УДК 519.85

О ДВУХ УСЛОВИЯХ ДЛЯ ВЫЯВЛЕНИЯ НЕСУЩЕСТВЕННЫХ ОГРАНИЧЕНИЙ В ЗАДАЧЕ ЛИНЕЙНОГО ПРОГРАММИРОВАНИЯ

Степанова Т.В.
УО «Гродненский государственный университет имени Янки Купалы», г. Гродно
Научный руководитель – Цехан О.Б., доцент, канд. физ.-мат. наук

Модели линейного программирования часто используются для решения производственных задач. Для реальных объектов размерность модели может быть очень велика, что усложняет решение задачи. В связи с этим актуальны обоснованные методы и удобные процедуры, позволяющие сокращать размерность модели [1, с. 58].

Рассмотрим задачу линейного программирования:

$$\varphi(x) = c_1x_1 + c_2x_2 \to \max \tag{1}$$

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 \le b_1 & (2) \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \le b_2 & (3) \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 & (4) \end{cases}$$

Определение. Ограничение (3) является следствием системы неравенств (2) и (4), если для любых переменных, для которых выполнено ограничение (2), выполняется также и ограничение (3).

Неравенство-следствие является несущественным для задачи оптимизации (1)-(4), поскольку все допустимые (а значит, и оптимальные) точки определяются без учета неравенства-следствия.

Очевидно, что для системы (2)-(4) возможны только 3 случая: неравенство является следствием, неравенство не является следствием, система неравенств не имеет решения. В результате анализа всех возможных ситуаций для неравенств (2)-(4) выявлено [2], при каких условиях на параметры неравенств (2),(3) имеет место каждый из случаев. Доказано, в частности, следующее условие, которое в [3, с.69] приведено без доказательства.

Утверждение 1: Пусть параметры системы (2)-(4) удовлетворяют условиям $a_{ij} \ge 0, b_i > 0$, $x_j \ge 0,\ i = \overline{1,2},\ j = \overline{1,2}$ и связаны соотношениями:

$$\frac{a_{1j}}{b_1} \ge \frac{a_{2j}}{b_2}, \forall j = \overline{1,2}. \tag{5}$$

Тогда ограничение (3) является следствием системы неравенств (2) и (4).

Применение к системе (1)-(4) условия из [3, с.69] дает утверждение 2.

Утверждение 2: Пусть

$$\overline{\varphi}i \triangleq \max\left\{c_1x_1 + c_2x_2 / a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, x \ge 0\right\}, i = \overline{1,2} \tag{6}$$

$$\underline{\varphi}i \triangleq \min\left\{c_1x_1 + c_2x_2 / a_{i1}x_1 + a_{i2}x_2 \le b_i, x \ge 0\right\}, i = \overline{1,2} \tag{7}$$

Если

$$\underline{\varphi}_2 \ge \min_k \overline{\varphi}k, \tag{8}$$

то неравенство (3) является несущественным для задачи (1)-(4).

Утверждение 3. Условие (8) выполнено всегда, если выполнено условие (5).

Доказательство: Пусть выполнены условия утверждения 1. Рассмотрим условия (6)-(8) и разделим каждое неравенство на bi, $i=\overline{1,2}$:

$$\overline{\varphi}i=\max\left\{c1x1+c2x2/\frac{a_{i1}x_1}{b_i}+\frac{a_{i2}x_2}{b_i}\le 1, x\ge 0\right\}, i=\overline{1,2}, \tag{9}$$

$$\underline{\varphi}i=\min\left\{c1x1+c2x2/\frac{a_{i1}x_1}{b_i}+\frac{a_{i2}x_2}{b_i}\ge 1, x\ge 0\right\}, i=\overline{1,2}, \tag{10}$$

Пусть выполнено (5), но не выполнено (8), т.е. $\underline{\varphi}_2<\min\limits_k\overline{\varphi}k$, что равносильно:

$$\min\left\{c1x1+c2x2/\frac{a_{21}x_1}{b_2}+\frac{a_{22}x_2}{b_2}\ge 1, x\ge 0\right\}<\max\left\{c1x1+c2x2/\frac{a_{11}x_1}{b_1}+\frac{a_{12}x_2}{b_1}\le 1, x\ge 0\right\} \tag{11}$$

В условиях утверждения 1 экстремумы в неравенстве (11) достигаются в угловых точках допустимого множества, в которых одна из координат нулевая, а другая – ненулевая. Пусть в обоих случаях это $x_2=0$. Тогда $c_1\ge 0$. Рассмотрим ограничения из неравенства (11) на точках с координатой $x_2=0$ Из (11) следует:

$$\min\left\{c1x1/\frac{a_{21}x_1}{b_2}=1, x\ge 0\right\}<\max\left\{c1x1/\frac{a_{11}x_1}{b_1}=1, x\ge 0\right\} \tag{12}$$

откуда с учетом $c_1\ge 0$ имеем : $\frac{a_{21}}{b_2}>\frac{a_{12}}{b_1}$, что противоречит (5), а значит, доказывает результат.

Пример, в котором ограничение-следствие можно выявить по любому из условий утверждений 1 или 2, проиллюстрирован на рисунке 1:

$$\begin{cases} x_1+x_2\to\max \\ 2x_1+3x_2\le 6 \\ x_1+2x_2\le 8 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

$$\overline{\varphi}1=3; \overline{\varphi}2=8; \underline{\varphi}1=2; \underline{\varphi}2=4$$

$$\underline{\phi}_2=4>\min_k\overline{\phi}_k=3;\ \frac{a_{1j}}{b_1}\ge\frac{a_{2j}}{b_2};\ \ \frac{2}{6}\ge\frac{1}{8};\frac{3}{6}\ge\frac{2}{8}$$

Легко понять, что утверждение, обратное утверждению 3, верно не всегда: выполнение условий утверждения 2 не всегда обеспечивает выполнение условия (5), что демонстрирует следующий пример, проиллюстрированный на рисунке 2:

$$\begin{cases} x_1+2x_2\to\max \\ -2x_1+3x_2\le 6 \\ x_1+2x_2\le 8 \\ x_1\ge 0, x_2\ge 0 \end{cases}$$

$$\overline{\varphi}1=\infty; \overline{\varphi}2=4; \underline{\varphi}1=0; \underline{\varphi}2=8$$

$$8=\underline{\varphi}_2>\min_k\overline{\varphi}k=4$$

$\frac{a_{11}}{b_1}\ge\frac{a_{21}}{b_2}$; не выполнено так как $\frac{-2}{6}\le\frac{1}{8}$

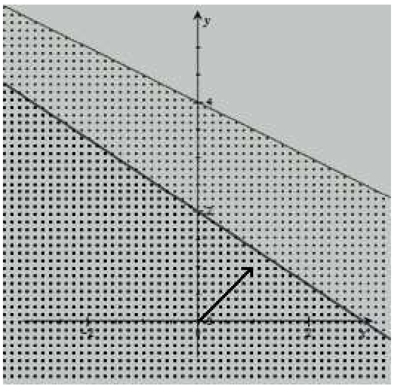

Рисунок 1- Пример выполнения условий 1 и 2

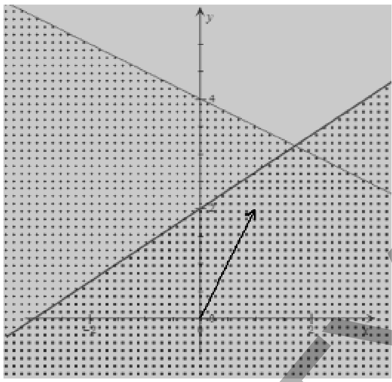

Рисунок 2- Пример выполнения условия 2

Сравнение утверждений 1 и 2 позволяет сделать выводы. Существуют ситуации, когда выполняется утверждение 1, но не выполняется утверждение 2, и наоборот. Рассмотрим пример как на рис.1, но изменим целевую функцию:

$$\begin{cases} -x_1 - x_2 \to \max \\ 2x_1 + 3x_2 \le 6 \\ x_1 + 2x_2 \le 8 \\ x_1 \ge 0, x_2 \ge 0 \end{cases}$$

$\frac{a_{1j}}{b_1} \ge \frac{a_{2j}}{b_2}$ $\frac{2}{6} \ge \frac{1}{8}$ $\frac{3}{6} \ge \frac{2}{8}$; $\overline{\varphi}1 = \infty; \overline{\varphi}2 = \infty; \underline{\varphi}1 = 3; \underline{\varphi}2 = 8$; утверждение 2 не выполнено т.к.: $8 = \underline{\varphi}_2 < \min_k \overline{\varphi}k = \infty$

Утверждение 1 параметрическое и позволяет несложными вычислениями выявить несущественные ограничения, а утверждение 2 требует оптимизационной задачи, что делает выявление несущественные ограничения сложнее.

Список цитированныз источников

1. Цехан, О.Б. Условия для выявления избыточных ограничений в моделях оптимизации // Вестник ГрГУ, сер. 2. – 2011. – № 1. – Стр.58-66.
2. Воробьев, И.Ю. Выделение и анализ ситуаций наличия излишних ограничений в задачах линейного программирования / Воробьев И.Ю., Степанова Т.В. // Молодежь и наука: реальность и будущее: материалы IV Международной научно-практической конференции / Редкол.: О.А. Мазур, Т.Н. Рябченко, А.А. Шатохин: в 4 томах. – Невинномысск: НИЭУП, 2011. – Том IV: Естественные и прикладные науки. – С.423-426
3. Первозванский, А.А. Декомпозиция, агрегирование и приближенная оптимизация / А.А. Первозванский, В.Г. Гайцгори. – НАУКА, 1979. – 344.

УДК 681.84/.89:534.647

РЕЖИМЫ ЦИФРОВОГО СПЕКТРАЛЬНОГО АНАЛИЗА ДЛЯ ВИБРОМОНИТОРИНГА ТРУБЧАТЫХ ЭЛЕМЕНТОВ БОЛЬШЕПРОЛЕТНЫХ СООРУЖЕНИЙ

Стойко В.С., Дереченник С.С. - мл.
УО «Брестский государственный технический университет», г. Брест
Научный руководитель – Дереченник С.С., к.т.н., доцент

Решение проблемы конструктивной безопасности сооружений, в особенности большепролетных, обусловливает необходимость системной организации контроля их текущего технического состояния. В ее основе продолжает оставаться периодическое проведение обследований напряженно-деформированного состояния элементов несущих конструкций.