корректно разрешимо на $R(T_s^*)$.

**Утверждение 9.** Если уравнение $Tu = f$ нормально разрешимо, то уравнение $T_s^* v = h$ замкнуто разрешимо, т.е. $R(T_s^*) = \overline{R\left(T_s^*\right)}$.


**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Пархимович И.В. Дифференциальные уравнения 8, №8, 1972.
2. Коваленко С.П. ДАН Укр. ССР, сер. А, №11, 1973.
3. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве 1971.


УДК 517.9

***Макарук С.Ф.***

# КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ДИЗАЙНА НЕОГРАНИЧЕННОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА В СЛУЧАЕ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

**Введение**

В статье рассматривается задача оптимального дизайна, которая заключается в расположении включений в материале таким образом, чтобы материал в целом имел экстремальную проводимость в заданном направлении. Задача оптимального дизайна состоит в отыскании таких характеристик включений, при которых материал в целом (или, другими словами, однородный материал, эквивалентный данному неоднородному) имеет максимальное (минимальное) значение какого-нибудь из его физических параметров.

**1. Постановка задачи оптимального дизайна**

Приведем точную постановку задачи. Дана область $Q$ на расширенной комплексной плоскости $\mathbf{C}\cup\infty$. Эта область разбивается на две части $D^- := \operatorname{int} L$ и $D^+ := ext\, L$ некоторой неизвестной кривой $L$. Предположим, что $D^-$ состоит из конечного числа непересекающихся компонент, а $L$ - из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова. Пусть $g(z)$ - заданная функция, аналитическая в $Q$, и фиксированная константа $\rho$ удовлетворяет следующему неравенству $|\rho| < 1$. Требуется найти Кривую $L$ и кусочно-аналитическую функцию $\varphi(z)$, непрерывную в замыкании соответствующих областей, при условии, что предельные значения $\varphi(z)$ на $L$ удовлетворяют соотношениям

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) + \rho\overline{\varphi^-(t)} + g(t), t \in L, \tag{1}$$

доставляющие изменяющейся компоненте функционала эффективной проводимости максимальное (или минимальное) значение

$$\sigma := \int_L \operatorname{Re}\varphi^-(t)dy \to \max(\min), t = x + iy, \tag{2}$$

в предположении, что площадь области $D^-$ фиксирована.

Данная задача имеет различные интерпретации, одна из которых рассматривается ниже.

**2. Решение задачи**

Рассмотрим важный с токи зрения механики композиционных материалов случай, когда $g(z) \equiv z$ в случае включений произвольной формы. Это означает, что потенциал внешнего поля тождественно равен $x$ (например, в случае теплового поля нагревание происходит в направлении оси $OX$). В этом случае краевое условие (1) имеет вид

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) + \rho\overline{\varphi^-(t)} + t, t \in L. \tag{1'}$$

Решаем задачу (1') методом малого параметра. Представим функции $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ в следующем виде

$$\begin{gathered}\varphi^+(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varphi^{(j)+}(z), \rho \to 0,\\ \varphi^-(z) = \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varphi^{(j)-}(z), \rho \to 0.\end{gathered} \tag{3}$$

При достаточно малых $\rho$ ограничимся первыми $(n+1)$ членами ряда. Подставим (3) в (1'), получим

$$\begin{gathered}\varphi^{(0)-}(t) + \rho\varphi^{(1)-}(t) + \rho^2\varphi^{(2)-}(t) =\\ = \varphi^{(0)+}(t) + \rho\varphi^{(1)+}(t) + \rho^2\varphi^{(2)+}(t) -\\ -\rho\overline{(\varphi^{(0)-}(t) + \rho\varphi^{(1)-}(t))} - t + O(\rho^3)\end{gathered}$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях $\rho$, получим каскад задач:

$$\begin{aligned}&\varphi^{(0)+}(t) = \varphi^{(0)-}(t) - t, t \in L\\ &\varphi^{(1)+}(t) = \varphi^{(1)-}(t) - \overline{\varphi^{(0)-}(t)}, t \in L\\ &\varphi^{(2)+}(t) = \varphi^{(2)-}(t) - \overline{\varphi^{(1)-}(t)}, t \in L\\ &\dots\\ &\varphi^{(n)+}(t) = \varphi^{(n)-}(t) - \overline{\varphi^{(n-1)-}(t)}, t \in L.\end{aligned} \tag{4}$$

Опишем процедуру решения данного каскада задач. Решаем первую задачу (4): $\varphi^{(0)+}(t) = \varphi^{(0)-}(t) - t, t \in L$. Это задача о скачке, которую следует решать в классе функций, исчезающих на бесконечности. Ее решение имеет вид: $\varphi^{(0)+}(z) = 0, \varphi^{(0)-}(z) = z.$

Решаем вторую задачу (4), подставляя $\varphi^{(0)-}(z)$:

$$\varphi^{(1)+}(t) = \varphi^{(1)-}(t) - \bar{t}, t \in L.$$

Решение имеет вид $\varphi^{(1)}(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\bar{\tau}}{\tau - z} d\tau.$ Подставляя $\varphi^{(1)}(z)$ в (4), получим:

***Макарук Светлана Федоровна,*** *к.физ.-мат.н., доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
*Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.*

$$\varphi^{(2)+}(t)=\varphi^{(2)-}(t)-\lim_{z\to t,z\in D^-}\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar\tau}{\tau-z}d\tau},t\in L. \quad (5)$$

По формулам Сохоцкого

$$\lim_{z\to t,z\in D^-}\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar\tau}{\tau-z}d\tau}=\overline{\frac{1}{2}\bar t+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar\tau}{\tau-z}d\tau}=$$

$$=\frac{1}{2}t+\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar\tau}{\tau-t}d\tau}.$$

Тогда (5) эквивалентно следующей задаче

$$\varphi^{(2)+}(t)=\varphi^{(2)-}(t)-\left[\frac{1}{2}t+\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar\tau}{\tau-t}d\tau}\right],t\in L.$$

Отсюда

$$\varphi^{(2)}(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left[\frac{1}{2}\tau+\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\tau_1}}{\tau_1-z}d\tau_1}\right]\cdot\frac{1}{\tau-z}d\tau,z\in D^{\pm}.$$

Учитывая предыдущие вычисления, имеем:

$$\varphi^+(z)=\rho\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar\tau}{\tau-z}d\tau+$$

$$+\rho^2\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{1}{\tau-z}d\tau\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\tau_1}}{\tau_1-\tau}d\tau_1}+O(\rho^3),$$

$\rho\to 0,z\in D^+$,

$$\varphi^-(z)=z+\rho\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar\tau}{\tau-z}d\tau+$$

$$+\rho^2\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{1}{\tau-z}d\tau\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\tau_1}}{\tau_1-\tau}d\tau_1}+O(\rho^3),$$

$\rho\to 0,z\in D^-$.

Для вычисления изменяющейся компоненты функционала эффективной проводимости $\sigma$ необходимо найти граничные значения всех минусовых компонент решения каскада задач и подставить их в формулу (2).

$$\sigma=\frac{1}{|D^-|}\int_L\mathrm{Re}\left[\varphi^{(0)-}(t)+\rho\varphi^{(1)-}(t)+\rho^2\varphi^{(2)-}(t)+O(\rho^3)dy\right],$$

$t=x+iy$.

Вычисляя $\varphi^{(j)-}(t)$, имеем:

$$\varphi^{(0)-}(t)\equiv t,\varphi^{(1)-}(t)=\frac{1}{2}\bar t+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar\tau}{\tau-t}d\tau,$$

$$\varphi^{(2)-}(t)=\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{\overline{\tau_1}}{\tau_1-t}d\tau_1+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{1}{\tau-t}d\tau\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\tau_1}}{\tau_1-\tau}d\tau_1}.$$

Тем самым получаем, что

$$\sigma=1+\frac{\rho}{|D^-|}\left[\sum_{k=1}^n\mu_{1,k}+\rho\sum_{k=1}^n\mu_{2,k}+O(\rho^2)\right],\rho\to 0, \quad (6)$$

где

$$\mu_{1,k}=\int_{L_k}\mathrm{Re}\varphi^{(1)-}(t)dy=\int_{L_k}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{2}\bar t+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\bar\tau}{\tau-t}d\tau\right]dy,$$

$$\mu_{2,k}=\int_{L_k}\mathrm{Re}\varphi^{(2)-}(t)dy=$$

$$=\int_{L_k}\mathrm{Re}\left[\frac{1}{4\pi i}\int_L\frac{\overline{\tau_1}}{\tau_1-t}d\tau_1+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{1}{\tau-t}d\tau\overline{\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\overline{\tau_1}}{\tau_1-\tau}}\right]dy.$$

Полученное представление содержит в себе некоторые геометрические характеристики области, по которым должна быть проведена оптимизация. К сожалению, эти характеристики представлены в формуле (6) неявным образом, и поэтому решение задачи в общем виде является затруднительным.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Гахов Ф. Д. Краевые задачи. – 3-е изд. – М.:Наука, 1977. – 640 с.
2. Аткинсон Ф. Дискретные и непрерывные граничные задачи.–М.:Мир, 1968. – 749 с.
3. Лаврентьев М. А., Шабат Б. В. Методы теории функций комплексного переменного. – М.: Наука, 1973. – 716 с.
4. Кристенсен Р. М. Введение в механику композитов. – М.: Мир, 1982. – 334 с.


УДК 5:378

***Тузик А.И.***

# АКТИВНОЕ ИЗУЧЕНИЕ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ СТУДЕНТАМИ ТЕХНИЧЕСКИХ ВУЗОВ

Многими авторами справедливо утверждается, что *одним из главных и важнейших элементов в обучении* является *систематическая самостоятельная работа* (см., например, [1–4] и приведенную там библиографию).

В учебно-методических [5, 6] и учебных [7, 8] пособиях для студентов инженерно-технических специальностей ВУЗов (с соответствующими грифами Министерства образования Республики Беларусь), написанными авторами на основе многократно прочитанных курсов лекций, отдельные вопросы и теоремы сформулированы в виде *теоретических упражнений* (ТУ), предлагаемых студентам *для самостоятельного изучения*.

Возможность проведения пусть небольших, но *самостоятельных исследований* повышает интерес части студентов к изучению высшей математики и, на наш взгляд, является одним из элементов *активного обучения*, в дополнение к различным методам и приемам активизации обучаемых, контроля усвоения и оценки их знаний, приведенным в [9–11].

Наличие в лекционном курсе ТУ может рассматриваться как один из аспектов *учебно-исследовательской работы сту-*

***Тузик Альфред Иванович,*** *к.физ.-мат.н., профессор кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
*Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.*