

**Таблица 2.** Фактор оптического ограничения  $\Gamma$  и пороговые условия генерации с использованием резонаторов на естественных гранях структуры и с применением брэгговского зеркала оптически накачиваемых полупроводниковых лазеров на квантоворазмерных структурах InGaN/GaN, выращенных на сапфировых подложках на длине волны излучения 530 нм.

Толщина GaN, а нм	Концентрация Al, x %	Толщина GaN, b нм	Толщина AlGaIn, c нм	$\Gamma$	$\alpha$ , см <sup>-1</sup>	$\alpha_{\text{брэгг}}$ , см <sup>-1</sup>
50	25	475	585	0,0886	160,06	81,17
	30	485	525	0,0892	158,62	80,44
	35	490	465	0,0894	158,18	80,22
	40	495	430	0,0898	157,32	79,78
75	25	345	550	0,1085	124,81	63,33
	30	355	485	0,1089	124,07	62,96
	35	365	455	0,1097	122,92	62,38
	40	370	405	0,1097	122,83	62,34
100	25	270	520	0,1205	109,41	55,54
	30	280	465	0,1212	108,53	55,10
	35	285	415	0,1214	108,14	54,90
	40	295	385	0,1219	107,60	54,63

них за счет рассогласования решеток AlGaIn/GaN. Что приводит к резкому увеличению количества дислокаций с увеличением концентрации алюминия и, как следствие, к уменьшению квантового выхода излучательной рекомбинации.

Применение данной геометрии структуры для лазеров, излучающих в синей и зеленой областях спектра, приводит к увеличению толщины структуры на 120-155 нм в случае зеленых лазеров. При этом у синих лазеров фактор оптического ограничения примерно на 1% выше, а пороговый коэффициент усиления на 10-15 см<sup>-1</sup> ниже, чем у зеленых.

#### ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Проведены расчеты максимального фактора оптического ограничения и пороговых условий генерации оптически накачиваемых лазеров на основе квантоворазмерных гетероструктур InGaIn/GaN, выращенных на сапфировых подложках, излучающих в синей и зеленой областях в зависимости от толщины слоев GaN вокруг ям и слоя AlGaIn, расположенного под ямами. А также от концентрации Al в слое AlGaIn. Показано, что применение данной геометрии несимметричного волновода приводит к увеличению фактора оптического ограничения до 12% в случае зеленого лазера и 13% в случае

синего. Также показано, что применение в резонаторе брэгговского зеркала позволяет существенно (примерно в 2 раза) снизить порог генерации лазерных структур.

#### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. M. J. Bergmann and H. C. Casey, Jr. Optical-field calculations for lossy multiple-layer Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>N/In<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>N laser diodes // J. Appl. Phys., 1998, v. 84, №3, p. 1196-1203.
2. М. Адамс. Введение в теорию оптических волноводов/ Москва, 1984.
3. H. C. Casey, Jr. and M. B. Panish. Heterostructure Lasers, Quantum Electronics Principles and Applications /Academic, New York, 1978, part A.
4. U. Ozgur, G. Webb-Wood, H.O.Everitt, F.Yun, H.Morkoc. Systematic measurement of Al<sub>x</sub>Ga<sub>1-x</sub>N refractive indices // Appl. Phys. Lett. (2001), 79, №25, p. 4103–4105.
5. Н.П. Тарасюк, А.А. Гладышук, Е.В. Луценко. Фактор оптического ограничения и пороговые условия генерации оптически накачиваемых полупроводниковых лазеров на квантоворазмерных структурах InGaIn/GaN, выращенных на кремниевых подложках// Вестник БГТУ. Физика, математика, химия. – 2002. – №5<sub>(17)</sub>. – С. 8-13.

УДК 531

**Кандилян Г.С., Прокопья А.Н., Чопчиц Н.И.**

### КЛАССИЧЕСКАЯ РЕДУКЦИЯ СТРУННОЙ ТОМОГРАФИИ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКИ-СИММЕТРИЧНОГО ГРАВИТАЦИОННОГО ПОЛЯ В НЕРЕЛЯТИВИСТСКОМ ПРЕДЕЛЕ

Хорошо известно, что теория струн оказывается весьма эффективной в квантовой теории поля [1]. Основой для построения струнных моделей обычных полевых теорий является изучение распространения пробной струны на фоне полей данной теории, рассматриваемых как внешние или фоновые по отношению к струне. Такой метод изучения полей называется струнной томографией или преобразованием Радона [2]. Струнная томография оказывается значительно более универсальным методом изучения полей по сравнению с томографией, основанной на изучении движения пробных частиц, особенно в случае нелинейности полевых уравнений [3]. Пред-

ставляет интерес вариант классической (неквантовой) редукции струнной томографии для гравитационного поля, ибо важнейшим отличием гравитационного поля от всех остальных полей является, в соответствии с принципом эквивалентности, универсальность отношения заряда к массе для всех пробных частиц. Именно это и приводит, даже в неквантовом пределе, к описанию гравитационного поля на языке геометрии и порождает хорошо известные и до сих пор нерешенные проблемы в общей теории относительности и конкурирующих теориях. Как первый шаг в этом направлении, рассмотрим нерелятивистский предел неквантовой струнной томо-

**Кандилян Генрик Сергеевич**, доцент кафедры физики Брестского государственного технического университета.  
**Чопчиц Николай Игнатьевич**, доцент кафедры физики Брестского государственного технического университета.  
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

графии для сферически-симметричного гравитационного поля, причем ограничимся вначале достаточно содержательным вариантом незамкнутой нерелятивистской струны без внутренних степеней свободы. На рис. 1 показана геометрия ситуации: начало условно неподвижной системы координат  $(O, x, y, z)$  с ортами  $\vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z$  находится в центре гравитирующей массы  $M$  со сферически симметричным распределением,  $\vec{r}_c$  – радиус-вектор центра инерции  $C$  струны длиной  $l$  и массой  $m$  (рассматривается внешняя задача, т.е.  $r_c$  больше радиуса гравитирующей массы);  $\alpha, \theta$  – углы между осями  $x$  и  $z$  и струной соответственно ( $Cx'' \parallel Ox, Cz'' \parallel Oz$ ); система координат  $(C, x', y', z')$  выбрана так, что оси  $Cx'$  и  $Cy'$  расположены в плоскости, проходящей через струну и начало координат  $O$ , причем ось  $Ox'$  направлена вдоль  $OC$ ; система координат  $(C, \zeta, \eta, z')$  выбрана также в указанной плоскости, но ось  $C\eta$  направлена вдоль струны, а угол  $\varphi$  – угол между осями  $Cx'$  и  $C\zeta$ . Плоскость рисунка 2 совмещена с плоскостью, проходящей через начало координат  $O$  и струну.

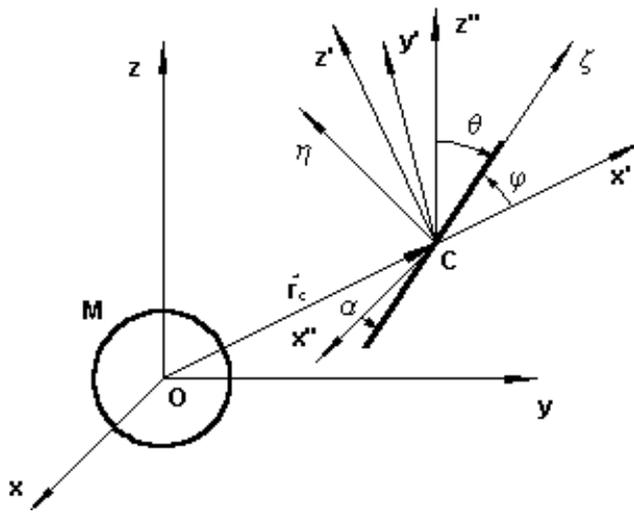


Рис. 1.

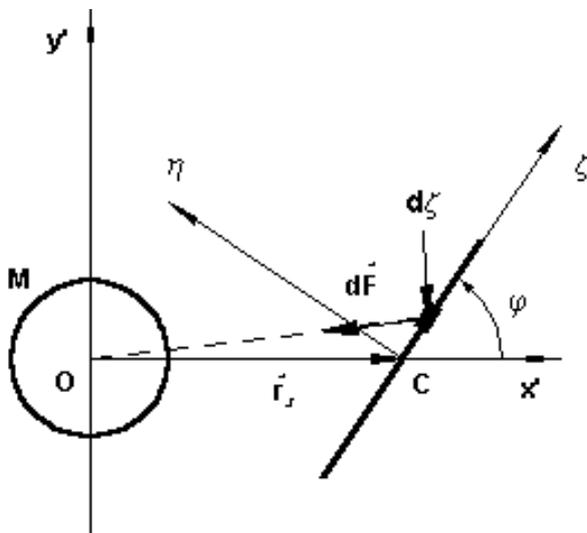


Рис. 2.

Для элемента струны  $d\zeta$  с координатой  $\zeta \in \left(-\frac{l}{2}, \frac{l}{2}\right)$  сила взаимодействия с гравитирующей массой  $M$  равна ( $G$  – ньютонова гравитационная постоянная)

$$dF = G \frac{mM}{l} \frac{d\zeta}{(r_c + \zeta \cos \varphi)^2 + (\zeta \sin \varphi)^2}.$$

Проекции суммарной силы, действующей на струну, на оси системы координат  $(C, x', y', z')$  имеют вид:

$$F_{x'} = -G \frac{mM}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{(r_c + \zeta \cos \varphi) d\zeta}{((r_c + \zeta \cos \varphi)^2 + (\zeta \sin \varphi)^2)^{3/2}},$$

$$F_{y'} = -G \frac{mM}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{\zeta \sin \varphi d\zeta}{((r_c + \zeta \cos \varphi)^2 + (\zeta \sin \varphi)^2)^{3/2}}, \quad (1)$$

$$F_{z'} = 0.$$

Вектор суммарного момента гравитационных сил, действующих на струну, относительно ее центра инерции имеет следующие компоненты:

$$M_\zeta = 0, \quad M_\eta = 0,$$

$$M_{z'} = G \frac{mM}{l} \int_{-l/2}^{l/2} \frac{r_c \zeta \sin \varphi d\zeta}{((r_c + \zeta \cos \varphi)^2 + (\zeta \sin \varphi)^2)^{3/2}}. \quad (2)$$

При этом, очевидно, имеют место равенства:

$$\cos \varphi = (x_c \cos \alpha + y_c \cos \beta + z_c \cos \theta) / r_c,$$

$$r_c = (x_c^2 + y_c^2 + z_c^2)^{1/2},$$

$$\cos \beta = (1 - \cos^2 \alpha - \cos^2 \theta)^{1/2},$$

выражающие угол  $\varphi$  через обобщенные координаты  $(x_c, y_c, z_c, \alpha, \theta)$ , соответствующие пяти степеням свободы струны.

Для получения уравнений движения струны относительно исходной системы координат запишем выражения для ортов  $\vec{e}_{x'}, \vec{e}_{y'}, \vec{e}_{z'}$  через орты исходной системы координат, учтя, что

$$\vec{e}_{z'} = \frac{\vec{r}_c \times \vec{l}}{r_c l \sin \varphi}, \quad \vec{e}_{y'} = \vec{e}_{z'} \times \vec{e}_{x'},$$

где  $\vec{l} = l(\cos \alpha \vec{e}_x + \cos \beta \vec{e}_y + \cos \theta \vec{e}_z)$ . Получим

$$\vec{e}_{x'} = (x_c \vec{e}_x + y_c \vec{e}_y + z_c \vec{e}_z) / r_c,$$

$$\vec{e}_{y'} = \frac{1}{r_c^2 \sin \varphi} \left( (z_c^2 \cos \alpha - z_c x_c \cos \theta - x_c y_c \cos \beta + y_c^2 \cos \alpha) \vec{e}_x + \right.$$

$$\left. + (x_c^2 \cos \beta - y_c x_c \cos \alpha - z_c y_c \cos \theta + z_c^2 \cos \beta) \vec{e}_y + \right.$$

$$\left. + (y_c^2 \cos \theta - z_c y_c \cos \beta - z_c x_c \cos \alpha + x_c^2 \cos \theta) \vec{e}_z \right),$$

$$\vec{e}_{z'} = \frac{1}{r_c \sin \varphi} \left( (y_c \cos \theta - z_c \cos \beta) \vec{e}_x + (z_c \cos \alpha - x_c \cos \theta) \vec{e}_y + \right.$$

$$\left. + (x_c \cos \beta - y_c \cos \alpha) \vec{e}_z \right). \quad (3)$$

Тогда уравнения движения центра масс струны запишутся в виде:

$$m\ddot{x}_c = F_x A_{x'x} + F_y A_{y'x},$$

$$m\ddot{y}_c = F_x A_{x'y} + F_y A_{y'y},$$

$$m\ddot{z}_c = F_x A_{x'z} + F_y A_{y'z}, \quad (4)$$

где выражения для  $F_{x'}$ ,  $F_{y'}$  имеют вид (1), а буквой  $A$  с соответствующими индексами для краткости обозначены элементы матрицы перехода между соответствующими базами, который в краткой записи имеет вид  $\vec{e}_{i'} = A_{i'k} \vec{e}_k$ , и которые выписаны в (3). Уравнения вращательного движения в системе координат  $(C, \zeta, \eta, z')$  имеют вид:

$$\frac{d\Omega_\zeta}{dt} = 0, \quad \frac{d\Omega_\eta}{dt} = 0, \quad \frac{d\Omega_{z'}}{dt} = \frac{12}{ml^2} M_{z'}, \quad (5)$$

где  $M_{z'}$  дается выражением (2), а  $\Omega_{z'} = \frac{d\varphi}{dt}$ . Если описывать вращение струны в проекциях вектора  $\vec{\Omega}$  угловой скорости на оси системы координат  $(O, x, y, z)$ , то аналогично (4) имеем:

$$\begin{aligned} \Omega_x &= \Omega_{x'} B_{x'x} + \Omega_{y'} B_{y'x} + \Omega_{z'} B_{z'x}, \\ \Omega_y &= \Omega_{x'} B_{x'y} + \Omega_{y'} B_{y'y} + \Omega_{z'} B_{z'y}, \\ \Omega_z &= \Omega_{x'} B_{x'z} + \Omega_{y'} B_{y'z} + \Omega_{z'} B_{z'z}, \end{aligned} \quad (6)$$

где матрица  $B_{i'j}$  получается из матрицы  $A_{k'm}$  путем умножения на матрицу перехода от системы координат  $(C, x', y', z')$  к системе  $(C, \zeta, \eta, z')$ , имеющую очевидный вид. После дифференцирования (6) и использования (5) получаются явные уравнения вращательного движения относительно осей системы координат  $(O, x, y, z)$ , которые в силу их громоздкости выписывать не будем. Аналогичным обра-

зом могут быть получены уравнения вращательного движения, явно учитывающие наличие двух вращательных степеней свободы, т.е. уравнения, определяющие  $\frac{d^2\alpha}{dt^2}$  и  $\frac{d^2\theta}{dt^2}$ .

Для этого достаточно спроектировать вектор  $\vec{\Omega}$  на оси, перпендикулярные плоскостям, проходящим через струну и оси  $Cx''$  и  $Cz''$  соответственно. Ввиду громоздкости получаемых выражений мы их также выписывать не будем. Приближение пробной струны получается при использовании в (1)-(6) разложений в ряд по  $(\zeta/r_c)$  и предположения  $(\zeta/r_c)^2 \ll 1$ . В силу сложности и громоздкости получаемых выражений их анализ и извлечение следствий из них возможны только с использованием систем компьютерной алгебры. Применению системы *Mathematica* для анализа движения пробной струны без внутренних степеней свободы в сферически-симметричном поле в нерелятивистском и неквантовом пределе будут посвящены последующие работы.

**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. А.Ю. Морозов. Теория струн // Успехи физич. наук.– 1992. – Т.162, № 8. – С.83-176.
2. A. Morozov. Integrable Systems and Double-Loop Algebras in String Theory // Mod. Phys. Ser. A. – 1991. – V.6, № 16. – P. 1525-1532.
3. A. Polyakov. Self-tuning Fields and Resonant Correlations in 2D Gravity // Mod. Phys. Lett. Ser. A. –1991. – V.6. – P. 635.

УДК 53.035

**Гладышук А.А., Чопциц Н.И., Чугунов С.В.**

**ЗАДАЧИ ПЯТОГО УРОВНЯ В ТЕСТАХ ПО ФИЗИКЕ**

В задачах 5-го уровня рассматриваются достаточно сложные варианты взаимодействия идей и представлений курса физики, причем сложности могут вносить как технический (в смысле необходимости проведения достаточно деликатных и громоздких математических выкладок преобразований), так и концептуальный характер. Сначала, в качестве примера, рассмотрим задачу 5-го уровня из пробного тестирования 2004 г, а затем из тестов, предлагавшихся в 2004 году для поступающих на специальности “Системы и сети”, “Искусственный интеллект” электронно-механического факультета.

**Условие задачи 1.** Две подвижные горки одинаковой массы  $M$  могут без трения скользить по горизонтальной опоре. С левой горки соскальзывает шайба массой  $m$  с высоты  $H$ . Пренебрегая трением, определить, на какую максимальную высоту поднимается шайба на правой горке (рис. 1).

**Решение.**

Одна из основных проблем, которая возникает при решении подобных задач – определение способа решения, т.е. как выбрать из множества законов такие, использование которых приведет к желаемому результату. Так, применение второго закона Ньютона в данной задаче нерационально, т.к. неизвестен профиль горки и использование этого закона приводит к сложным математическим расчетам, о которых учащиеся узнают только в высшей школе. Необходимо догадаться, что

её целесообразно решать с помощью законов сохранения, которые справедливы в рамках этой задачи, т.к. отсутствует трение и нет неконсервативных сил. Заметим, в силу того, что горки не связаны друг с другом, задачу следует решать в два этапа: первый этап состоит в определении, скорости шайбы в конечный момент соскальзывания с левой горки (она же начальная скорость при въезде на правую горку); второй этап – рассмотрение движения шайбы по правой горке, т.е. нахождение искомой величины.

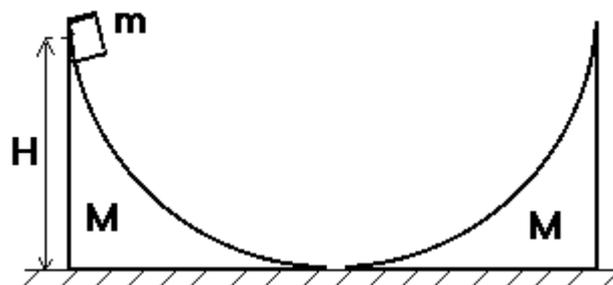


Рис. 1.

**Первый этап.** Пусть при спуске шайбы с правой горки тела приобретают относительно земли скорости  $\vec{V}_1$  и  $\vec{u}$  (рис. 2).

Запишем закон сохранения импульса, учтя, что в начальный момент система находилась в покое:

*Чугунов С.В., ассистент кафедры физики Брестского государственного технического университета. Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.*