УДК 531

Прокопеня А.Н.

ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦ ЛЯПУНОВА ДЛЯ ЛИНЕЙНОЙ ГАМИЛЬТОНОВОЙ СИСТЕМЫ УРАВНЕНИЙ С ПЕРИОДИЧЕСКИМИ КОЭФФИЦИЕНТАМИ

ВВЕДЕНИЕ

Рассмотрим гамильтонову систему линейных дифференциальных уравнений

$$\frac{dx}{dt} = JH(t)x\,, \qquad (1)$$

где $x^T = (x_1,\ ...,\ x_{2n})$ – $2n$-мерный вектор, компоненты x_k и x_{n+k} которого являются канонически сопряженными координатами и импульсами, $J = \begin{pmatrix} 0 & E_n \\ -E_n & 0 \end{pmatrix}$ – матрица порядка $2n \times 2n$, E_n – единичная матрица порядка $n \times n$, $H(t)$ – вещественная симметрическая периодическая с периодом $T = 2\pi$ матрица-функция порядка $2n \times 2n$, которая представима в виде сходящегося ряда

$$H(t) = H_0 + \varepsilon H_1(t) + \varepsilon^2 H_2(t) + \ldots\,, \qquad (2)$$

где $H_k(t) = H_k(t+T) \quad (k = 1, 2, 3,\ \ldots)$ – непрерывные интегрируемые в промежутке $(0, T)$ матрицы-функции, а ε – малый параметр. К исследованию систем вида (1) приводят многие задачи об устойчивости периодических движений в механике, например, анализ устойчивости равновесных решений в ограниченных эллиптических задачах многих тел [1]. Поскольку найти общее решение системы (1) в конечном виде не представляется возможным, требуется вычислить ее характеристические показатели и построить каноническое преобразование, приводящее систему (1) к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, которая затем сводится к системе n независимых гармонических осцилляторов. С решения этих проблем начинается анализ устойчивости равновесных решений в смысле Ляпунова.

Следует отметить, что в работах [2,3] доказано, что для линейных систем дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами существует преобразование, позволяющее свести их к системам с постоянными матрицами, но механизм построения такого преобразования не приводится. Ряд алгоритмов построения соответствующего преобразования на основе метода итераций предложен в [4]. Однако при рассмотрении системы (1), по-видимому, наиболее эффективным является метод малого параметра Ляпунова-Пуанкаре [5].

В настоящей работе предлагается алгоритм построения канонического преобразования, приводящего (1) к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами, основанный на вычислении матриц преобразования Ляпунова [4]. Несмотря на громоздкие вычисления, алгоритм легко реализуется на компьютере и позволяет вычислить матрицы соответствующего преобразования в виде рядов по малому параметру ε с заданной точностью. С помощью системы Mathematica [6] выполнены вычисления матриц Ляпунова для гамильтоновых систем второго и четвертого порядков, возникающих в ограниченных эллиптических задачах многих тел, с точностью до второго порядка по малому параметру ε.

АЛГОРИТМ ПОСТРОЕНИЯ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ ЛЯПУНОВА

Предположим, что при $\varepsilon = 0$ система (1) имеет различные чисто мнимые характеристические показатели $\lambda_k = \pm i\sigma_k (k = 1, 2,\ ..., n)$, удовлетворяющие неравенству

$$\sigma_j \pm \sigma_k \neq N \quad (j, k = 1, 2,\ ..., n;\ N = 0, \pm1, \pm2,\ \ldots)\,. \qquad (3)$$

Тогда, согласно теореме Флоке-Ляпунова [3,5], фундаментальная матрица системы (1) $X(t, \varepsilon)$ представима в виде

$$X(t, \varepsilon) = Z(t, \varepsilon)e^{tW(\varepsilon)}\,, \qquad (4)$$

где $Z(t+T, \varepsilon) = Z(t, \varepsilon)$ и матрицы-функции

$$Z(t, \varepsilon) = E_{2n} + \varepsilon Z_1(t) + \varepsilon^2 Z_2(t) + \ldots\,,$$
$$W(\varepsilon) = JH_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \ldots \qquad (5)$$

являются аналитическими функциями параметра ε в точке $\varepsilon = 0$. При этом матрицы $X(t, \varepsilon)$ и $Z(t, \varepsilon)$ являются симплектическими и, следовательно, преобразование Ляпунова

$$x(t) = Z(t, \varepsilon)y(t)\,, \qquad (6)$$

является каноническим. С другой стороны, это преобразование приводит систему (1) к системе дифференциальных уравнений с постоянными коэффициентами вида:

$$\frac{dy}{dt} = W(\varepsilon)y\,. \qquad (7)$$

Собственные значения матрицы $W(\varepsilon)$ являются характеристическими показателями системы (1) и определяют поведение ее решений. Матрицы $Z(t, \varepsilon)$ и $W(\varepsilon)$ называются матрицами преобразования Ляпунова.

Поскольку фундаментальная матрица (4) должна удовлетворять уравнению (1), для функции $Z(t, \varepsilon)$ получаем следующее уравнение:

$$\frac{dZ}{dt} = JH(t)Z(t, \varepsilon) - Z(t, \varepsilon)W(\varepsilon)\,. \qquad (8)$$

Подставляя в уравнение (8) разложения (2), (5) и приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях ε, получаем последовательность матричных уравнений:

$$\frac{dZ_k}{dt} = JH_0 Z_k - Z_k W_0 + \sum_{j=1}^{k}(JH_j Z_{k-j} - Z_{k-j}W_j) \qquad (9)$$
$$(k = 1, 2,\ \ldots),$$

где $Z_0 = E_{2n}$, $W_0 = JH_0$. Функции $Z_k(t)$ должны быть периодическими с периодом T и удовлетворять начальным условиям:

$$Z_k(0) = 0 \qquad (k = 1, 2,\ \ldots)\,. \qquad (10)$$

При этом коэффициенты $Z_k(t)$ и W_k в разложениях (5) определяются однозначно.

Решение уравнения (9) ищем в виде:

$$Z_k(t) = e^{tJH_0} Y_k(t)\ e^{-tJH_0}\,. \qquad (11)$$

***Прокопеня Александр Николаевич**, к.ф.-м.н., доцент кафедры физики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

Подставляя (11) в (9), получаем для матриц-функций $Y_k(t)$ следующее дифференциальное уравнение:

$$\frac{dY_k}{dt} = \sum_{j=1}^{k}(e^{-tJH_0}JH_j e^{tJH_0}Y_{k-j} - Y_{k-j}e^{-tJH_0}W_j e^{tJH_0}). \quad (12)$$

Очевидно, начальные условия (10) будут выполнены, если функции $Y_k(t)$ удовлетворяют следующим соотношениям:

$$Y_k(0) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ ...), \quad (13)$$

а $Y_0 = E_{2n}$. Интегрируя (12) с начальными условиями (13), находим:

$$Y_k(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^{k}(e^{-\tau JH_0}JH_j(\tau)e^{\tau JH_0}Y_{k-j}(\tau) - Y_{k-j}(\tau)e^{-\tau JH_0}W_j e^{\tau JH_0})\, d\tau \quad (14)$$

Таким образом, соотношения (11), (14) позволяют вычислять матрицы-функции $Z_k(t)$, удовлетворяющие дифференциальному уравнению (9) и начальным условиям (10). Если потребовать, чтобы функции $Y_k(t)$ кроме начальных условий (13) удовлетворяли также условиям

$$Y_k(T) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ ...), \quad (15)$$

то функции $Z_k(t)$ будут периодическими с периодом T. Действительно, при $k = 1$ соотношение (14) принимает вид:

$$Y_1(t) = \int_0^t (e^{-\tau JH_0}JH_1(\tau)e^{\tau JH_0}Y_0(\tau) - Y_0(\tau)e^{-\tau JH_0}W_1 e^{\tau JH_0})\, d\tau = \int_0^t (e^{-\tau JH_0}JH_1(\tau)e^{\tau JH_0} - e^{-\tau JH_0}W_1 e^{\tau JH_0})\, d\tau. \quad (16)$$

Поскольку коэффициенты $H_k(t)$ в разложении (2) являются периодическими функциями с периодом T, то, с учетом (15), получаем из (16) соотношение

$$Y_1(t+T) = \int_0^{t+T} (e^{-\tau JH_0}JH_1(\tau)e^{\tau JH_0} - e^{-\tau JH_0}W_1 e^{\tau JH_0})\, d\tau = e^{-TJH_0}\int_0^t (e^{-\tau JH_0}JH_1(\tau)e^{\tau JH_0} - e^{-\tau JH_0}W_1 e^{\tau JH_0})\, d\tau\, e^{TJH_0} = e^{-TJH_0}Y_1(t)e^{TJH_0}.$$

Следовательно,

$$Z_1(t+T) = e^{(t+T)JH_0}Y_1(t+T)e^{-(t+T)JH_0} = e^{tJH_0}Y_1(t)e^{-tJH_0} = Z_1(t),$$

то есть функция $Z_1(t)$ является периодической с периодом T. Аналогично доказывается, что соотношение

$$Y_k(t+T) = e^{-TJH_0}Y_k(t)e^{TJH_0}, \quad (17)$$

которое является следствием условия (15) и периодичности коэффициентов $H_k(t)$, обеспечивает выполнение условия периодичности коэффициентов $Z_k(t)$ разложения (5) при $k > 1$. Следует отметить, что соотношения (15) не только обеспечивают периодичность функций $Z_k(t)$, но и являются уравнениями для определения коэффициентов W_k. Таким образом, может быть сформулирована следующая теорема.

Теорема. Пусть при $\varepsilon = 0$ система (1) имеет различные чисто мнимые характеристические показатели $\lambda_k = \pm i\sigma_k$ $(k = 1, 2, \ ..., n)$, удовлетворяющие неравенству

$$\sigma_j \pm \sigma_k \neq N \quad (j, k = 1, 2, \ ..., n; \ N = 0, \pm 1, \pm 2, \ ...). \quad (18)$$

Тогда фундаментальная матрица системы (1) $X(t,\varepsilon)$ представима в виде

$$X(t,\varepsilon) = Z(t,\varepsilon)e^{tW(\varepsilon)}, \quad (19)$$

где матрицы-функции

$$Z(t,\varepsilon) = E_{2n} + \varepsilon Z_1(t) + \varepsilon^2 Z_2(t) + \dots, \qquad W(\varepsilon) = JH_0 + \varepsilon W_1 + \varepsilon^2 W_2 + \dots \quad (20)$$

являются аналитическими матрицами-функциями параметра ε при $\varepsilon = 0$, коэффициенты $Z_k(t)$ определяются из соотношений

$$Z_k(t) = e^{tJH_0}Y_k(t)\, e^{-tJH_0},$$

$$Y_k(t) = \int_0^t \sum_{j=1}^{k}(e^{-\tau JH_0}JH_j(\tau)e^{\tau JH_0}Y_{k-j}(\tau) - Y_{k-j}(\tau)e^{-\tau JH_0}W_j e^{\tau JH_0})\, d\tau \quad (21)$$

причем $Z_k(t+T,\varepsilon) = Z_k(t,\varepsilon)$, а матрицы W_k находятся как решения уравнений

$$Y_k(T) = 0 \qquad (k = 1, 2, \ ...), \quad (22)$$

Таким образом, соотношения (21), (22) позволяют последовательно вычислять коэффициенты $Z_1(t)$, W_1, $Z_2(t)$, W_2, … и тем самым определить матрицы $Z(t,\varepsilon)$ и $W(\varepsilon)$ преобразования Ляпунова.

ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА ВТОРОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим гамильтонову систему второго порядка с матрицей $H(t)$ вида:

$$H(t) = \begin{pmatrix} \dfrac{a + \varepsilon\cos t}{1 + \varepsilon\cos t} & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = H_0 + \sum_{k=1}^{\infty} H_k\varepsilon^k, \quad (23)$$

где

$$H_0 = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad H_k = (-\cos t)^k \begin{pmatrix} a-1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix},$$

а a – некоторый положительный параметр. Уравнения (1) с матрицей (23) описывают возмущенное движение в направлении, перпендикулярном орбитальной плоскости частиц в ограниченных эллиптических задачах многих тел [1]. Ряд (23) сходится в области $|\varepsilon| < 1$, а $H_k(t)$ – непрерывные, периодические с периодом $T = 2\pi$ матрицы-функции. Поэтому матрица Ляпунова $Z(t,\varepsilon)$ может быть найдена в виде разложения (20), сходящегося в области $|\varepsilon| < 1$, коэффициенты которого определяются соотношениями (21), (22). Заметим, что матрицы $e^{\pm tJH_0}$ могут быть вычислены точно и имеют вид:

$$e^{\pm tJH_0} = \begin{pmatrix} \cos(t\sqrt{a}) & \pm\dfrac{1}{\sqrt{a}}\sin(t\sqrt{a}) \\ \mp\sqrt{a}\sin(t\sqrt{a}) & \cos(t\sqrt{a}) \end{pmatrix}.$$

Выполняя вычисления по формулам (21), (22) с точностью до второго порядка по ε, получаем:

$$Z_1=\begin{pmatrix} -\dfrac{2(a-1)}{4a-1}\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right) & -\dfrac{2(a-1)}{4a-1}\sin t \\ \dfrac{1-3a+2a^2}{4a-1}\sin t & \dfrac{2(a-1)}{4a-1}\sin^2\left(\dfrac{t}{2}\right) \end{pmatrix},$$

$$Z_2=\begin{pmatrix} -\dfrac{\sin^2(t/2)}{2(4a-1)^2}(-4+13a-26a^2+8a^3 & -\dfrac{8(a-1)^2-(-2+7a+4a^2)\cos t}{4(4a-1)^2} \\ +a(5-22a+8a^2)\cos t) & \\ -\dfrac{\sin t}{4(4a-1)^2}(4(a-1)^2(2a-1)+ & -\dfrac{\sin^2(t/2)}{2(4a-1)^2}(-8+27a-18a^2+8a^3+ \\ +a(8-37a+20a^2)\cos t) & +(-4+19a-14a^2+8a^3)\cos t) \end{pmatrix}.$$

При этом

$$W_1=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{2(a-1)}{4a-1} \\ \dfrac{2a(a-1)}{4a-1} & 0 \end{pmatrix},$$

$$W_2=\begin{pmatrix} 0 & \dfrac{10-23a+4a^2}{4(4a-1)^2} \\ -\dfrac{3a(4-13a+12a^2)}{4(4a-1)^2} & 0 \end{pmatrix}.$$

Характеристические показатели системы (1), определяемые как собственные значения матрицы $W(\varepsilon)=JH_0+\varepsilon W_1+\varepsilon^2 W_2$, находим в виде разложения по степеням ε:

$$\lambda_{1,2}=\pm i\sqrt{a}\left(1+\frac{3(a-1)}{4(4a-1)}\varepsilon^2\right). \qquad (24)$$

Следует подчеркнуть, что представление фундаментальной матрицы в виде (19) возможно только при условии, что при $\varepsilon=0$ характеристические показатели системы удовлетворяют неравенству (18). Действительно, в рассмотренном случае системы второго порядка второе слагаемое в разложении (20) обращается при $a=\dfrac{1}{4}$ в бесконечность. Однако в этой точке характеристические показатели системы (1) при $\varepsilon=0$ равняются $\lambda_{1,2}=\pm i/2$, и неравенство (18) не выполняется. Следовательно, полученные выражения для коэффициентов $Z_1(t)$, W_1, $Z_2(t)$, W_2 справедливы только в случае $a\neq\dfrac{1}{4}$. При этом характеристические показатели системы остаются различными и чисто мнимыми при $\varepsilon>0$, что соответствует выводам общей теории линейных дифференциальных уравнений с периодическими коэффициентами [5].

ГАМИЛЬТОНОВА СИСТЕМА ЧЕТВЕРТОГО ПОРЯДКА

Рассмотрим гамильтонову систему четвертого порядка с гамильтонианом вида:

$$H(t)=\begin{pmatrix} \dfrac{1-2a+b+4\varepsilon\cos t}{1+\varepsilon\cos t} & 0 & 0 & -2 \\ 0 & \dfrac{a-b}{1+\varepsilon\cos t} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}= \qquad (25)$$

$$=H_0+\sum_{k=1}^{\infty}H_k\varepsilon^k,$$

где

$$H_0=\begin{pmatrix} 1-2a+b & 0 & 0 & -2 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -2 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix},$$

$$H_k=(-\cos t)^k\begin{pmatrix} -3-2a+b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-b & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

a и b – некоторые положительные параметры. Уравнения (1) с матрицей (25) описывают возмущенное движение в орбитальной плоскости частиц в ограниченных эллиптических задачах многих тел [1]. Ряд (25) сходится в области $|\varepsilon|<1$, а $H_k(t)$ – непрерывные периодические с периодом $T=2\pi$ матрицы-функции. Поэтому матрица Ляпунова $Z(t,\varepsilon)$ может быть найдена в виде разложения (20), сходящегося в области $|\varepsilon|<1$, коэффициенты которого определяются соотношениями (21), (22). Для упрощения расчетов сначала выполняем каноническое преобразование, приводящее матрицу H_0 к диагональному виду. Алгоритм построения такого преобразования описан, например, в [7]. В результате получаем:

$$H_0=\begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -\sigma_2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \sigma_1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\sigma_2 \end{pmatrix},$$

$$H_k=(-\cos t)^k\begin{pmatrix} h_{11} & h_{12} & 0 & 0 \\ h_{12} & h_{22} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & h_{33} & h_{34} \\ 0 & 0 & h_{34} & h_{44} \end{pmatrix},$$

где

$$\sigma_{1,2}=\frac{1}{\sqrt{2}}\left(1-a\pm\sqrt{1+10a+9a^2-12b-12ab+4b^2}\right)^{1/2},$$

$$h_{11}=\sigma_1(a-b-\sigma_2^2)/(\sigma_1^2-\sigma_2^2),$$

$$h_{22}=\sigma_2(a-b-\sigma_1^2)/(\sigma_1^2-\sigma_2^2),$$

$$h_{33}=-\sigma_1(3+2a-b+\sigma_2^2)/(\sigma_1^2-\sigma_2^2),$$

$$h_{44}=-\sigma_2(3+2a-b+\sigma_1^2)/(\sigma_1^2-\sigma_2^2),$$

$$h_{12}=2\sqrt{\sigma_1\sigma_2(b-a)}/(\sigma_1^2-\sigma_2^2),$$

$$h_{34} = -2\sqrt{\sigma_1\sigma_2(3+2a-b)}/(\sigma_1^2-\sigma_2^2).$$

Теперь матрицы $e^{\pm tJH_0}$ легко могут быть записаны в явном виде:

$$e^{\pm tJH_0} = \begin{pmatrix} \cos(\sigma_1 t) & 0 & \pm\sin(\sigma_1 t) & 0 \\ 0 & \cos(\sigma_2 t) & 0 & \mp\sin(\sigma_2 t) \\ \mp\sin(\sigma_1 t) & 0 & \cos(\sigma_1 t) & 0 \\ 0 & \pm\sin(\sigma_2 t) & 0 & \cos(\sigma_2 t) \end{pmatrix}.$$

Выполняя вычисления по формулам (21), (22) с точностью до первого порядка по ε, находим матрицы $Z(t,\varepsilon) = E_4 + \varepsilon Z_1(t)$ и $W(\varepsilon) = JH_0 + \varepsilon W_1$. Их компоненты имеют вид:

$$Z_{11} = 1 - \varepsilon\frac{2\sigma_1(h_{11}-h_{33})}{4\sigma_1^2-1}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right),$$

$$Z_{12} = -Z_{43} = -\frac{2\varepsilon}{S}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)(h_{12}\sigma_1(\sigma_1^2-\sigma_2^2-1) -$$
$$-h_{34}\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2^2+1)),$$

$$Z_{13} = \varepsilon\frac{h_{33}-2\sigma_1^2(h_{11}+h_{33})}{4\sigma_1^2-1}\sin t,$$

$$Z_{14} = Z_{23} = \varepsilon\frac{\sin t}{S}(h_{34}(\sigma_1^2+\sigma_2^2-1)-2h_{12}\sigma_1\sigma_2),$$

$$Z_{21} = -Z_{34} = \frac{2\varepsilon}{S}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right)(h_{34}\sigma_1(\sigma_1^2-\sigma_2^2-1) -$$
$$-h_{12}\sigma_2(\sigma_1^2-\sigma_2^2+1)),$$

$$Z_{22} = 1 + \varepsilon\frac{2\sigma_2(h_{22}-h_{44})}{4\sigma_2^2-1}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right),$$

$$Z_{24} = \varepsilon\frac{h_{44}-2\sigma_2^2(h_{22}+h_{44})}{4\sigma_2^2-1}\sin t,$$

$$Z_{31} = -\varepsilon\frac{h_{11}-2\sigma_1^2(h_{11}+h_{33})}{4\sigma_1^2-1}\sin t,$$

$$Z_{32} = Z_{41} = -\varepsilon\frac{\sin t}{S}(h_{12}(\sigma_1^2+\sigma_2^2-1)-2h_{34}\sigma_1\sigma_2),$$

$$Z_{33} = 1 + \varepsilon\frac{2\sigma_1(h_{11}-h_{33})}{4\sigma_1^2-1}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right),$$

$$Z_{42} = -\varepsilon\frac{h_{22}-2\sigma_2^2(h_{22}+h_{44})}{4\sigma_2^2-1}\sin t,$$

$$Z_{44} = 1 - \varepsilon\frac{2\sigma_2(h_{22}-h_{44})}{4\sigma_2^2-1}\sin^2\left(\frac{t}{2}\right),$$

$$W_{13} = \sigma_1 + \varepsilon\frac{2(h_{11}-h_{33})}{4\sigma_1^2-1}\sigma_1^2,$$

$$W_{31} = -\sigma_1 + \varepsilon\frac{2(h_{11}-h_{33})}{4\sigma_1^2-1}\sigma_1^2,$$

$$W_{24} = -\sigma_2 + \varepsilon\frac{2(h_{22}-h_{44})}{4\sigma_2^2-1}\sigma_2^2,$$

$$W_{42} = \sigma_2 + \varepsilon\frac{2(h_{22}-h_{44})}{4\sigma_2^2-1}\sigma_2^2,$$

$$W_{14} = W_{23} = \varepsilon\frac{2h_{12}\sigma_1\sigma_2 - h_{34}S_{12}}{S},$$

$$W_{32} = W_{41} = \varepsilon\frac{h_{12}S_{12} - 2h_{34}\sigma_1\sigma_2}{S}, \qquad (26)$$

$$W_{11} = W_{12} = W_{21} = W_{22} = W_{33} = W_{34} = W_{43} = W_{44} = 0,$$

где

$$S_{12} = \sigma_1^4 + \sigma_2^2(-1+\sigma_2^2) - \sigma_1^2(1+2\sigma_2^2),$$

$$S = (\sigma_1+\sigma_2-1)(\sigma_1+\sigma_2+1)(\sigma_1-\sigma_2-1)(\sigma_1-\sigma_2+1)$$

Заметим, что представление матриц $Z(t,\varepsilon)$ и $W(\varepsilon)$ в виде (26) возможно лишь в том случае, если выполняются неравенства

$$\sigma_1 \neq \pm 1/2,\ \sigma_2 \neq \pm 1/2,\ \sigma_1 \neq \pm\sigma_2,\ \sigma_1 \pm \sigma_2 \neq \pm 1. \qquad (27)$$

Это условие соответствует требованиям сформулированной выше теоремы, так как неравенства (27) являются частными случаями неравенства (18). Вычисление собственных значений матрицы $W(\varepsilon)$ показывает, что в первом порядке по ε они не изменяются и остаются равными $\lambda_{1,2} = \pm i\sigma_1$, $\lambda_{3,4} = \pm i\sigma_2$. В заключение отметим, что вычисления матриц Ляпунова для гамильтоновой системы четвертого порядка в более высоких порядках по ε очень громоздки, и поэтому мы их здесь не приводим.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. A.N. Prokopenya. Studying stability of the equilibrium solutions in the restricted many-body problems // P.Mitic, Ph.Ramsden, J.Carne (Eds.). Challenging the boundaries of symbolic computation: Proc. of the 5th International *Mathematica* Symposium. – London, Imperial College Press, 2003. – P.105-112.
2. А.М. Ляпунов. Общая задача об устойчивости движения / Под ред. Мюнтц Г. – Череповец: Меркурий-Пресс, 2000. – 386 с.
3. Н.П. Еругин. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами.– Мн.: Изд-во АН БССР, 1963. – 272 с.
4. Е.А. Гребеников, Ю.А. Митропольский, Ю.А. Рябов. Введение в резонансную аналитическую динамику. – М.: Янус-К, 1999. – 320 с.
5. В.А. Якубович, В.М. Старжинский. Линейные дифференциальные уравнения с периодическими коэффициентами и их приложения. – М.: Наука, 1972. – 720 с.
6. S. Wolfram. The Mathematica book. 4th ed. Wolfram Media/Cambridge University Press, 1999. – 1470 p.
7. А.П. Маркеев. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – 312 с.