УДК 517.948.34

***Пархимович И.В.***

# НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ОПЕРАТОРНЫХ И ИМ S-СОПРЯЖЁННЫХ УРАВНЕНИЙ

Понятие $\boldsymbol{s}$-сопряжённого оператора $\boldsymbol{T}_s^*$ в гильбертовом пространстве введено в моей работе [1] и определяется равенством

$$(\boldsymbol{Tu}, \boldsymbol{v}) = (\boldsymbol{Su}, \boldsymbol{T}_s^* \boldsymbol{v}), \ \forall\ u \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}) \tag{1}$$

Смысл введения этого нового понятия – $\boldsymbol{s}$-сопряженного оператора состоит в том, что нулевые многообразия любого $\boldsymbol{s}$-сопряженного и сопряженного операторов совпадают. А нулевые многообразия играют решающую роль в вопросе нормальной разрешимости данного оператора.

В тоже время построение $\boldsymbol{s}$-сопряжённого оператора можно провести во многих случаях в явном виде, чего нельзя сказать о сопряженном операторе. Например, для оператора, соответствующего краевой задаче для дифференциального уравнения с негладкими коэффициентами, построить сопряжённый оператор в явном виде нельзя, а $\boldsymbol{s}$-сопряжённый оператор строится.

С.П. Коваленко обобщил понятие $\boldsymbol{s}$-сопряжённого оператора на случай произвольного банахова пространства [2]. И определяется оно тем же соотношением (1), где $(\boldsymbol{Tu}, \boldsymbol{v})$ - линейный непрерывный функционал $\boldsymbol{v}$,определённый на $\boldsymbol{Tu}$, а $(\boldsymbol{Su}, \boldsymbol{T}_s^* \boldsymbol{v})$ - функционал $\boldsymbol{T}_s^* \boldsymbol{v}$, определённый на $\boldsymbol{Su}$. С.П. Коваленко обобщил также основное свойство $\boldsymbol{s}$-сопряжённых операторов в гильбертовом пространстве, что нулевое подпространство s-сопряжённого оператора совпадает с аннулятором (ортогональным дополнением) множество значений данного оператора

$$\boldsymbol{N}(\boldsymbol{T}_s^*) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{T})^{\perp}. \tag{2}$$

Выясним некоторые другие свойства данного линейного оператора или, что одно и то же по существу, линейного операторного уравнения

$$\boldsymbol{Tu} = \boldsymbol{f}, \tag{3}$$

действующего из банахова пространства $\boldsymbol{E}$ в банахово пространство $\boldsymbol{F}$ и ему $\boldsymbol{s}$-сопряжённого уравнения

$$\boldsymbol{T}_s^* \boldsymbol{v} = \boldsymbol{h}, \tag{4}$$

действующего из пространства $\boldsymbol{F^*}$ в пространство $\boldsymbol{G^*}$, где $\boldsymbol{G^*}$-сопряжённое пространство к пространству $\boldsymbol{G}$, представляющему пространство, в котором определяется область значений оператора $\boldsymbol{S}$, посредством которого и был определён $\boldsymbol{s}$-сопряжённый оператор $\boldsymbol{T}_s^*$ соотношением (1).

Многие из приводимых здесь свойств представляют обобщение известных свойств сопряжённых операторов [3], другие же представляют свойства, отличные от свойств сопряжённых операторов.

Итак, имеют место следующие утверждения:

**Утверждение 1**. Для того чтобы уравнение (3) было плотно разрешимо, т.е. $\overline{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T})} = \boldsymbol{F}$, необходимо и достаточно, чтобы уравнение (4) было однозначно разрешимо, т.е. $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{T}_s^*) = \boldsymbol{\Theta}$.

Доказательство следует из представления $\overline{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T})} + \boldsymbol{R}(\boldsymbol{T})^{\perp} = \boldsymbol{F}$ и в силу соотношения (2)

$$\overline{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T})} + \boldsymbol{N}(\boldsymbol{T}_s^*) = \boldsymbol{F}. \tag{5}$$

Тогда, если $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{T}_s^*) = \boldsymbol{\Theta}$, то $\overline{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T})} = \boldsymbol{F}$, а это и означает плотную разрешимость уравнения (3).

Наоборот, из плотной разрешимости, т.е. из $\overline{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T})} = \boldsymbol{F}$ из равенства (5) следует, что $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{T}_s^*) = \boldsymbol{\Theta}$, т.е. уравнение (4) однозначно разрешимо и утверждение доказано.

Аналогично доказываются все остальные утверждения.

**Утверждение 2**. Если для операторов $\boldsymbol{T}$ и $\boldsymbol{T}_s^*$, соответствующих уравнениям (3) и (4), справедливо $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{T}_s^*) = \boldsymbol{R}(\boldsymbol{T})^{\perp}$, то ${}^{\perp}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{T}_s^*) = \overline{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T})}$.

**Утверждение 3**. Для того, чтобы уравнение (3) было нормально разрешимым, необходимо и достаточно, чтобы $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T}) = {}^{\perp}\boldsymbol{N}(\boldsymbol{T}_s^*)$, т.е. уравнение (3) нормально разрешимо для тех и только тех правых частей $\boldsymbol{f}$, которые ортогональны множеству решений однородного s-сопряжённого уравнения.

Напомним, что оператор $\boldsymbol{S}$ действует из пространства $\boldsymbol{E}$ в пространство $\boldsymbol{G}$.

**Утверждение 4**. Если уравнение (4) плотно разрешимо, т.е. $\overline{\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T}_s^*)} = \boldsymbol{G^*}$, то $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{T}) \subset \boldsymbol{N}(\boldsymbol{S})$.

Следствие. Для того чтобы уравнение (3) было однозначно разрешимо на $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T})$ достаточно, чтобы уравнение (4) было плотно разрешимо и оператор $\boldsymbol{S}$ был однозначно разрешим. Это вытекает из утверждения 4: полагая $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{\Theta}$, получим $\boldsymbol{N}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{\Theta}$.

Аналогично [3] введено в рассмотрение.

*Определение*. Пусть линейный оператор $\boldsymbol{T}$ действует из пространства $\boldsymbol{E}$ в пространство $\boldsymbol{F}$, а линейный оператор $\boldsymbol{S}$ с $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{S}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{T})$ – из пространства $\boldsymbol{E}$ в пространство $\boldsymbol{G}$. Уравнение $\boldsymbol{Tu} = \boldsymbol{f}$ (или оператор $\boldsymbol{T}$) назовем $\boldsymbol{s}$ – корректно разрешимым, если при $\forall\ u \in \boldsymbol{D}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{D}(\boldsymbol{S})$ справедливо

$$\|\boldsymbol{Su}\|_{\boldsymbol{G}} \le \boldsymbol{\kappa}\, \|\boldsymbol{Tu}\|_{\boldsymbol{F}}, \tag{6}$$

где $\boldsymbol{\kappa} > 0$ и не зависит от u ($\|\ \|$– норма соответствующего оператора).

**Утверждение 5**. Если уравнение $\boldsymbol{Tu} = \boldsymbol{f}$ $\boldsymbol{s}$-корректно разрешимо и уравнение $\boldsymbol{Su} = \boldsymbol{g}$ однозначно разрешимо, то уравнение $\boldsymbol{Tu} = \boldsymbol{f}$ также однозначно разрешимо.

Доказательство следует из соотношения (6).

**Утверждение 6**. Для везде разрешимости уравнения $\boldsymbol{T}_s^* \boldsymbol{v} = \boldsymbol{h}$ необходимо, чтобы уравнение $\boldsymbol{Tu} = \boldsymbol{f}$ было $\boldsymbol{s}$-корректно разрешимым.

**Утверждение 7**. Для везде разрешимости уравнения $\boldsymbol{T}_s^* \boldsymbol{v} = \boldsymbol{h}$ достаточно, чтобы уравнение $\boldsymbol{Tu} = \boldsymbol{f}$ было $\boldsymbol{s}$-корректно разрешимым на $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T})$, а оператор $\boldsymbol{S}$ однозначно разрешим.

**Утверждение 8**. Если уравнение $\boldsymbol{Tu} = \boldsymbol{f}$ везде разрешимо, т.е. $\boldsymbol{R}(\boldsymbol{T}) = \boldsymbol{F}$, то $\boldsymbol{s}$-сопряжённое уравнение $\boldsymbol{T}_s^* \boldsymbol{v} = \boldsymbol{h}$

***Пархимович Игорь Владимирович,*** *к.физ.-мат.н., профессор кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
*Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.*

корректно разрешимо на $R(T_s^*)$.

**Утверждение 9.** Если уравнение $Tu = f$ нормально разрешимо, то уравнение $T_s^* v = h$ замкнуто разрешимо, т.е. $R(T_s^*) = \overline{R\left(T_s^*\right)}$.


**СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ**

1. Пархимович И.В. Дифференциальные уравнения 8, №8, 1972.
2. Коваленко С.П. ДАН Укр. ССР, сер. А, №11, 1973.
3. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве 1971.


УДК 517.9

***Макарук С.Ф.***

# КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ДИЗАЙНА НЕОГРАНИЧЕННОГО КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА В СЛУЧАЕ ВКЛЮЧЕНИЙ ПРОИЗВОЛЬНОЙ ФОРМЫ

**Введение**

В статье рассматривается задача оптимального дизайна, которая заключается в расположении включений в материале таким образом, чтобы материал в целом имел экстремальную проводимость в заданном направлении. Задача оптимального дизайна состоит в отыскании таких характеристик включений, при которых материал в целом (или, другими словами, однородный материал, эквивалентный данному неоднородному) имеет максимальное (минимальное) значение какого-нибудь из его физических параметров.

**1. Постановка задачи оптимального дизайна**

Приведем точную постановку задачи. Дана область $Q$ на расширенной комплексной плоскости $\mathbf{C} \cup \infty$. Эта область разбивается на две части $D^- := \operatorname{int} L$ и $D^+ := ext\, L$ некоторой неизвестной кривой $L$. Предположим, что $D^-$ состоит из конечного числа непересекающихся компонент, а $L$ - из конечного числа простых замкнутых кривых Ляпунова. Пусть $g(z)$ - заданная функция, аналитическая в $Q$, и фиксированная константа $\rho$ удовлетворяет следующему неравенству $|\rho| < 1$. Требуется найти Кривую $L$ и кусочно-аналитическую функцию $\varphi(z)$, непрерывную в замыкании соответствующих областей, при условии, что предельные значения $\varphi(z)$ на $L$ удовлетворяют соотношениям

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) + \rho\overline{\varphi^-(t)} + g(t), t \in L, \qquad (1)$$

доставляющие изменяющейся компоненте функционала эффективной проводимости максимальное (или минимальное) значение

$$\sigma := \int_L \operatorname{Re}\varphi^-(t)dy \to \max(\min), t = x + iy, \qquad (2)$$

в предположении, что площадь области $D^-$ фиксирована.

Данная задача имеет различные интерпретации, одна из которых рассматривается ниже.

**2. Решение задачи**

Рассмотрим важный с токи зрения механики композиционных материалов случай, когда $g(z) \equiv z$ в случае включений произвольной формы. Это означает, что потенциал внешнего поля тождественно равен $x$ (например, в случае теплового поля нагревание происходит в направлении оси $OX$ ). В этом случае краевое условие (1) имеет вид

$$\varphi^+(t) = \varphi^-(t) + \rho\overline{\varphi^-(t)} + t, t \in L. \qquad (1')$$

Решаем задачу (1’) методом малого параметра. Представим функции $\varphi^+(z)$ и $\varphi^-(z)$ в следующем виде

$$\begin{aligned} \varphi^+(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varphi^{(j)+}(z), \rho \to 0, \\ \varphi^-(z) &= \sum_{j=0}^{\infty} \rho^j \varphi^{(j)-}(z), \rho \to 0. \end{aligned} \qquad (3)$$

При достаточно малых $\rho$ ограничимся первыми $(n+1)$ членами ряда. Подставим (3) в (1’), получим

$$\begin{aligned} &\varphi^{(0)-}(t) + \rho\varphi^{(1)-}(t) + \rho^2\varphi^{(2)-}(t) = \\ &= \varphi^{(0)+}(t) + \rho\varphi^{(1)+}(t) + \rho^2\varphi^{(2)+}(t) - \\ &-\rho\overline{(\varphi^{(0)-}(t) + \rho\varphi^{(1)-}(t))} - t + O(\rho^3) \end{aligned}$$

Приравнивая коэффициенты при соответствующих степенях $\rho$, получим каскад задач:

$$\begin{aligned} &\varphi^{(0)+}(t) = \varphi^{(0)-}(t) - t, t \in L \\ &\varphi^{(1)+}(t) = \varphi^{(1)-}(t) - \overline{\varphi^{(0)-}(t)}, t \in L \\ &\varphi^{(2)+}(t) = \varphi^{(2)-}(t) - \overline{\varphi^{(1)-}(t)}, t \in L \\ &\cdots \\ &\varphi^{(n)+}(t) = \varphi^{(n)-}(t) - \overline{\varphi^{(n-1)-}(t)}, t \in L. \end{aligned} \qquad (4)$$

Опишем процедуру решения данного каскада задач. Решаем первую задачу (4): $\varphi^{(0)+}(t) = \varphi^{(0)-}(t) - t, t \in L$. Это задача о скачке, которую следует решать в классе функций, исчезающих на бесконечности. Ее решение имеет вид: $\varphi^{(0)+}(z) = 0, \varphi^{(0)-}(z) = z.$

Решаем вторую задачу (4), подставляя $\varphi^{(0)-}(z)$:
$\varphi^{(1)+}(t) = \varphi^{(1)-}(t) - \bar{t}, t \in L.$

Решение имеет вид $\varphi^{(1)}(z) = \dfrac{1}{2\pi i}\displaystyle\int_L \frac{\bar{\tau}}{\tau - z} d\tau.$ Подставляя $\varphi^{(1)}(z)$ в (4), получим:

***Макарук Светлана Федоровна,*** *к.физ.-мат.н., доцент кафедры высшей математики Брестского государственного технического университета.*
*Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.*