замены $x \to \alpha$ принимает вид (1). Это означает, что ромбовидное решение, найденное в [6], является частным случаем найденного класса решений, определяемых уравнениями (3), (8), (10), (20) при $n = 2$, $e = 0$. В случае $e > 0$ частицы P_1, P_2, P_3, P_4 также будут располагаться в вершинах ромба, но ромб будет вращаться неравномерно и пульсировать.

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе получены новые гомографические решения задачи $N = 2n + 1$ тел, геометрически изображаемые двумя n-угольниками, расположенными в одной плоскости и имеющими общий центр. В вершинах первого многоугольника находятся частицы одинаковой массы m_1, а в вершинах второго – частицы массой m_2. Частица массой m_0 покоится в центре многоугольников, в то время как частицы m_1 и m_2 движутся вокруг нее по подобным траекториям, которые являются коническими сечениями с одинаковым эксцентриситетом *e* и параметрами p и $x \cdot p$ соответственно. Во время движения каждая пара частиц $P_j,\ P_{n+j}\ (j = \overline{1,n})$ либо находится на одном луче, либо на разных лучах с вершиной в точке P_0, угол между которыми составляет π / n. При заданных значениях n и масс частиц m_0, m_1 и m_2 возможные значения параметра *x* находятся как решения уравнений (15), (20) соответственно.

Следует отметить также, что найденные решения допускают обобщения на случай p правильных n-угольников с общим центром в точке P_0. Некоторые из них являются коллинеарными, а другие повернуты на угол π / n. В вершинах каждого многоугольника должны располагаться тела одинаковой массы, что обеспечивает сохранение симметрии системы.

Автор выражает глубокую признательность проф. Е.А. Гребеникову за интересное и полезное обсуждение проблемы многих тел и ее приложений.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. А. Уинтнер. Аналитические основы небесной механики. – М.: Мир, 1967. –523 С.
2. L.M.Perko, E.L.Walter. Regular Polygon Solutions of the N-Body Problem / *Proc. American Math. Soc.* – V. 94, No 2. – 1985. – 301-309.
3. B. Elmabsout. Sur l’existence de certaines configurations d’equilibre relatif dans le probleme des N corps / *Celestial Mechanics and Dynamical Astronomy*. – V. 41. – 1988. – 131-151.
4. Е.А. Гребеников. Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел / *Математическое моделирование.* – Т. 10, № 8. – 1998. – 74-80.
5. E.A. Grebenikov. New exact solutions in the planar symmetrical (*n+1*)-body problem / *Romanian Astronomical Journal*. – V. 7, No. 2. – 1997. – 151-156.
6. Е.А. Гребеников, Д. Козак-Сковородкина, М. Якубяк. Методы компьютерной алгебры в проблеме многих тел.– М.: Изд-во РУДН, 2002. – 210 С.
7. А.Н. Прокопеня. О линейной устойчивости точных симметричных решений ньютоновой гравитационной задачи многих тел / *Вестник Брестского государственного технического университета*. – № 5. – 2001. – 25-29.
8. Г.Н. Дубошин. Небесная механика. Основные задачи и методы. – 3-е изд. – М.: Наука, 1975. – 800 С.

УДК 517.983.53

Тузик А.И.

ПАРНЫЕ ДИСКРЕТНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТИПА СВЕРТКИ С ПОЧТИ СТАБИЛИЗИРУЮЩИМИСЯ МНОЖИТЕЛЯМИ СПЕЦИАЛЬНОГО ВИДА В НОРМАЛЬНОМ И ИСКЛЮЧИТЕЛЬНОМ СЛУЧАЯХ

Продолжается начатое в [1] исследование парного дискретного уравнения, которое с помощью оператора sgn записывается в виде

$$\begin{gathered}\lambda_0 x_n + \lambda_2 x_{-n} + (-1)^n(\lambda_1 x_n + \lambda_3 x_{-n}) + \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty}[\overset{0}{a}_{n-k} + \overset{2}{a}_{n+k} + (-1)^k(\overset{1}{a}_{n-k} + \overset{3}{a}_{n+k})]x_k - \\ - sgn(n+0{,}5)\{\mu_0 x_n + \mu_2 x_{-n} + (-1)^n(\mu_1 x_n + \mu_3 x_{-n}) + \\ + \sum_{k=-\infty}^{\infty}[\overset{0}{b}_{n-k} + \overset{2}{b}_{n+k} + (-1)^k(\overset{1}{b}_{n-k} + \overset{3}{b}_{n+k})]x_k\} = f_n, \\ \lambda_k,\ \mu_k - const,\ k = \overline{0,3};\ n \in Z.\end{gathered} \tag{1}$$

Предполагается, что $\{\overset{i}{a}_n\}, \{\overset{i}{b}_n\} \in l_1,\ i = \overline{0,3};\ \{f_n\} \in l_2$. Решение уравнения (1) будем искать в классе $\{x_n\} \in l_2$. Частные случаи уравнения (1) с постоянными коэффициентами, когда все множители при $(-1)^k$, $k \in Z$, равны нулю, рассматривались многими авторами [2–4] в различных пространствах последовательностей.

Отметим, что наличие почти стабилизирующихся [4, с.127] множителей $(-1)^k$, $k \in Z$, изменяющих знак аргумента у преобразования Лорана [5,6], позволяет рассматривать новые [5–11] дискретные уравнения типа свертки с переменными коэффициентами (ср. [4, 12–16]). В силу многочисленных и разнообразных приложений дискретных уравнений типа свертки [2, 14, 17] исследование не изученных ранее более общих уравнений такого типа является актуальным как для теории, так и для приложений.

Применяя к равенству (1) преобразование Лорана [2, с.222] и учитывая его свойства [2–13] получим равносильное сингулярное интегральное уравнение с конечной коммутативной [18] группой $G_4 = \{\alpha_0^+,\ \alpha_1^+,\ \alpha_2^-,\ \alpha_3^- = \alpha_1^+(\alpha_2^-)\}$ прямых и обратных сдвигов Карлемана, где $\alpha_0^+ = t$, $\alpha_1^+ = -t$, $\alpha_2^- = t^{-1}$, $\alpha_3^- = -t^{-1}$, $|t| = 1$

$$\begin{gathered}(KX)(t) \equiv \sum_{k=0}^{3}\{[\lambda_k + A_k(t)]X[\alpha_k(t)] - \\ - [S(\mu_k + B_k)X(\alpha_k)](t)\} = F(t), \quad |t| = 1,\end{gathered} \tag{2}$$

***Тузик Альфред Иванович**, к.физ.-мат.н., профессор каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*

Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

где S – оператор сингулярного интегрирования

$$[S(\mu_k + B_k)X(\alpha_k)](t) =$$
$$= \frac{1}{\pi i} \int\limits_{|\tau|=1} \frac{\mu_k + B_k(\tau)}{\tau - t} X[\alpha_k(\tau)]d\tau \, .$$

Большими буквами обозначены преобразования Лорана бесконечномерных векторов, обозначенных соответствующими малыми буквами. В силу однозначной обратимости преобразования Лорана уравнение (2) равносильно уравнению (1) в том смысле, что они одновременно разрешимы или неразрешимы и в случае разрешимости имеют одинаковое число линейно независимых решений.

Выполняя в (2) необходимые замены переменной [18–20] придем [1] к соответствующей системе четырех сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши относительно неизвестной вектор–функции $\Phi(t)=\{X(t),X(-t),X(t^{-1}),X(-t^{-1})\}$, матричная запись которой имеет вид

$$(M\Phi)(t) \equiv A(t)\Phi(t) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_{|\tau|=1} \frac{B(\tau)\Phi(\tau)}{\tau - t}d\tau +$$
$$+ \int\limits_{|\tau|=1} M(\tau)\Phi(\tau)d\tau = F_1(t), \qquad |t|=1, \tag{3}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $M(t)$, $F_1(t)$ определяются соответственно по формулам (3.1), (3.2), (3.3) и (3.4).

Отметим, что по сравнению с [1] в уравнении (1) перед sgn (n + 0,5) поставлен знак *минус*. Это позволяет сделать более удобным одновременное исследование системы (3) и системы сингулярных интегральных уравнений, к которым сводится дискретное уравнение, рассмотренное в [10], поскольку индексы этих систем будут равны по величине и противоположны по знаку (аналогичное соотношение, как и у индексов *союзных* систем сингулярных интегральных уравнений).

Пусть $R(t) = A(t) - B(t)$, $S(t) = A(t)+B(t)$. Справедливы [21, 22] следующие тождества

$$\det R(t) \equiv \det R(-t) \equiv \det S(t^{-1}) \equiv \det S(-t^{-1}), \tag{4}$$

которые *в нормальном случае*

$$\det R(t) \neq 0, \ \det S(t) \neq 0, \ |t| = 1 \tag{5}$$

позволяют упростить [21–23] формулу индекса системы сингулярных интегральных уравнений (3), приведенную в [1].

Из результатов [1, 21–23] следует

Теорема. *При выполнении условий нетеровости (5) индекс сингулярного интегрального уравнения (2) с конечной коммутативной группой прямых и обратных сдвигов Карлемана вычисляется по формуле*

$$Ind \ K = \frac{1}{4} Ind \ M = \frac{1}{8\pi}\left\{arg\frac{\det S(t)}{\det R(t)}\right\}_{|t|=1} =$$
$$= \frac{1}{4\pi}\{arg \det S(t)\}_{|t|=1} = -\frac{1}{4\pi}\{arg \det R(t)\}_{|t|=1}. \tag{6}$$

Замечание. Так как матрицы $R(t)$ и $S(t)$ *блочные*, то при вычислении их определителей, при условии, что определитель одного из блоков размера 2×2 отличен от нуля, можно воспользоваться формулами Шура [24, с.59], сводящими вычисление определителя четвертого порядка к вычислению определителя второго порядка.

Исключительный случай системы (3) рассмотрим, предполагая, с учетом выполнения соотношений (4), что

$$\det R(t) = \prod_{k=1}^{m}(t^2 - t_k^2)^{n_k} r(t^2),$$
$$\det S(t) = \prod_{k=1}^{m}\left(\frac{1}{t^2} - t_k^2\right)^{n_k} r\left(\frac{1}{t^2}\right), \tag{7}$$

где $|t_k| = 1$, $k = \overline{1, m}$; n_k – целые неотрицательные числа; $r(t) \neq 0$, $|t| = 1$.

Отметим, что в силу соотношений (4) общие нули у $\det R(t)$ и $\det S(t)$ на $|t| = 1$ могут быть только в точках $t_k = \pm 1$, $\pm i$, т.е. в неподвижных точках обратных сдвигов, $\alpha_2^-(t) = t^{-1}$ и $\alpha_3^-(t) = -t^{-1}$.

Система (3) при выполнении условий (7) может быть *нормализована*, т.е. сведена [3, 25–27] к равносильной системе сингулярных интегральных уравнений *нормального типа*, к которой затем применяются известные результаты [3, 28, 29] по ее разрешимости.

Находя решение уравнения (2) или, что равносильно, системы (3), определим решение исходного уравнения (1) по формуле

$$x_n = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=1}\frac{X(t)}{t^{n+1}}dt, \ n \in Z.$$

$$A(t) = \left(\begin{array}{cc|cc} \lambda_0 + A_0(t) & \lambda_1 + A_1(t) & \lambda_2 + A_2(t) & \lambda_3 + A_3(t) \\ \lambda_1 + A_1(-t) & \lambda_0 + A_0(-t) & \lambda_3 + A_3(-t) & \lambda_2 + A_2(-t) \\ \hline \lambda_2 + A_2(t^{-1}) & \lambda_3 + A_3(t^{-1}) & \lambda_0 + A_0(t^{-1}) & \lambda_1 + A_1(t^{-1}) \\ \lambda_3 + A_3(-t^{-1}) & \lambda_2 + A_2(-t^{-1}) & \lambda_1 + A_1(-t^{-1}) & \lambda_0 + A_0(-t^{-1}) \end{array}\right), \tag{3.1}$$

$$B(t) = \left(\begin{array}{cc|cc} \mu_0 + B_0(t) & \mu_1 + B_1(t) & \mu_2 + B_2(t) & \mu_3 + B_3(t) \\ \mu_1 + B_1(-t) & \mu_0 + B_0(-t) & \mu_3 + B_3(-t) & \mu_2 + B_2(-t) \\ \hline -\mu_2 - B_2(t^{-1}) & -\mu_3 - B_3(t^{-1}) & -\mu_0 - B_0(t^{-1}) & -\mu_1 - B_1(t^{-1}) \\ -\mu_3 - B_3(-t^{-1}) & -\mu_2 - B_2(-t^{-1}) & -\mu_1 - B_1(-t^{-1}) & -\mu_0 - B_0(-t^{-1}) \end{array}\right), \tag{3.2}$$

$$M(t) = \frac{t^{-1}}{\pi \ i}\left(\begin{array}{cc|cc} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ \hline \mu_2 + B_2(t^{-1}) & \mu_3 + B_3(t^{-1}) & \mu_0 + B_0(t^{-1}) & \mu_1 + B_1(t^{-1}) \\ \mu_3 + B_3(-t^{-1}) & \mu_2 + B_2(-t^{-1}) & \mu_1 + B_1(-t^{-1}) & \mu_0 + B_0(-t^{-1}) \end{array}\right), \tag{3.3}$$

$$F_1(t) = \{ F(t), F(-t), F(t^{-1}), F(-t^{-1}) \}. \tag{3.4}$$

Результаты настоящей статьи доложены автором 06.09.2003г. на международной конференции "АМАДЕ – 2003" [30].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Тузик А.И. Парное дискретное уравнение типа свертки с почти стабилизирующимися множителями специального вида // Весці АН Беларусі. Сер.фіз.–мат. навук. 1994. № 4. С. 107 – 109.
2. Гахов Ф.Д., Черский Ю.И. Уравнения типа свертки. – М.: Наука, 1978. – 296 с.
3. Пресдорф З. Некоторые классы сингулярных уравнений. – М.: Мир, 1979. – 493 с.
4. Карапетянц Н.К., Самко С.Г. Уравнения с инволютивными операторами и их приложения. – Ростов–на–Дону: РГУ, 1988. – 192 с.
5. Тузик А.И. Дискретные уравнения типа свертки, сводящиеся к четырехэлементным краевым задачам со сдвигом Карлемана // Докл. АН БССР. 1988. Т.32, № 12. С. 1065–1068.
6. Тузик А.И. О разрешимости одного дискретного уравнения типа свертки с переменными коэффициентами // Дифференц. уравнения. 1989. Т.25, № 8. С.1462–1464.
7. Тузик А.И. О разрешимости одного класса дискретных уравнений типа свертки с сопряжением // Докл. АН БССР. 1989. Т.33, № 7. С.595–598.
8. Тузик А.И. О нетеровости одного парного дискретного уравнения типа свертки с почти стабилизирующимися множителями // Докл. АН Беларуси. 1993. Т.37, № 2. С. 118 – 120.
9. Тузик А.И. О нетеровости одного дискретного уравнения типа свертки с почти стабилизирующимися множителями // Дифференц. уравнения. 1993. Т.29, № 10. С. 1829 – 1831.
10. Тузик А.И. Дискретные уравнения типа свертки с почти стабилизирующимися множителями специального вида в нормальном и исключительном случаях // Вестник Брестского гос. техн. ун-та. 2001. № 5(11): Физика, математика, химия. С. 45 – 47.
11. Шилин А.П. К решению в замкнутой форме дискретных уравнений типа свертки с почти стабилизирующимися множителями // Вестник БГУ. Сер.1. 1994, № 2. С. 44–46.
12. Тузик А.И. Дискретные уравнения типа свертки с коэффициентами степенного роста // Докл. АН БССР. 1979. Т.23, № 12. С. 1061 – 1064.
13. Тузик А.И. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений с коэффициентами степенного роста // Весці АН Беларусі. Сер.фіз.–мат. навук. 1979. № 6. С. 5 – 9.
14. Козицкий В.А. Бесконечные алгебраические системы с переменными коэффициентами и обобщенными свертками: Дисс. … канд.физ.–мат. наук. – Мн.: БГУ, 1987. – 105 с.
15. Шилин А.П. Бесконечные алгебраические системы со степенными множителями // Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.–мат. навук. 1999. № 2. С.50–53.
16. Яковлева О.Н. Разрешимость и свойства решений бесконечных алгебраических систем со степенно-разностными индексами // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 10. С. 1425 – 1431.
17. Гахов Ф.Д. Краевые задачи. – М.:Наука, 1977. – 640 с.
18. Башкарев П.Г., Карлович Ю.Н., Нечаев А.П. К теории сингулярных интегральных операторов с конечной группой сдвигов // Докл. АН СССР. 1974. Т.219, № 2. С. 272–274.
19. Сосунов А.С. Формула индекса одного класса сингулярных интегральных уравнений с двумя сдвигами Карлемана // Материалы всесоюзн. конф. по краевым задачам. – Казань: КГУ, 1970. С.249 – 253.
20. Литвинчук Г.С. Краевые задачи и сингулярные интегральные уравнения со сдвигом. – М.: Наука, 1977. – 448 с.
21. Тузик А.И. Об индексе сингулярного интегрального уравнения с конечной коммутативной группой прямых и обратных сдвигов Карлемана // Тезисы докл. VII Белорусск. матем. конф. Ч.2. – Мн.: БГУ, 1996. С. 27 – 28.
22. Тузик А.И. Об индексе сингулярного интегрального уравнения с конечной коммутативной группой прямых и обратных сдвигов Карлемана // Весці НАН Беларусі. Сер.фіз.–мат. навук. 1998. № 3. С. 18 – 20.
23. Тузик А.И. Упрощение формулы индекса сингулярного интегрального уравнения с конечной коммутативной группой прямых и обратных сдвигов Карлемана // Тезисы докл. междунар. конф. "Аналитические методы анализа и дифференц. уравн." – Мн.: БГУ, 1999. С. 221 – 222.
24. Гантмахер Ф.Р. Теория матриц. – М.: Наука, 1967. – 576 с.
25. Тузик А.И. Особые интегральные уравнения с ядром Коши в исключительном случае. Некоторые приложения: Дисс. … канд.физ.–мат. наук. – Мн.: БГУ, 1973. – 96 с.
26. Тузик А.И. Нормализация систем особых интегральных уравнений с ядром Коши // Весці АН БССР. Сер.фіз.–мат. навук. 1975. № 6. С. 123. Деп. в ВИНИТИ 09.06.75, рег. № 1622-75. – 10 с.
27. Ковалева Г.В. Нормализация систем сингулярных интегральных уравнений // Дифференц. уравнения. 2001. Т. 37, № 10. С. 1434 – 1435.
28. Мусхелишвили Н.И. Сингулярные интегральные уравнения. – М.: Наука, 1968. – 512 с.
29. Векуа Н.П. Системы сингулярных интегральных уравнений. – М.: Наука, 1970. – 380 с.
30. Тузик А.И. Парные дискретные уравнения типа свертки с почти стабилизирующимися множителями специального вида в нормальном и исключительном случаях // Тезисы докл. междунар. конф. "Аналитические методы анализа и дифференц. уравн." – Мн.: ИМ НАНБ, 2003. С. 173 – 174.

УДК 681.324:519.711.7

Маньяков Н.В.

К ВОПРОСУ ПРОГНОЗИРОВАНИЯ ВРЕМЕННЫХ РЯДОВ РЕАЛЬНОЙ ПРИРОДЫ

1. ВВЕДЕНИЕ

При работе с временными рядами основными проблемами являются анализ возможности их предсказания и построение соответствующих экстраполирующих моделей. Для этой цели было предложено большое количество различных методик [1-4]. Однако в данном направлении главное место прочно заняли нейросетевые алгоритмы [5-8]. Многие публикации описывают применение для решения данной задачи различного типа нейронные сети, но большинство из них лишено аргументации выбора соответствующих архитектур. В соответствии с теорией нелинейной динамики и анализа временных последовательностей в статье предлагается аргументация построения и обучения двухслойной нелинейной нейронной сети прямого распространения без обратных связей.

2. ОПИСАНИЕ ДИНАМИКИ ВРЕМЕННОГО РЯДА

Изменение динамики произвольного временного сигнала не может быть полностью описано одномерным измерением во временной области. Это имеет место в связи с тем, что, возможно, он (сигнал) хаотичен, а хаотическая динамика воз-

Маньяков Николай Владимирович, *ст. преподаватель каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.