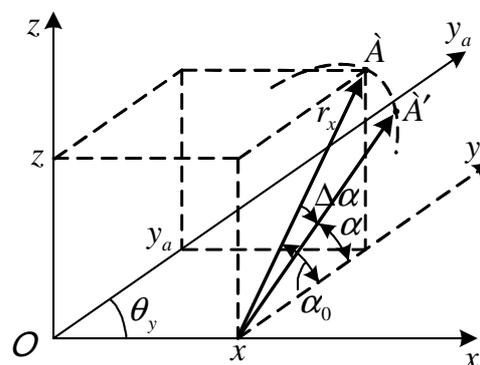


Рис. 3. Поворот относительно оси x

Поворот относительно оси y . Поворот произвольной точки A в пространстве относительно оси y (y_a) будет происходить в плоскости $x'z'$ (рис. 4) по окружности с радиусом

$$r_y = \sqrt{x^2 + z^2}, \quad (9)$$

где x, z – действительные координаты положения рассматриваемой точки в пространстве.

Обозначим для точки A угол наклона радиуса r_y по отношению к горизонтальной плоскости (к оси x') через β_0 . Величина этого угла находится с помощью зависимости

$$\beta_0 = \arcsin \frac{z}{r_y} \quad (10)$$

и с использованием соотношений (6), в которых r_x нужно заменить на r_y .

После поворота точки на угол $\Delta\beta$ (рис. 4) положение радиуса r_y будет определяться углом

$$\beta = \beta_0 - \Delta\beta, \quad (11)$$

а действительные координаты нового положения точки A (точки A') будут равны:

$$\begin{aligned} x_\beta &= r_y \cos \beta = \sqrt{x^2 + z^2} \cdot \cos \beta; & y_\beta &= y; \\ z_\beta &= r_y \sin \beta = \sqrt{x^2 + z^2} \cdot \sin \beta. \end{aligned} \quad (12)$$

Подставив в (3) это выражение вместо x, y, z , получим экранные координаты точки A , повернутой вокруг оси y по отношению к предыдущему положению на угол $\Delta\beta$.

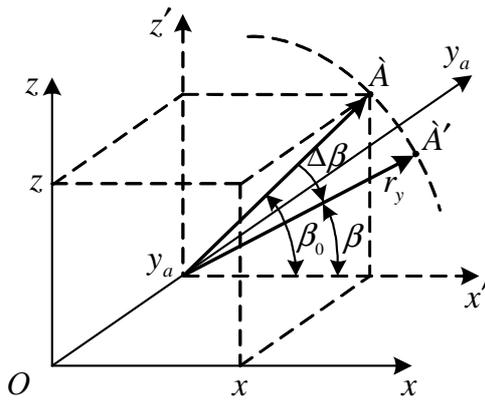


Рис. 4. Поворот относительно оси y

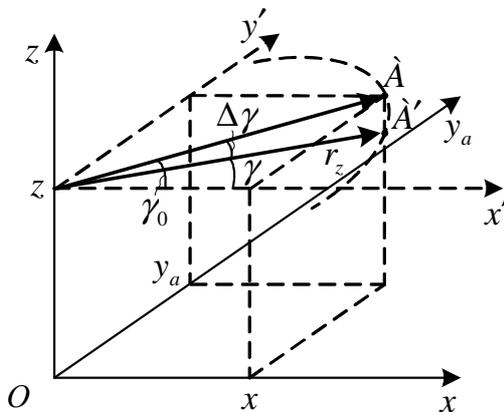


Рис. 5. Поворот относительно оси z

Поворот относительно оси z . Поворот рассматриваемой произвольной точки A в пространстве относительно оси z (рис. 5) будет происходить в плоскости $x' y'$ по окружности с радиусом

$$r_z = \sqrt{x^2 + y^2}, \quad (13)$$

где x, y , – действительные координаты положения точки A в пространстве.

Обозначим угол наклона радиуса r_z для точки A по отношению к вертикальной плоскости (к оси x') через γ_0 . Величина этого угла находится с помощью зависимости

$$\gamma_0 = \arcsin \frac{y}{r_z} \quad (14)$$

и с использованием соотношений (6), в которых z нужно заменить на y , а r_x – на r_z .

После поворота точки A на угол $\Delta\gamma$ (рис. 5) положение радиуса r_z будет определяться углом

$$\gamma = \gamma_0 - \Delta\gamma, \quad (15)$$

а действительные координаты нового положения точки будут равны:

$$\begin{aligned} x_\gamma &= r_z \cos \gamma = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \cos \gamma; \\ y_\gamma &= r_z \sin \gamma = \sqrt{x^2 + y^2} \cdot \sin \gamma; & z_\gamma &= z. \end{aligned} \quad (16)$$

Подставляя полученные выражения в (3) вместо x, y, z , получим экранные координаты точки A , повернутой вокруг оси z на угол $\Delta\gamma$ относительно предыдущего положения.

Комбинируя полученные зависимости, можно получить положение точек в пространстве при любых их поворотах относительно осей x, y и z , представленное в аксонометрической проекции на плоскость. Соединив эти точки прямыми отрезками, получим пространственную стрелковую систему в аксонометрической проекции. Например, на рис. 6, 7 представлены куб и пирамида и их вид при поворотах на заданные углы.

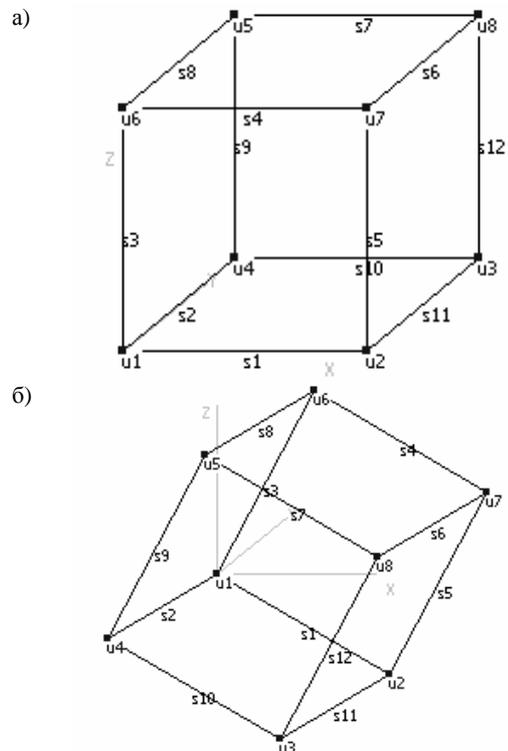


Рис. 6. Поворот куба

- а) исходное состояние;
- б) поворот вокруг оси x на 40° по час. стрелке, вокруг оси y на 40° против час. стрелки и вокруг оси z на 30° против час. стрелки

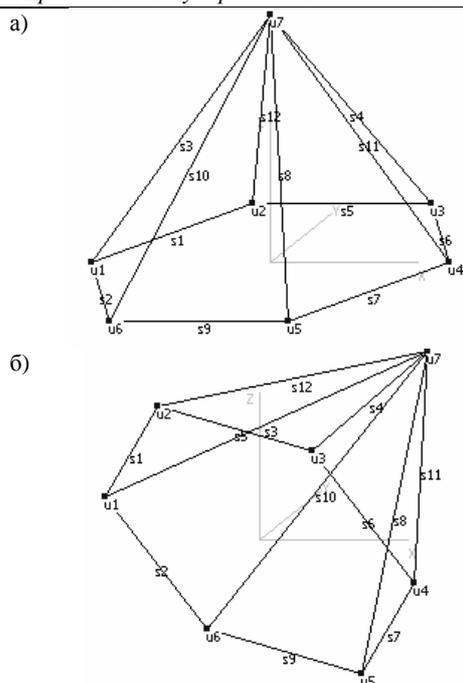


Рис. 7. Поворот пирамиды

а) исходное состояние;

б) поворот вокруг оси x на 30° против час. стрелки, вокруг оси u на 30° против час. стрелки и вокруг оси z на 50° против час. стрелки

Заключение. В работе получены зависимости и разработан алгоритм, позволяющие представить пространственную стержневую систему в аксонометрической проекции на плоскость, масштабировать это изображение и моделировать вращение системы вокруг осей x , u и z пространственной декартовой системы координат.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Будасов, Б.В. Строительное черчение: учебник для вузов / Б.В. Будасов, В.П. Каминский – М.: Стройиздат, 1990. – 464 с.
2. Игнатюк, В.И. Метод конечных элементов в расчетах стержневых систем: учебное пособие / В.И. Игнатюк. – Брест, 2004. – 172 с.
3. Игнатюк, В.И. Об учете упругой податливости узловых соединений в расчетах методом конечных элементов пространственных стержневых систем / В.И. Игнатюк, А.Ю. Игнатов // Вестник БрГТУ. – 2004. – № 1(25): Строительство и архитектура. – С. 118–122.

Статья поступила в редакцию 13.03.2007

УДК 629.113.004.67:658.2

Трифонов А.В.

АНАЛИЗ МАТЕМАТИЧЕСКИХ МОДЕЛЕЙ И МЕТОДОВ ОПТИМИЗАЦИИ РАЗМЕЩЕНИЯ И ОРГАНИЗАЦИИ ПРОИЗВОДСТВА В СФЕРЕ ТЕХНИЧЕСКОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ И РЕМОНТА АВТОМОБИЛЕЙ

Введение

Системное представление производства технического обслуживания и ремонта автомобилей позволяет четко выделить две стадии его проектирования: макропроектирование, т.е. функционально-структурное образование системы из ее элементов – АРП, СТОА, диагностических станций, и инженерное проектирование отдельных предприятий. Первая стадия – обоснование сети предприятий – определяет важнейшие параметры структуры производства ТО и Р автомобилей: специализацию, размеры и территориальное размещение отдельных элементов.

Применение математических методов для обоснования структуры производства имеет целью учесть влияние большого числа факторов и на этой основе, сопоставляя всю совокупность возможных вариантов, найти наиболее оптимальный из них, что связано с решением задач, относящихся к классу экстремальных.

Классификацию математических моделей оптимизации размещения и организации производства в сфере технической эксплуатации автомобилей необходимо осуществлять по ряду признаков.

Выделяют два типа задач оптимизации — **безусловные** и **условные**. Безусловная задача оптимизации состоит в отыскании глобального максимума или минимума целевой функции, определяемой выбранным критерием качества, и решается с использованием методов дифференциального исчисления. Условные задачи оптимизации, или задачи с ограничениями, подразумевают наличие некоторых условий (ограничения),

которые задаются совокупностью некоторых функций, удовлетворяющих уравнениям или неравенствам.

Существующие безусловные задачи [1,2,3] ввиду сложности решения имеют небольшую размерность и позволяют оптимизировать моделируемую систему по небольшому числу параметров. Так, разработанная в [1] математическая модель оптимизирует автосервисную систему централизованного диагностирования автомобилей на региональных диагностических комплексах (РДК) по плечу подачи автомобилей на РДК (оптимальному радиусу размещения подразделений автосервиса). В качестве критерия выбрана совокупность приведенных затрат на выявление одного диагностического воздействия, включающая затраты на подачу автомобилей к РДК, затраты от простоя автомобилей в ожидании проверки и непосредственно затраты на выполнение диагностического воздействия. В развернутом виде функция цели имеет вид:

$$F = \frac{1.237 \cdot C_{об} \cdot L_{д}}{\pi \cdot L_{к}^2 \cdot \gamma \cdot L_{г}} + C_{к} \cdot L_{к} + \frac{C_{а} \cdot L_{д} \cdot T_{р}}{\pi \cdot L_{к}^2 \cdot \gamma \cdot L_{г}}, \quad (1)$$

где $C_{об}$ – стоимость диагностического оборудования, руб.;

$L_{д}$ – периодичность диагностирования, км;

$L_{к}$ – плечо подачи автомобилей на РДК, км;

γ – плотность распределения автомобилей на территории региона радиуса $L_{к}$ (принята равномерной по всей площади), авт./км²;

Трифонов Александр Викторович, ассистент кафедры технической эксплуатации автомобилей БНТУ. Беларусь, Белорусский национальный технический университет, 220027, г. Минск, пр. Ф.Скорины, 65.