В заключение необходимо отметить, что построение моделей с использованием нейронных сетей для прогнозирования показателей работы предприятий представляется эффективным и своевременным в современных условиях функционирования рынка.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Грищенко О.В. Анализ и диагностика финансово-хозяйственной деятельности предприятия: Учебное пособие. -Таганрог: Изд-во ТРТУ, 2000-112с.
2. Ежов А.А., Шумский С.А. Нейрокомпьютинг и его применения в экономике и бизнесе. – М.: 1998- 216с.
3. Тихонов Э.И. Методы прогнозирования в условиях рынка: учебное пособие.-Невинномысск, 2006-221с.
4. Головач Э.П. Коммерческие риски в строительстве: Курс лекций. – Брест: изд.БГТУ, 2003-168с.
5. Rumelhart D., Hinton G., Williams R. Learning internal representations by error propagation // Parallel Distributed Processing. – 1986. – Vol. 1. – P. 318 - 362.
6. Медведев В.С., Потемкин В.Г. Нейронные сети. MATLAB 6.-М.: Диалог-МИФИ, 2002-496с.
7. Головко В.А. Нейронные сети: обучение, организация и применение. Кн. 4: Учеб. пособие для вузов / Общая ред. А.И. Галушкина. – М.: ИПРЖР, 2001. – 256 с.
8. Головко В.А. Нейроинтеллект: теория и применение. Книга 1: Организация и обучение нейронных сетей с прямыми и обратными связями. – Брест Изд.БПИ, 1999-264с.

Статья поступила в редакцию 13.03.2007

УДК 372.800.26.046.14

Шуть В.Н., Иванюк Д.С., Свирский В.М., Теленкевич Р.С.

ЭВРИСТИЧЕСКИЕ АЛГОРИТМЫ ОПРЕДЕЛЕНИЯ ИЗОМОРФИЗМА ГРАФОВ

1. Введение

Многие практические задачи приводят к необходимости распознавания изоморфизма сложных структур, которые могут быть заданы в форме матриц или графов. С содержательной точки зрения изоморфизм структур означает тождественность их функционирования, что приводит в некоторых случаях к возможности замены одной структуры другой, ей изоморфной. Однако для распознавания изоморфизма применяется алгоритм полного перебора, что делает проблему изоморфизма практически нерешимой уже при сравнительно небольшом количестве элементов данной структуры.

В данной работе будут предложены одни из возможных методов, ведущих в некоторых случаях к существенному сокращению перебора при решении данной задачи.

2. Постановка задачи

Пусть $G = (X, F)$ и $H = (Y, P)$ - два произвольных графа. Напомним, что графы G и H называются изоморфными, если множества X и Y эквивалентны (имеет место $X \subseteq Y$ и $Y \subseteq X$) и для любых $x \in X$ и $y \in Y$, которые поставлены во взаимно однозначное соответствие, выполняется Fx эквивалентно Py.

Легко видеть, что для распознавания изоморфизма графов G и H, которые имеют n вершин, требуется в общем случае выполнить $n!$ попарных сравнений. Из приведенных оценок числа сравнений видно, что уже при относительно небольшом количестве элементов в графах (около 100) решение задачи об изоморфизме методом полного перебора невозможно даже с помощью новейших вычислительных машин.

На рисунке 1 изображены изоморфные графы.

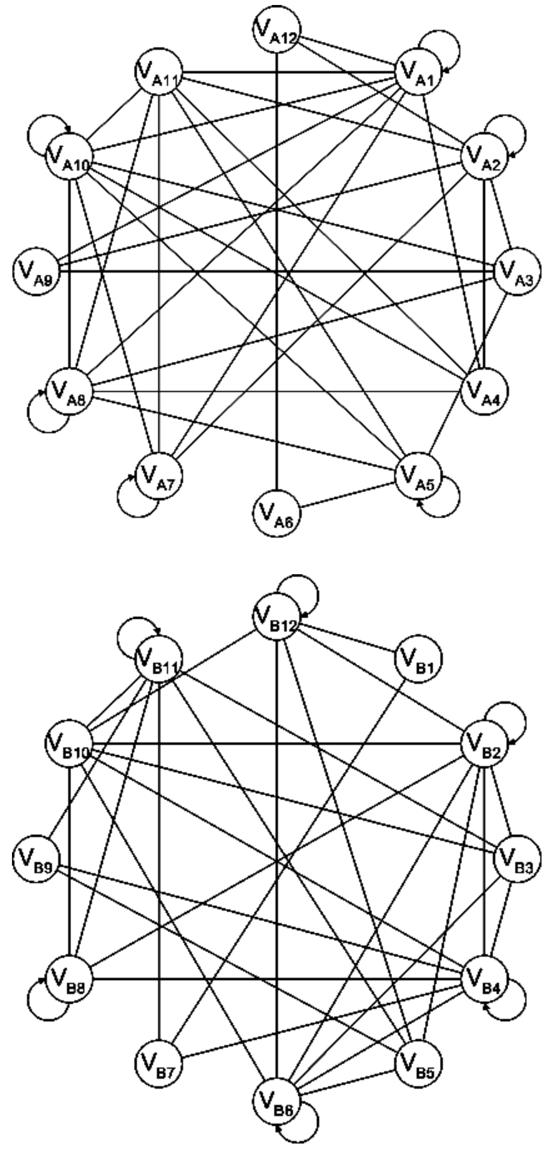

Рис. 1. *Изоморфные графы* G_A *и* G_B

3. Существующие методы установления изоморфизма

Метод анализа вектора степеней вершин

Очевидно, что графы с разным количеством вершин не могут быть изоморфны.

Суть алгоритма следующая: необходимо, зафиксировав порядок вершин первого графа (например, отсортировав по количеству вершин), переставлять вершины второго до тех пор, пока мы не получим искомый изоморфизм. Перебор упрощается тем, что изоморфными могут быть только вершины одного веса (с одинаковой схемой количества входящих и исходящих ребёр).

Иванюк Дмитрий Сергеевич, *магистрант БрГТУ.*
Теленкевич Р.С., *студент 3-го курса ИИ кафедры интеллектуальных информационных технологий БрГТУ.*
Беларусь, Брестский государственный технический университет, 224017, г. Брест, ул. Московская 267.

Графы будут изоморфны тогда и только тогда, когда из одной матрицы инцидентности можно получить другую перестановкой (перенумерацией) вершин.

Метод поиска с возвратом

Этот подход используется при построении алгоритма установления изоморфизма ориентированных графов в монографии [1, с.398].

Предположим, что нам даны два ориентированных графа $G_X = (V_X, E_X)$ и $G_Y = (V_Y, E_Y)$ и требуется выяснить, изоморфны ли они. Мы полагаем, что $V_X = V_Y = \{1,2,...,n\}$, ибо если $|V_X| \neq |V_Y|$, то графы не могут быть изоморфными.

Пусть один из ориентированных графов, скажем G_X, выбран в качестве эталона. Пусть $G_X(k)$ - подграф графа G_X, индуцируемый вершинами $\{1,2,...,k\}$, $0 \le k \le n$. Ясно, что $G_X(0)$ - пустой подграф и $G_X(1)$ - подграф, состоящий из единственной вершины 1 и не содержащий ребер.

При определении того, изоморфны ли графы G_X и G_Y, используем технику поиска с возвращением.

Очевидно, $G_X(0)$ изоморфен пустому подграфу G_Y. Предположим, что на некотором шаге найден подграф G_Y, состоящий из вершин S, принадлежащих V_Y, который изоморфен $G_X(k)$.

Попытаемся продолжить изоморфизм на $G_X(k+1)$, выбирая вершину v, принадлежащую $V_Y - S$, соответствующую $k+1$ из V_X.

Если такая вершина v найдена, то зафиксируем соответствие $f_{k+1} \leftarrow v$ и попытаемся продолжить изоморфизм на $G_X(k+2)$.

Если такой вершины не существует, то возвращаемся в $G_X(k-1)$ и пытаемся выбрать другую вершину, соответствующую k из V_X.

Этот процесс продолжается до тех пор, пока не будет найден изоморфизм между $G_X(n) = G_X$ и G_Y, в противном случае возвращаемся к $G_X(0)$, заключив, что графы G_X и G_Y неизоморфны.

Метод сравнения порядков смежности

Обозначим матрицу смежности вершин графа G как $A(G)$. Обозначим суть алгоритма.

Вычисляется $A^2(G_i)$ для $i = 1,2$. Затем переставляются строки и столбцы $A^2(G_1)$ и $A^2(G_2)$ так, чтобы элементы на главной диагонали оказались в нисходящем порядке.

Если G_1 и G_2 изоморфны и все диагональные элементы различны, то при этой перестановке должны получиться идентичные матрицы.

Если нет, то данные два графа не могут быть изоморфными.

Если матрицы идентичны, то можно продолжить проверку с $A^3(G_i), A^4(G_i), ..., A^k(G_i)$ для $i = 1,2$. Значение k определяется имеющимся бюджетом машинных ресурсов. Если все из проверенных матриц совпадают, то весьма правдоподобно, но не обязательно истинно, что G_1 и G_2 изоморфны.

4. Предлагаемые методы

Метод кластеризации

Основан на методе анализа вектора степеней вершин. Дальнейшее сокращение вариантов предлагаем производить следующим образом:

1. В результате сортировки обоих графов по убыванию степени вершин выделяются кластеры – вершины с одинаковым весом. Если анализировать связи каждой вершины с целыми кластерами, то можно еще существенно сократить количество вариантов перебора, т.к. если какая то вершина соединена с кластером определенным количеством ребер, то и изоморфная ей вершина с однотипным кластером будет связана таким же количеством ребер. Суть идеи наглядно изображена на рисунке 2.

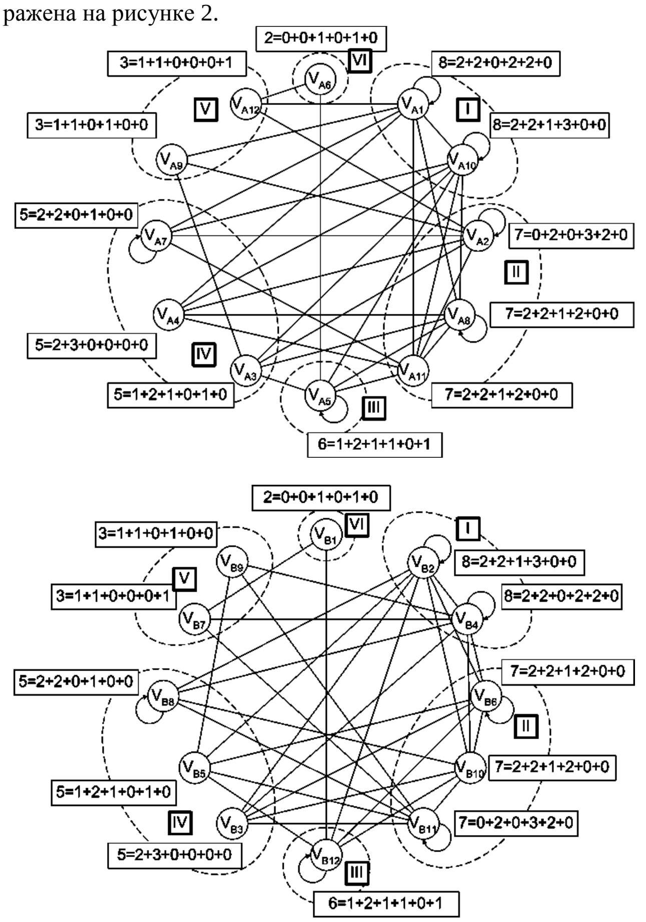

Рис. 2. *Графы G_A и G_B после сортировки и анализа связей между вершинами и кластерами*

2. Если найдено однозначное соответствие вершин графов, то множество вершин графа разбивается на два подмножества: вершины с однозначным соответствием, вершины с многозначным соответствием. Продолжим сокращение вариантов перебора при помощи анализа связей между этими двумя подмножествами. На рисунке 3 показаны возможные соответствия вершин, многозначные соответствия выделены. Многозначные соответствия проверяются полным перебором. На рисунках 4 и 5 показана проверка соответствий. Пунктиром выделены несовпадения (лишние ребра). По количеству «лишних» ребер можно судить о мере неточности изоморфизма.

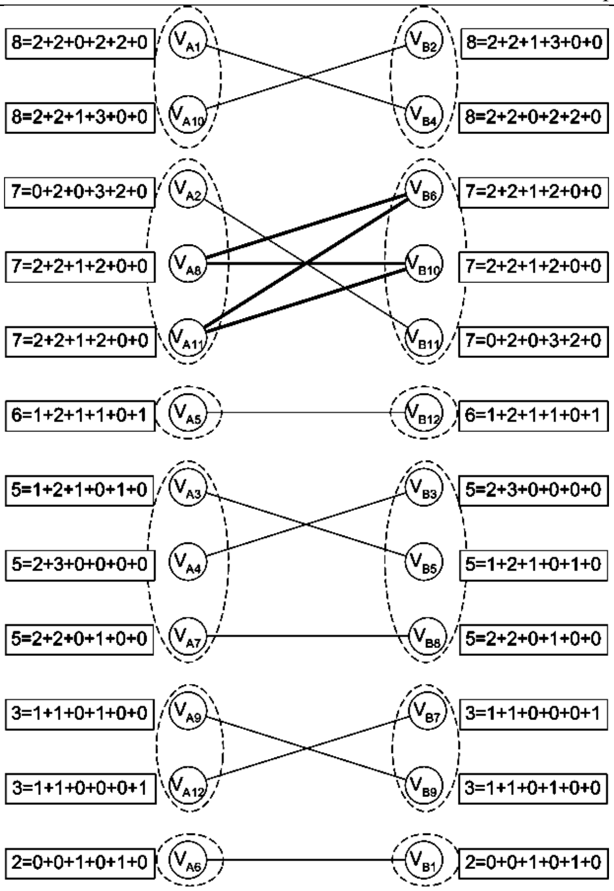

Рис. 3. *Варианты соответствия вершин*

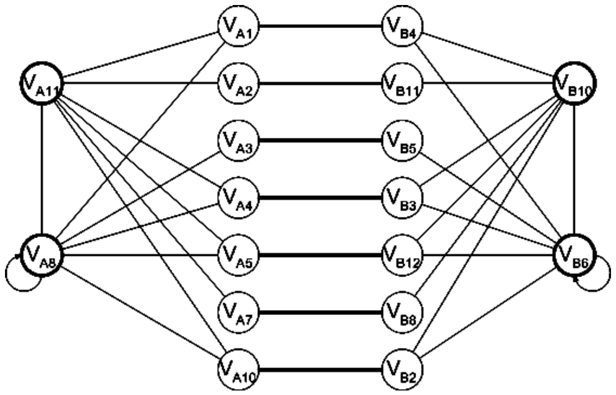

Рис. 4. *Пример удачного соответствия*

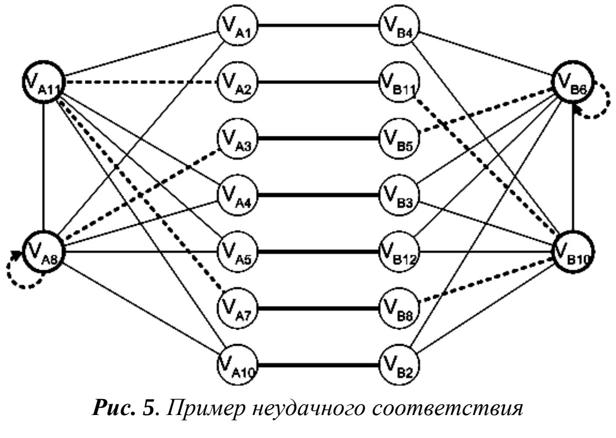

Рис. 5. *Пример неудачного соответствия*

Данный метод распознавания изоморфизма удобен для реализации на ПЭВМ и дает хорошие результаты на больших графах. Метод абсолютно неприменим для регулярных графов (для них необходимо рассматривать связи вершин и долей).

Алгоритм диагонализации

Теорема (без доказательства)

Два и более регулярных изоморфных графа имеют идентичные матрицы смежности вершин при условии обработки этих матриц алгоритмом диагонализации.

Алгоритм диагонализации (описание 1)

Пусть имеются два регулярных графа заданных матрицами смежности вершин. Будем сортировать столбцы и строки поочередно в соответствии с правилом: т. к. матрица смежности состоит из 0 и 1 (для неориентированных графов), то столбцы и строки можно рассматривать как двоичные числа соответственно со старшими разрядами в вершине столбца и в левой части строки. Первыми ставятся те столбцы (строки), у которых значения этих чисел больше. После перестановки числа пересчитываются.

Алгоритм работает до тех пор, пока перестановки возможны.

Алгоритм диагонализации (описание 2)

Пусть имеются два регулярных графа заданных матрицами смежности вершин. Будем сортировать столбцы и строки поочередно в соответствии с правилом: сравнивая столбцы сверху вниз (строки – слева направо), первыми ставятся те, у которых на месте 1 во втором столбце (строке) в соответствующем разряде стоит 0.

Алгоритм работает до тех пор, пока перестановки возможны.

Алгоритм диагонализации также применим к ориентированным графам (при этом считается, что матрица смежности вершин состоит из 0,1, и –1), для этого знак «-» не учитывается (т.е. фактически рассматривается неориентированный граф-аналог).

Алгоритм диагонализации так же может быть применен для установления изоморфизма произвольных графов. Для этого в матрице смежности вершин предварительно выделяют и сортируют вершины одинаковой мощности, пересечение этих столбцов дает квадратные матрицы, которые и подвергаются обработке алгоритмом диагонализации. При равенстве этих матриц графы являются изоморфными.

СПИСОК ЦИТИРОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Гэри М., Джонсон Д. Вычислительные машины и труднорешаемые задачи // М.: Мир, 1982.
2. Цветкович Д. и др. Спектры графов. Теория и применение // Киев: Наукова думка, 1984.
3. Кикина А.Ю., Файзуллин Р.Т. Алгоритм проверки изоморфности графов // деп. ВИНИТИ 21.06.95 1789-В95.
4. Беллман Р. Введение в теорию матриц // Москва: Наука, 1976.
5. Мелихов А.Н., Карелин В.П. Методы распознавания изоморфизма и изоморфного вложения четких и нечетких графов. – М.: Мир, 1995.
6. Рейнгольд Э., Нивергельт Ю., Део Н.- Комбинаторные алгоритмы. Теория и практика.- М.: Мир, 1980.
7. Нечепуренко М.И., Попков В.К., Майнагашев С.М. и др.- Алгоритмы и программы решения задач на графах и сетях. - Новосибирск, Наука (сибирское отделение), 1990.
8. Мелихов А.Н.- Ориентированные графы и конечные автоматы. – Москва, «Наука», 1971.

Статья поступила в редакцию 07.12.2006