УДК 517.928.7:519.622.2

Афонин В.Г., Тузик И.В.

О ПРИБЛИЖЕННОМ РЕШЕНИИ СИСТЕМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В СТАНДАРТНОЙ ФОРМЕ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА

В ряде практически важных задач приходится исследовать дифференциальные уравнения, решения которых совершают большое число колебаний за рассматриваемый промежуток времени.

При этом амплитуда колебаний мала, а само решение в целом меняется медленно, т.е. ведет себя, например, так, как показано на рисунке 1.

Дифференциальные уравнения такого рода являются типичными примерами уравнений с быстроколеблющимися решениями. На практике они встречаются при решении многочисленных задач механики и физики, описывающих процессы колебательного характера (см., например, [1]).

Очевидно, что использование обычных методов численного интегрирования типа Рунге-Кутты, Адамса и т.п. будет вызывать здесь известные трудности, т.к. придется получать значения решения в большом числе точек, а это сопряжено со значительными затратами машинного времени и потерей точности ввиду накопления погрешностей округления.

В подавляющем большинстве задач, однако, требуется знать лишь поведение решения в целом, т.е. получать значения решения с крупным шагом. Этот шаг может соответствовать промежутку времени, за который решение совершает одно или несколько колебаний.

Во многих случаях система дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями может быть записана в так называемой стандартной форме (см. [1]):

$$\frac{dx}{d\tau} = \varepsilon X(\tau, x) = \varepsilon X_o(x) + \varepsilon \sum_{|k|=1}^{s} X_k(x) e^{i\omega_k \tau} \qquad (1)$$

на промежутке $\tau_0 < \tau < L/\varepsilon$ с начальными условиями $x(\tau_0)=x_0$.

Здесь ε – малый положительный параметр, L - конечное число; x, X – m – мерные вектор - функции. Предполагается, что компоненты вектора X имеют достаточное число ограниченных производных по компонентам x. Все рассмотрения ведутся в вещественной области, поэтому $X_k(x) = \overline{X}_{-k}(x)$, а комплексная форма используется исключительно для сокращения записи.

При исследовании таких систем оказались весьма эффективными асимптотические методы, наиболее распространенными из которых является метод усреднения Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова (см. [1]) и различные его обобщения и видоизменения. Этот метод позволяет получить из исходной усредненную систему дифференциальных уравнений, решение которой уже не совершает быстрых колебаний и может быть найдено либо аналитически, либо с помощью обычных численных методов. Известны теоремы, устанавливающие асимптотическую (при $\varepsilon \to 0$) близость решений исходной и усредненной систем. Однако вопрос о мажорантной оценке погрешности приближенных решений в классическом подходе обычно не рассматривается. Очевидно, это связано с тем, что для погрешности решений усредненных уравнений можно получить только весьма грубые оценки, мало пригодные для практических применений. Такого рода оценки получены в [2] для систем достаточно общего вида, решения которых совершают медленные и быстрые движения.

В настоящей работе предлагается специализированный метод численного интегрирования (СМЧИ) (см. также [3]) для систем вида (1), где вместо $i\omega_k\tau$ стоит $ik\tau$. Для дальнейшего последнее обстоятельство будет весьма существенным, хотя вместо $ik\tau$ может стоять $i\omega k\tau$, где $\omega > 0$ - произвольное число (наименьшая «базовая» частота).

Очевидно, что через промежутки, кратные 2π, значения $e^{ik\tau}$ при всех целых k будут циклически повторяться. А поскольку точное решение $x(t)$ в целом меняется медленно, то

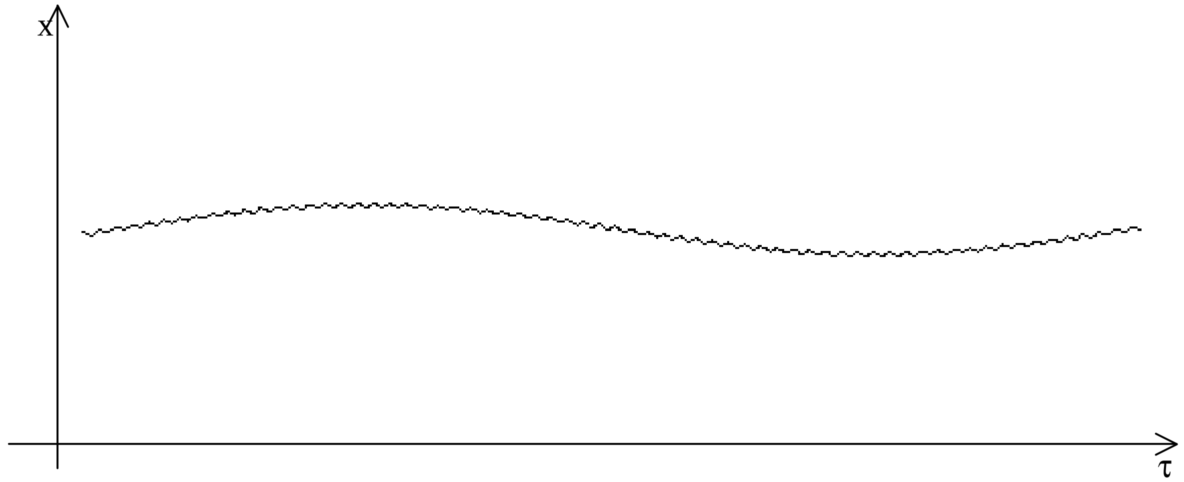

Рис. 1.

Афонин Владимир Гаврилович, *доцент каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного технического университета.*

Тузик Ирина Владимировна, *аспирант каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного технического университета.*

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

для данного начального условия можно построить плавную кривую, которая попадает в малые окрестности точек искомого решения, соответствующих значениям $\tau_1, \tau_2, \ldots, \tau_n, \ldots, \tau_N$ при $\Delta\tau_n=2\pi\lambda$, где $\lambda>0$ – целое.

Именно в таких точках мы можем получить приближенные значения искомого решения с помощью СМЧИ.

Как и в известных асимптотических методах [1], с помощью СМЧИ могут быть получены расчетные формулы первого, второго и более высоких порядков, соответственно, с погрешностью порядка $\varepsilon, \varepsilon^2, \ldots$

Мы ограничились выводом формул первого и второго порядков; формулы более высоких порядков получаются слишком громоздкими и мало пригодными для практики.

Кроме того, в работе даны оценки погрешности СМЧИ для формул первого порядка.

Аналогичные оценки можно получить для формул второго и более высокого порядков.

Более того, на основе расчетных формул СМЧИ строятся «усредненные» уравнения, решения которых, как и получаемые ставшим уже классическим методом Н.М. Крылова, Н.Н. Боголюбова, не содержат быстрых переменных.

В первом приближении «усредненные» уравнения совпадают с классическими, полученными в [1]. Начиная со второго приближения, «усредненные» уравнения содержат составляющие, зависящие от начального условия и отсутствующие при классическом подходе.

Построения, проведенные авторами для систем в стандартной форме, могут быть без принципиальных трудностей обобщены на системы с быстровращающейся фазой [1].

Итак, рассмотрим систему

$$\frac{dx}{d\tau}=\varepsilon X(\tau,x)=\varepsilon X_o(x)+\varepsilon\sum_{|k|=1}^{s}X_k(x)e^{ik\tau} \qquad (2)$$

на промежутке $0<\tau<L/\varepsilon$ и с начальными условиями

$$x\big|_{\tau=o}=x_o\,. \qquad (3)$$

Здесь L - конечное, а $\varepsilon>0$ - малое число; x, $X_k(x)$ - m-мерные вектор - функции; компоненты X_k суть функции x, ограниченные вместе с несколькими своими первыми производными для всех x из некоторой области Ω_m, содержащей все значения решения системы (2) на промежутке $0<\tau<L/\varepsilon$; $X_{-k}=\overline{X_k}$, где черточка означает знак комплексного сопряжения.

Промежуток интегрирования по τ разобьем на части

$$\tau_0<\tau_1<\ldots<\tau_n<\ldots<\tau_N, \qquad (\nabla)$$

при этом $\Delta\tau_n=\tau_{n+1}-\tau_n=2\pi\lambda$, где λ – натуральное число, $n=0,1,\ldots,N-1$.

В дальнейшем, для упрощения записи будем использовать обозначение $\sum\limits_k\ldots\equiv\sum\limits_{|k|=1}^{s}\ldots$.

Используя преобразование

$$F(\tau,x)=F(\tau,x_n)+\int_{\tau_n}^{\tau}\frac{\partial F(\tau,x')}{\partial x'}\frac{dx'}{d\tau'}d\tau', \qquad (*)$$

имеем из (2):

$$x_{n+1}-x_n=\varepsilon\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}X_o(x)d\tau+\varepsilon\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}\sum_k X_k(x)e^{ik\tau}d\tau=$$

$$=\varepsilon\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}X_o(x_n)d\tau+\varepsilon\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}d\tau\int_{\tau_n}^{\tau}\frac{\partial X_o(x')}{\partial x'}\frac{dx'}{d\tau'}d\tau'+ \qquad (4)$$

$$+\varepsilon\sum_k X_k(x_n)\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}e^{ik\tau}d\tau+\varepsilon\sum_k\int_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}e^{ik\tau}\Big(\int_{\tau_n}^{\tau}\frac{\partial X_k(x')}{\partial x'}\frac{dx'}{d\tau'}d\tau'\Big)d\tau$$

Продолжая использовать преобразование (*) и учитывая, что

1) $\int\limits_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}e^{ik\tau}d\tau=0,\ e^{ik\tau_n}=e^{ik\tau_o}$;

2) $\int\limits_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}d\tau\int\limits_{\tau_n}^{\tau}e^{ik\tau'}d\tau'=\dfrac{1}{ik}\int\limits_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}(e^{ik\tau}-e^{ik\tau_n})d\tau=-\dfrac{\Delta\tau_n}{ik}\,e^{ik\tau_o}$;

3) $\int\limits_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}e^{ik\tau}d\tau\int\limits_{\tau_n}^{\tau}d\tau'=\int\limits_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}e^{ik\tau}(\tau-\tau_n)d\tau=\dfrac{\Delta\tau_n}{ik}\,e^{ik\tau_o}$;

4) $\int\limits_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}\alpha_k e^{ik\tau}d\tau\int\limits_{\tau_n}^{\tau}\beta_\nu e^{i\nu\tau'}d\tau'=\begin{cases}0 & (\nu+k\neq0)\\ \dfrac{\alpha_k\beta_\nu}{i\nu}\Delta\tau_n & (\nu+k=0)\end{cases}$

будем иметь

$$x_{n+1}-x_n=\varepsilon\ \ \Delta\tau_n X_o(x_n)+\varepsilon^2\frac{\Delta\tau_n^2}{2}\left[\frac{\partial X_o}{\partial x}X_o\right]_{x=xn}+ \qquad (5)$$

$$+\varepsilon^2\Delta\tau_n G(x_n;\tau_o)+\varepsilon^3 R_n'(x_n,\tau_o,x).$$

Здесь

$$G(x_n;\tau_o)=G^1(x_n)+G^2(x_n;\tau_o)\,, \qquad (6)$$

где $G^1(x_n)=\sum\limits_k\dfrac{1}{ik}\left[\dfrac{\partial X_k}{\partial x}X_{-k}-\dfrac{\partial X_{-k}}{\partial x}X_k\right]_{x=x_n}$,

$$G^2(x_n;\tau_o)=\sum_k\frac{e^{ik\tau_o}}{ik}\left[\frac{\partial X_k}{\partial x}X_o-\frac{\partial X_o}{\partial x}X_k\right]_{x=x_n}.$$

Через ε^3R_n' обозначено выражение порядка ε^3. Очевидно, при определенных ограничениях, налагаемых на правые части системы (2), для $\left\|R_n'\right\|$ можно получить соответствующую оценку – мы не останавливаемся на этом ввиду громоздкости выкладок.

Расчетные формулы (5) можно использовать для численного интегрирования системы (2) с погрешностью порядка $O(\varepsilon^3)$ на каждом шаге, что соответствует второму приближению метода усреднения. Если же ограничиться членами порядка ε, отбрасывая члены порядка ε^2 и выше, то получим расчетные формулы вида

$$x_{n+1}-x_n\approx\varepsilon\ \ \Delta\tau_n X_o(x_n)\,, \qquad (7)$$

соответствующие первому приближению метода усреднения.

Обозначив $h=\varepsilon\ \ \Delta\tau_n$, запишем расчетные формулы первого приближения

$$\xi_{n+1}-\xi_n=h\cdot X_o(\xi_n)\,,\ n=0,1,\ldots,N-1. \qquad (8)$$

С учетом (5), будем иметь

$$x_{n+1}-x_n=\varepsilon\int\limits_{\tau_n}^{\tau_{n+1}}\left[X_o(x)+\sum_k X_k(x)\quad e^{ik\tau}\right]d\tau= \tag{9}$$
$$=hX_o(x_n)+\varepsilon^2 R_n^1(x,\tau).$$

Дадим теперь оценку погрешности численного метода (8), пренебрегая погрешностями округления. Вычитая из уравнения (9) уравнение (8), получим:

$$x_{n+1}-\xi_{n+1}-(x_n-\xi_n)=h\left[X_o(x_n)-X_o(\xi_n)\right]+\varepsilon^2 R_n^1(x,\tau). \tag{10}$$

Обозначив $\Delta_n^{\xi}=x_n-\xi_n$, и учитывая, что

$$\left[X_o(x_n)-X_o(\xi_n)\right]=\left.\frac{\partial X_o}{\partial x}\right|_{x=\tilde{\xi}_n}\Delta_n^{\xi}, \text{ где}$$

$$\tilde{\xi}_n=\theta\xi_n+(1-\theta)x_n,\ 0<\theta<1$$

будем иметь

$$\Delta_{n+1}^{\xi}=\Delta_n^{\xi}+h\left.\frac{\partial X_o}{\partial x}\right|_{x=\tilde{\xi}_n}\Delta_n^{\xi}+\varepsilon^2 R_n^1(x,\tau). \tag{11}$$

Откуда получается векторное равенство

$$\Delta_{n+1}^{\xi}=\left(E+h\left.\frac{\partial X_o}{\partial x}\right|_{x=\tilde{\xi}_n}\right)\Delta_n^{\xi}+\varepsilon^2 R_n^1(x,\tau), \tag{12}$$

где E – единичная матрица, n=0,1,...,N-1.

Обозначая

$$p_n=\left\|E+h\left.\frac{\partial X_o}{\partial x}\right|_{x=\tilde{\xi}_n}\right\|, \tag{13}$$

$$q_n=\left\|R_n^{\xi}\right\|, \tag{14}$$

будем иметь

$$\left\|\Delta_n^{\xi}\right\|\le\delta_n,$$

где δ_n – решение задачи

$$\delta_{n+1}=p_n\delta_n+\varepsilon^2 q_n,\ n=0,1,...,N-1,\ \delta_0=0 \tag{15}$$

или

$$\delta_{n+1}=p_n\delta_n+\varepsilon^2 q_n,\ n=1,2,...,N-1,\ \delta_1=\varepsilon^2 q_0. \tag{16}$$

Решая (16), получим

$$\delta_n=\varepsilon^2\left[q_{n-1}+\sum_{i=1}^{n-1}q_{i-1}\prod_{j=i}^{n-1}p_j\right]. \tag{17}$$

Легко видеть, что рост δ_n может быть вызван большими значениями p_j. Поэтому при данном h наиболее существенную роль здесь играет норма матрицы (13).

Эту норму можно приближенно оценивать при вычислениях, отыскивая при необходимости частные производные численно.

Допустим теперь, что имеют место неравенства

$$p_n\le p,\ q_n\le q,\ n=0,1,\ldots,N-1 \tag{18}$$

Легко видеть, что при этом

$$\delta_n\le\varepsilon^2\left[q+\sum_{i=1}^{n-1}p^{n-i}\cdot q\right] \tag{19}$$

или

$$\delta_n\le\varepsilon^2 q\left[1+\sum_{i=1}^{n-1}p^{n-i}\right]=\varepsilon^2 q\left(1+\frac{p^n-p}{p-1}\right). \tag{20}$$

Отсюда заключаем, что если $p<1$, то значения δ_n равномерно ограничены и при $n\to\infty$ приближаются к

$$\varepsilon^2\frac{q}{1-p}. \tag{21}$$

Если же $p>1$, то δ_n может, вообще говоря, экспоненциально расти.

Расчетные формулы второго приближения будут иметь вид (см.(5))

$$\eta_{n+1}-\eta_n=\varepsilon\quad\Delta\tau_n X_o(\eta_n)+\varepsilon^2\frac{\Delta\tau_n^2}{2}\left[\frac{\partial X_o}{\partial x}X_o\right]_{x=\eta n}+ \tag{22}$$
$$+\varepsilon^2\Delta\tau_n G(\eta_n;\tau_o).$$

Оценки погрешности для них строятся аналогично приведенным выше оценкам погрешности первого приближения.

В соответствии с расчетными формулами (7) и (22) можно получить «усредненные» уравнения.

При этом, «усредненные» уравнения первого приближения совпадают с классическими и имеют вид

$$\frac{d\bar{\xi}}{d\tau}=\varepsilon X_o(\bar{\xi}). \tag{23}$$

«Усредненные» уравнения второго приближения имеют вид

$$\frac{d\bar{\eta}}{d\tau}=\varepsilon\left[X_o(\bar{\eta})+\varepsilon G(\bar{\eta};\psi_o)\right] \tag{24}$$

В обоих уравнениях берется одно и то же начальное условие вида (3).

Можно показать, что в точках τ_n разбиения (∇) решение уравнения (23) отличается от «медленной» части $x(\tau)$ решения системы (2) на величину порядка ε, а решение уравнения (24) - на величину порядка ε^2, если $n\sim\frac{1}{\varepsilon}$.

Такое оценивание осуществляется аналогично проведенному выше для СМЧИ.

Анализируя правые части (24) и классического метода усреднения для второго приближения можно видеть, что у нас присутствует слагаемое

$$G^2(\bar{\eta};\tau_o)=\sum_k\frac{e^{ik\tau_o}}{ik}\left[\frac{\partial X_k}{\partial x}X_o-\frac{\partial X_o}{\partial x}X_k\right]_{x=\bar{\eta}}, \tag{25}$$

зависящее от начального условия и отсутствующее в [1].

В заключение отметим, что на практике пользоваться формулами общего вида для второго и более высоких приближений бывает не очень удобно. Дело в том, что конкретные системы уравнений обычно записаны в вещественной форме, и их преобразование к стандартному виду, а затем обратно требует дополнительных аналитических выкладок. Гораздо проще бывает, усвоив технологию метода, непосредственно получить нужные расчетные формулы для данного конкретного случая.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М., 1963.
2. В.Г. Афонин, И.В. Тузик. Об усреднении в системах, совершающих медленные и быстрые движения. // Вестник Брестского государственного технического университета, №5, 2002, стр. 44-48.
3. В.Г. Афонин. Об одном методе численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями. // Вестник Ленинградского университета, №1, 1971, стр. 4-8.