СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Жанлав Т., Пузынин И.В. О сходимости на основе непрерывного аналога метода Ньютона // Ж. выч. мат. и мат. физ. – 1992. – Т.32, № 6. – С. 846–856.
2. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона // Ж. выч. мат. и мат. физ. – 1981. – Т.21, № 2. – С. 491–497.
3. Мадорский В.М. О некоторых подходах к построению нелокальных итерационных процессов и начального приближения для одного сверхлинейного процесса // SAATS – 97: тез. докл. межд. науч. конф. – Брест, 1997. – С. 257–266.
4. Мадорский В.М. Численная локализация решений нелинейных уравнений методами третьего порядка. // SAATS – 97: тез. докл. межд. науч. конф. – Брест, 1997.— С. 241-248.
5. Ортега Дж., Рейндболт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений с многими неизвестными. М. Мир., 1975.

УДК 519.872

Семенова О.В.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПОРОГОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОТОКОМ В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ SM/MSP/1 С МАР-ПОТОКОМ СБОЕВ

Рассмотрена система массового обслуживания SM/MSP/1 с марковским потоком катастрофических сбоев и управляемым потоком запросов. Поступление сбоя в систему вызывает мгновенный уход всех запросов из системы. Для управления входящим потоком используется многопороговая стратегия. Найдено стационарное распределение вероятностей состояний вложенной цепи Маркова. Разработан алгоритм нахождения оптимальной пороговой стратегии управления потоком запросов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость адекватного описания случайных процессов, имеющих место в современных информационных сетях, повышает интерес исследователей к моделям систем массового обслуживания, учитывающих особенности потоков информации в этих сетях: разноприоритетность и потребность обеспечения высокого качества обработки приоритетных потоков; ненадежность работы сети и возможность потери части информации при сбоях в системе.

Одной из таких моделей является модель управляемой системы массового обслуживания с потоком катастрофических сбоев, приводящих к потере всех запросов в системе, включая обслуживаемый запрос. Частный случай таких систем есть системы с несколькими режимами входящего потока запросов. Характерным для них является то, что режимы, в которых интенсивности поступления запросов ниже, являются более дорогими по сравнению с режимами, запросы в которых поступают интенсивнее. Выбор режима входящего потока происходит в соответствии с некоторой стратегией (например, одно-, многопороговой или гистерезисной) с целью минимизации экономического критерия качества, оценивающего эффективность работы системы. Обзор работ по управляемым системам содержится в [1-5].

Сбои, происходящие в реальных системах массового обслуживания, в том числе и сетях связи, нарушают работу систем и, в частности, приводят к потере нескольких или всех запросов. Сбои, вызывающие потерю всех запросов в системе, (disasters) являются важным частным случаем так называемого отрицательного запроса, понятие которого в 1991 году ввел Э. Геленбе [6]. Список работ по исследованию систем с отрицательными запросами и со сбоями можно найти в [6-10].

Таким образом, становится актуальным исследование управляемых систем со сбоями. Для этих систем экономический критерий качества включает штраф за потерю запросов в единицу времени, а динамическое управление системой (в частности, переключение на режим с менее интенсивным потоком запросов) позволяет уменьшить длину очереди в системе, что снижает расходы, связанные с потерей запросов из-за поступления сбоя.

Описание входящего потока запросов с помощью SM-процесса позволяет достаточно адекватно описать потоки информации в современных сетях связи, поскольку они являются коррелированными и нестационарными. В современной литературе SM-процесс также широко используют для описания процесса обслуживания запросов [9-11].

Марковский процесс обслуживания (MSP) является обобщением обслуживания фазового типа. Система G/MSP/1/r с конечным и бесконечным буфером исследована в [12].

В данной работе рассмотрена система с многорежимным потоком запросов, марковским обслуживанием и потоком катастрофических сбоев, приводящих к мгновенному уходу всех запросов из системы. Для управления потоком запросов используется многопороговая стратегия.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с неограниченным буфером и потоком катастрофических сбоев.

Входящий поток запросов имеет n режимов, $n \geq 2$. Процесс поступления запросов в k-м режиме – SM (Semi-Markovian), задаваемый полумарковским процессом $\nu_t, t \geq 0$ с пространством состояний $\{1,\ldots,W\}$ и полумарковским ядром $A^{(k)}(t) = \left\| A^{(k)}_{\nu,\nu'}(t) \right\|_{\nu,\nu'=\overline{1,W}}$, $k = \overline{1,n}$. Полагаем, что ядро $A^{(k)}(t)$ удовлетворяет условиям Ньютса [13] и Лукантони и Ньютса [11]. Моменты поступления запросов в систему есть моменты изменения состояний процесса $\nu_t, t \geq 0$.

Интенсивность SM-потока в k-м режиме определяется следующим образом:

$$\lambda_k^{-1} = \vec{\delta}^{(k)} \int_0^{\infty} t dA^{(k)}(t) \mathbf{1},\ k = \overline{1,n},$$

где $\mathbf{1} = (1,1,\ldots,1)^T$, $\vec{\delta}^{(k)}$ есть собственный стохастический вектор матрицы $A^{(k)}(\infty)$, соответствующий собственному значению 1, то есть

$$\vec{\delta}^{(k)} A^{(k)}(\infty) = \vec{\delta}^{(k)},\ \vec{\delta}^{(k)} \mathbf{1} = 1,\ k = \overline{1,n}.$$

***Семенова Ольга Валерьевна,** аспирант ф-та прикладной математики и информатики, НИЛ прикладного вероятностного анализа Белорусского государственного университета.*
Беларусь, БГУ, 220050, г. Минск, просп. Ф. Скорины, 4.

Процесс поступления сбоев – МАР-поток (Markov Arrival Process), задаваемый цепью Маркова $\eta_t, t \geq 0$ с непрерывным временем, пространством состояний $\{0,...,N\}$ и матричной производящей функцией

$$F(z) = F_0 + zF_1, \ |z| \leq 1.$$

Подробное описание МАР-потока, как частного случая ВМАР-потока, дано в работе Лукантони [14]. Переходы цепи $\eta_t, t \geq 0$, не вызывающие поступления сбоя, управляются матрицей F_0. Переходы цепи $\eta_t, t \geq 0$, сопровождающиеся поступлением сбоя в систему, управляются матрицей F_1. Так же, как Джейн и Сигман [8], полагаем, что приход сбоя в систему вызывает немедленный уход из системы всех запросов, включая обслуживаемый запрос. Считаем также, что сбои, поступающие в пустую систему, не накапливаются в ней и не оказывают никакого влияния на ее последующую работу.

Процесс обслуживания запросов – MSP (Markovian Service Process). Он управляется цепью Маркова $m_t, t \geq 0$ с непрерывным временем, пространством состояний $\{0,...,M\}$ и матричной производящей функцией

$$B(z) = B_0 + B_1.$$

Описание MSP-процесса обслуживания запросов приведено в [12]. Переходы цепи $m_t, t \geq 0$, не приводящие к завершению обслуживания, управляются матрицей B_0. Переходы цепи $m_t, t \geq 0$, приводящие к завершению обслуживания, управляются матрицей B_0. Полагаем, что цепь Маркова m_t, $t \geq 0$ «замораживает» свое состояние в момент окончания периода занятости системы при успешном завершении обслуживания запроса и меняет свое состояние в соответствии со стохастической матрицей *P* в момент поступления сбоя.

Работа системы оценивается экономическим критерием качества, имеющим вид

$$C = C(j_1,...,j_{n-1}) = aU + \sum_{k=1}^{n} c_k Y^{(k)} + gV, \qquad (1)$$

где U – среднее время ожидания в системе; $Y^{(k)}$ – средняя доля использования k-го режима потока запросов, $k = \overline{1,n}$; V – среднее число запросов, потерянных в единицу времени; a, c_k, g – стоимостные коэффициенты, причем $a > 0$, $c_1 \leq c_2 \leq ... \leq c_n$, $g \geq 0$.

Поток запросов может изменять свой режим только в моменты поступления запросов. Для управления входящим потоком используется многопороговая стратегия, определяемая следующим образом. Фиксируется набор порогов $(j_1, j_2,..., j_{n-1})$, причем $-1 = j_0 < j_1 \leq j_2 \leq ... \leq j_{n-1} < j_n = \infty$. Если число запросов в системе в данный момент прихода запроса удовлетворяет неравенству $j_{k-1} + 1 \leq i \leq j_k$, запросы будут поступать в соответствии с k-м режимом, $k = \overline{1,n}$.

В данной работе предложен алгоритм нахождения оптимальной многопороговой стратегии управления, состоящий в следующем: фиксируем набор порогов и находим стационарное распределение вероятностей вложенной цепи Маркова, описывающей поведение системы. Далее вычисляем значение критерия качества при заданном наборе порогов и находим оптимальный набор порогов, минимизируя значение критерия качества.

3. СТАЦИОНАРНОЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ВЕРОЯТНОСТЕЙ ВЛОЖЕННОЙ ЦЕПИ МАРКОВА

Пусть $(j_1, j_2,..., j_{n-1})$ – фиксированный набор порогов и t_r есть k-й момент поступления запроса в систему, $k \geq 1$. Рассмотрим случайный процесс $\xi_k = \{i_k, m_k, \eta_k, \nu_k\}$„ $k \geq 1$, где i_k – число запросов в системе в момент $t_k - 0$, $i_k \geq 0$; m_k – состояние процесса обслуживания m_t в момент $t_k - 0$, $m_k = \overline{0,N}$; η_k – состояние процесса поступления сбоев η_t в момент $t_k - 0$, $\eta_n = \overline{0,N}$ и ν_k – состояние процесса ν_t, управляющего поступлением запросов, в момент $t_k - 0$, $\nu_k = \overline{1,W}$. Случайный процесс ξ_k, $k \geq 1$ является цепью Маркова. Занумеруем состояния этого процесса в лексикографическом порядке и введем следующие стационарные вероятности

$$\pi(i,m,\eta,\nu) = \lim_{k\to\infty} P\{i_k = i, m_k = m, \eta_k = \eta, \nu_k = \nu\},$$

$$i \geq 0, \ m = \overline{0,M}, \ \eta = \overline{0,N}, \nu = \overline{1,W}$$

и векторы

$$\vec{\pi}(i,m,\eta) = (\pi(i,m,\eta,1),...,\pi(i,m,\eta,W)),$$

$$\vec{\pi}(i,m) = (\vec{\pi}(i,m,0),...,\vec{\pi}(i,m,N)),$$

$$\vec{\pi}_i = (\vec{\pi}(i,0),...,\vec{\pi}(i,W)).$$

Обозначим через $\Phi_i^{(k)}, i \geq 0, k = \overline{1,n}$ матрицы, элементы которых имеют следующий вероятностный смысл: при работе системы в k-м режиме за время между моментами поступления запросов ровно *i* запросов будут обслужены, в систему не поступит сбой и случайный процесс $\{m_k, \eta_k, \nu_k\}$ перейдет из состояния $\{m, \eta, \nu\}$ в состояние $\{m', \eta', \nu'\}$, при условии, что в начальный момент времени в системе было не менее i запросов, $i \geq 0$. Матрицы $\Phi_i^{(k)}$ задаются формулой

$$\Phi_i^{(k)} = \int_0^\infty Q(i,t) \otimes e^{F_0 t} \otimes dA^{(k)}(t), \ i \geq 0, k = \overline{1,n},$$

где $\otimes$ – символ кронекерова произведения (определение и свойства см., например, в [15]), $Q(i,t)$ есть матрица вероятностей переходов процесса $m_t, t \geq 0$ за время x, при котором будут обслужены ровно i запросов, $i \geq 0$. Матрицы $\Phi_i^{(k)}$ определяются как коэффициенты матричного разложения

$$\sum_{i=0}^{\infty} \Phi_i^{(k)} z^i = \int_0^\infty e^{B(z)x} \otimes e^{F_0 x} \otimes dA^{(k)}(x), \ k = \overline{1,n}. \qquad (2)$$

Обозначим через $\Omega_i^{(k)}$ матрицу, элементы которой имеют следующий вероятностный смысл: при работе системы в k-м режиме за время между моментами поступления запросов систему покинет ровно $i+1$ запрос и случайный процесс $\{m_k, \eta_k, \nu_k\}$ перейдет из состояния $\{m, \eta, \nu\}$ в состояние $\{m', \eta', \nu'\}$, при условии, что в начальный момент времени в системе было ровно i запросов, $i \geq 0$, $k = \overline{1,n}$.

Матрицы $\Phi_i^{(k)}$ определяются как коэффициенты матричного разложения

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Omega_i^{(k)}z^i(1-z)=\int_0^{\infty}\int_0^t e^{B(z)x}\otimes e^{F_0x}e^{F(1)(t-x)}dx\otimes dA^{(k)}(t)\times$$
$$\times\left(B_1+B_0P+zB_1(P-I_{M+1})\right)\otimes I_{(N+1)W}-$$
$$-\int_0^{\infty}e^{B(z)t}P\otimes e^{F_0t}\otimes dA^{(k)}(t)+\int_0^{\infty}P\otimes e^{F(1)t}\otimes dA^{(k)}(t),\ k=\overline{1,n}. \quad (3)$$

Из равенства (3) получаем формулы для вычисления матриц $\Omega_i^{(k)},\ i\geq 0, k=\overline{1,n}$

$$\Omega_i^{(k)}=\sum_{l=0}^{i}\Gamma_l^{(k)}(B(1)P\otimes I_{(N+1)W})+$$
$$+\Gamma_i^{(k)}(B_1(I_{M+1}-P)\otimes I_{(N+1)W})+$$
$$+\left[H^{(k)}-\sum_{l=0}^{i}\Phi_l^{(k)}\right]\left(P\otimes I_{(N+1)W}\right),\ i\geq 0, k=\overline{1,n},$$

где

$$H^{(k)}=\int_0^{\infty}e^{(I_{M+1}\otimes F(1))t}\otimes dA^{(k)}(t),\ k=\overline{1,n},$$

а матрицы $\Gamma_i^{(k)},\ i\geq 0, k=\overline{1,n}$ есть коэффициенты матричного разложения

$$\sum_{i=0}^{\infty}\Gamma_i^{(k)}z^i=\int_0^{\infty}\int_0^t e^{B(z)x}\otimes e^{F_0x}e^{F(1)(t-x)}dx\otimes dA^{(k)}(t) \quad (4)$$

и подсчитываются рекуррентным образом:

$$\Gamma_0^{(k)}=\left[B_0\oplus(-F_1)\right]^{-1}\otimes I_W\left(\Phi_0^{(k)}-H^{(k)}\right),$$
$$\Gamma_i^{(k)}=\left[B_0\oplus(-F_1)\right]^{-1}\otimes I_W\left(\Phi_i^{(k)}-B_1\otimes I_{(N+1)W}\Gamma_{i-1}^{(k)}\right),$$
$$i\geq 1, k=\overline{1,n}.$$

С помощью формулы полной вероятности и определения многопороговой стратегии получаем следующий результат.

Лемма 1. Векторы стационарных вероятностей $\vec{\pi}_i, i\geq 0$ удовлетворяют следующим уравнениям равновесия:

$$\vec{\pi}_0=\sum_{v=0}^{n-1}\sum_{l=j_v+1}^{j_{v+1}}\vec{\pi}_l\Omega_l^{(v+1)}, \quad (5)$$

$$\vec{\pi}_i=\sum_{l=i-1}^{j_t}\vec{\pi}_l\Phi_{l-i+1}^{(t)}+\sum_{v=t}^{n-1}\sum_{l=j_v+1}^{j_{v+1}}\vec{\pi}_l\Phi_{l-i+1}^{(v+1)}, \quad (6)$$
$$j_{t-1}+1\leq i\leq j_t, t=\overline{1,n}.$$

Теорема 1. Векторы стационарных вероятностей $\vec{\pi}_i, i\geq 0$ вычисляются следующим образом:

$$\vec{\pi}_i=\vec{c}\Pi_i^{(t)},\ j_{t-1}+1\leq i\leq j_t, t=\overline{1,n-1}, j_0=-1, \quad (7)$$
$$\vec{\pi}_i=\vec{c}R^i,\ i>j_{n-1}, \quad (8)$$

где

$$\Pi_i^{(t)}=\sum_{r_t=i}^{j_t}\sum_{r_{t+1}=r_t}^{j_{t+1}}\cdots\sum_{r_{n-1}=r_{n-2}}^{j_{n-1}}R^{r_{n-1}}\Lambda_{r_{n-1}-r_{n-2}}^{(n-1)}\Lambda_{r_{n-2}-r_{n-3}}^{(n-2)}\cdots\Lambda_{r_t-i}^{(t)}$$

матрица R есть единственное решение уравнения

$$R=\sum_{l=0}^{\infty}R^l\Phi_l^{(n)} \quad (9)$$

во множестве неотрицательных матриц спектрального радиуса не больше 1, матрицы $\Lambda_l^{(v)},\ l\geq 0$ вычисляются рекуррентно

$$\Lambda_0^{(v)}=\Phi_0^{(v+1)}\left(\Phi_0^{(v)}\right)^{-1},$$
$$\Lambda_1^{(v)}=\left(\Lambda_0^{(v)}-\Lambda_0^{(v)}\Phi_1^{(v)}-I+\Phi_1^{(v+1)}\right)\left(\Phi_0^{(v)}\right)^{-1}, \quad (10)$$
$$\Lambda_l^{(v)}=\left(\Lambda_{l-1}^{(v)}-\sum_{i=0}^{l-1}\Lambda_i^{(v)}\Phi_{l-i}^{(v)}+\Phi_l^{(v+1)}\right)\left(\Phi_0^{(v)}\right)^{-1},$$
$$l\geq 2, v=\overline{1,n-1}$$

а вектор $\vec{c}$ есть решение системы

$$\vec{c}\left[-\Pi_0^{(1)}+\sum_{v=0}^{n-2}\sum_{l=j_v+1}^{j_{v+1}}\Pi_l^{(v+1)}\Omega_l^{(v+1)}+R-\sum_{l=0}^{j_{n-1}}R^l\Phi_l^{(n)}\right]=\vec{0}, \quad (11)$$

$$\vec{c}\left[\sum_{v=1}^{n-1}\sum_{i=j_{v-1}+1}^{j_v}\Pi_i^{(v)}+R^{j_{n-1}+1}(I-R)^{-1}\right]1=1. \quad (12)$$

Доказательство. Формула (8) проверяется непосредственной подстановкой в уравнение (6) для $i>j_{n-1}+1$. Исследование матричного уравнения (9) приведено в [16]. Справедливость формул (7) можно проверить, подставив их в соотношения (6) с учетом формул (10).

Систему (11) для вектора $\vec{c}$ получаем, подставляя в равенство (5) выражения (7)–(8) для векторов $\vec{\pi}_i, i\geq 0$. В силу однородности этой системы, для нахождения вектора $\vec{c}$ также используем условие нормировки (12). Теорема доказана.

Замечание. Формулы (5)–(12) представляют собой алгоритм для вычисления стационарного распределения вложенной цепи Маркова для любого фиксированного набора порогов $(j_1, j_2, ..., j_{n-1})$.

4. ЗАВИСИМОСТЬ ЗНАЧЕНИЯ КРИТЕРИЯ КАЧЕСТВА ОТ ВЕЛИЧИНЫ ПОРОГОВ

С помощью эргодических теорем для цепей Маркова [17] получаем следующий результат.

Лемма 2. Среднее время τ между моментами поступления запросов определяется как

$$\tau=\vec{c}\left[\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k^{-1}\sum_{i=j_{k-1}+1}^{j_k}\Pi_i^{(k)}+\lambda_n^{-1}R^{j_{n-1}+1}(I-R)^{-1}\right]1$$

Теорема 2. Преобразование Лапласа-Стилтьеса $w(s)$ распределения времени ожидания в системе определяется равенством

$$w(s)=\vec{c}\left(\Pi_0^{(1)}+\sum_{l=1}^{j_1}\Pi_l^{(1)}T_l(s)+\sum_{v=1}^{n-2}\sum_{l=j_v+1}^{j_{v+1}}\Pi_l^{(v+1)}T_l(s)+\right.$$
$$\left.+\sum_{l=j_{n-1}+1}^{\infty}R^lT_l(s)\right)1,\ \mathrm{Re}\,s>0,$$

где

$$T_l(s)=G_{l-1}(s)(B_1\otimes I_{(N+1)W})+$$
$$+\sum_{k=0}^{l}G_k(s)(P\otimes F_1\otimes I_W),\ l\geq 1,$$

а матрицы $G_i(s),\ i\geq 0$ есть коэффициенты матричного разложения

$$\sum_{i=0}^{\infty}G_i(s)z^i=-[B(z)\oplus(F_0-sI_{N+1})]^{-1}\otimes I_W.$$

Следствие 1. Среднее время U ожидания в системе вычисляется следующим образом:

$$U=\vec{c}\left(\sum_{l=1}^{j_1}\Pi_l^{(1)}S_l+\sum_{v=1}^{n-2}\sum_{l=j_v+1}^{j_{v+1}}\Pi_l^{(v+1)}S_l+\sum_{l=j_{n-1}+1}^{\infty}R^lS_l\right)\mathbf{1},\quad(13)$$

где

$$S_l=\Delta_{l-1}(B_1\otimes I_{(N+1)W})+\sum\nolimits_{k=0}^{l}\Delta_k(P\otimes F_1\otimes I_W),\ l\geq 1,$$

$$\Delta_0=L^2,\ \Delta_i=\Delta_{i-1}(B_1\otimes I_{(N+1)W})L+L[(B_1\otimes I_{(N+1)W})L]^iL,$$

$$i\geq 1, L=-[B_0\oplus F_0]^{-1}\otimes I_W.$$

Теорема 3. Средняя доля $Y^{(k)}$ использования k-го режима, $k=\overline{1,n}$ определяется как

$$Y^{(k)}=\lambda_k^{-1}\ \vec{c}\ \sum\nolimits_{i=j_{k-1}+1}^{j_k}\Pi_i^{(k)}\ \mathbf{1}\tau^{-1},\ k=\overline{1,n-1},$$
$$Y^{(n)}=\lambda_n^{-1}\ \vec{c}\ R^{j_{n-1}+1}(I-R)^{-1}\ \mathbf{1}\tau^{-1}.\quad(14)$$

Теорема 4. Среднее число V запросов, потерянных в единицу времени, вычисляется с помощью формулы

$$V=\tau^{-1}\vec{c}\sum_{i=1}^{\infty}i\left(\sum_{l=i-1}^{j_t}\Pi_l^{(t)}D_{l-i+1}^{(t)}+\right.$$
$$\left.+\sum_{v=t}^{n-2}\sum_{l=j_v+1}^{j_{v+1}}\Pi_l^{(v+1)}D_{l-i+1}^{(v+1)}+\sum_{l=j_{n-1}+1}^{\infty}R^lD_{l-i+1}^{(n)}\right)\mathbf{1},\quad(15)$$

где

$$D_0^{(k)}=\Gamma_0^{(k)}(B_0\otimes I_{(N+1)W})-\Phi_0^{(k)}+H^{(k)},$$
$$D_i^{(k)}=\Gamma_i^{(k)}(B_0\otimes I_{(N+1)W})+\Gamma_{i-1}^{(k)}(B_1\otimes I_{(N+1)W})-\Phi_i^{(k)},\quad(16)$$
$$i\geq 1,k=\overline{1,n}.$$

Доказательство. Пусть $\vec{\beta}_i$ есть вектор, задающий вероятности того, что между моментами поступления запросов систему покинет ровно i запросов из-за поступления сбоя, $i\geq 1$. Соотношения для векторов $\vec{\beta}_i,\ i\geq 1$ имеют следующий вид:

$$\vec{\beta}_i=\sum_{l=i-1}^{\infty}\vec{\pi}_lD_{l-i+1}^{(k)},\ j+1\leq l\leq j_k,\ k=\overline{1,n},\quad(17)$$

где

$$D_l^{(k)}=\int_0^{\infty}\int_0^{t}Q(l,v)P\otimes e^{F_0v}F_1e^{F(1)(t-v)}dv\otimes dA^{(k)}(t),$$
$$j_{k-1}+1\leq l\leq j_k, k=\overline{1,n}.\quad(18)$$

Преобразуем подынтегральное выражение в (18) с помощью формулы интегрирования по частям и, с учетом соотношений (2) и (4), получим равенства (16).

Среднее число запросов, теряемых за время между моментами поступления запросов, определяется как $\sum\nolimits_{i=0}^{\infty}i\vec{\beta}_i\mathbf{1}$, а среднее число запросов, потерянных в единицу времени, задается формулой

$$V=\tau^{-1}\sum\nolimits_{i=0}^{\infty}i\vec{\beta}_i\mathbf{1}.\quad(19)$$

Подставляя в (19) формулу (17) и выражения (5)–(6) для $\vec{\pi}_i, i\geq 1$, получим равенство (15). Теорема доказана.

Подставляя выражения (13)–(15) в (1), получим значение критерия качества при заданных значениях порогов $(j_1,j_2,...,j_{n-1})$. Имея алгоритм для вычисления значения критерия качества при любом фиксированном значении порога, далее находим оптимальный набор порогов $(j_1^*,j_2^*,...,j_{n-1}^*)$, минимизируя значение критерия качества.

Оптимизацию значения критерия качества производим прямым перебором в области $[0,\hat{J}]$ значений каждого порога $j_k,\ k=\overline{1,n}$, где величина $\hat{J}$ определяется как значение порогов $j_1=j_2=...=j_{n-1}=\hat{J}$, при котором $\sum\nolimits_{i=0}^{\hat{J}}\vec{\pi}_i\mathbf{1}=1-\varepsilon_C$, а ε_C – точность представления чисел в ЭВМ. Получаемое таким образом значение $C(j_1^*,...,j_{n-1}^*)$ является оптимальным (по крайней мере, при заданной точности вычислений).

5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Рассмотрена система массового обслуживания SM/MSP/1 с многорежимным потоком запросов и марковским потоком катастрофических сбоев, приводящих к мгновенному уходу всех запросов из системы. Для управления потоком запросов используется многопороговая стратегия.

Для данной системы найдено стационарное распределение вероятностей состояний вложенной цепи Маркова и разработан алгоритм нахождения оптимальной пороговой стратегии управления входящим потоком.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Рыков В.В. Управляемые системы массового обслуживания / Теория вероятностей. Математическая статистика. Теоретическая кибернетика (Итоги науки и техники). – М.: ВИНИТИ, 1975. – Т. 10. – С. 43–153.
2. Dudin A.N. Optimal control for a M^X/G/1 queue with two operation modes // Probab. Engin. Inform. Scie. – 1997. – Vol. 11. – P. 225–265.
3. Dudin A.N., Nishimura S. Optimal control for a BMAP/G/1 queue with two service modes // Math. Probl. Engin. – 1999. – Vol. 5. – P. 255–273.
4. Dudin A.N., Klimenok V.I. Optimal admission control in a queueing system with heterogeneous traffic // Operations Research Letters. – 2003. – Vol. 31. – P. 108–118.
5. Нобель Р. Регенеративный подход для анализа очереди M^X/G/1 с двумя видами обслуживания // Автоматика и вычислительная техника. – 1998. – №1. – С. 3–14.
6. Gelenbe E. Product form networks with negative and positive customers // J. Appl. Prob. – 1991. – Vol. 28. – P. 655–663.
7. Artalejo J. G-networks: A versatile approach for work removal in queueing networks // Eur. J. Oper. Res. – 2000. – Vol. 126. – P. 233–249.
8. Jain G., Sigman K. A Pollaczeck–Khinchine formula for M/G/1 queues with disasters // J. Appl. Prob. – 1996. – V. 33. – P. 1191–1200.
9. Dudin A.N., Nishimura S. A BMAP/SM/1 queueing system with Markovian arrival of disasters // J. Appl. Prob. – 1999. – Vol. 36., № 3. – P. 868–881.
10. Dudin A.N., Karolik A.V. BMAP/SM/1 queue with Markovian input of disasters and non-instantaneous recovery // Performance Evaluation. – 2001. – V. 45. – P. 19–32.
11. Lucantoni D.M., Neuts M.F. Some steady-state distributions for the BMAP/SM/1 queue // Commun. Statistics Stochastic Models. – 1994. – Vol. 10. – P. 575–598.
12. Бочаров П.П., Печинкин А.В., Д'Апиче Ч., Фонг Н.Х. Однолинейная система обслуживания конечной емкости с групповым марковским потоком и полумарковским обслуживанием // Вестн. Рос. ун-та дружбы народов. Сер. Прикл. мат. и информатики. – 2001. – №1. – С. 64–79.

13. Neuts M.F. Structured stochastic Matrices of M/G/1 Type Applications / N. Y.k: Marcel Dekker, 1989.
14. Lucantoni D.M. New results on the single server queue with a batch Markovian arrival process // Commun. Stat. Stochastic Models. – 1991. – Vol. 7. – P. 1–46.
15. Grahan A. Kronecker Products and Matrix Calculus with Applications / Chichester: Ellis Horwood Ltd., 1981.
16. Neuts M.F. Markov chain with applications in queueing theory, which have a matrix-geometric invariant probability vector // Adv. Appl. Probab. – 1978. – Vol. 10. – P. 185-212.
17. Скороход А.В. Теория вероятностей и случайных процессов / Киев: Высш. шк., 1980.

УДК 624.131

Пойта П.С.

ФИЗИЧЕСКАЯ СУЩНОСТЬ ПРОЦЕССА УПЛОТНЕНИЯ ГРУНТА ПРИ ДЕЙСТВИИ ИНТЕНСИВНЫХ УДАРНЫХ НАГРУЗОК

Все механические методы интенсивного ударного уплотнения грунтовых оснований направлены на повышение плотности грунтов. При уплотнении грунтов происходит нарушение их естественной структуры. Последствия уплотнения при действии интенсивных ударных нагрузок неоднозначны, ибо, в одних случаях, при увеличении плотности грунтов их деформируемость уменьшается, а в других случаях, нарушение структуры приводит к разрушению структурных связей, что приводит к снижению прочности грунта.

Структурные связи по происхождению и условиям возникновения многообразны и в значительной мере определяют механические свойства грунтов, и в особенности связных, обладающих сцеплением. Особенности структуры грунтов и природу связей между частицами исследовали: П. А. Ребиндер, Н. Я. Денисов, Б. Ф. Рельтов, В. И. Осипов и др. [1, 2, 3, 4, 5].

Для практических целей данной работы достаточно выделить две категории структурных связей, не углубляясь в вопросы природы их происхождения: связи, восстанавливающиеся после разрушения структуры грунта полностью либо частично, либо полностью невосстанавливающиеся связи. Следует отметить, что процесс восстановления связей может быть растянут во времени. В связи с этим, автором были выполнены исследования физико-механических свойств песка пылеватого и пластичной супеси до и после воздействия ударными нагрузками в течение длительного периода времени после завершения уплотнения. Результаты исследований приведены на рис.1.

Анализ полученных данных показывает, что модуль деформации песка пылеватого до уплотнения равен 10.0…11.0 МПа, а супеси пластичной 4.5…5.2 МПа. Значение коэффициента пористости, соответственно, 0.71 и 0.77. Эти же показатели через две недели после завершения уплотнения грунтов на опытной площадке были равны, соответственно: $\boldsymbol{E}$=21.2МПа и $\boldsymbol{E}$=16.4 МПа; $\boldsymbol{e}$=0.53 и $\boldsymbol{e}$=0.49.

Таким образом, в результате уплотнения грунтов тяжелыми трамбовками в значительной степени увеличилась их плотность: для песка пылеватого в 1.34 раза, для супеси пластичной в 1.57 раза. Модуль деформации для песка пылеватого возрос более чем в 2 раза, для супеси пластичной – почти в 3.3 раза. Следует отметить, что данные по коэффициенту пористости и модулю деформации, полученные с определенным временным интервалом в течение шести лет показали, что плотность грунтов практически не меняется, а модуль деформации увеличивается с ростом давности завершения опытного уплотнения. Модуль деформации шестилетней давности для песка пылеватого выше первоначального значения в 2.4 раза, и в 1.16 раза для только что уплотненного грунта. Для супеси пластичной этот рост более заметен и составил, соответственно, 4.76 и 1.46 раз. Этот факт позволяет сделать вывод, что с увеличением давности завершения работ по уплотнению, в грунтах происходят процессы, приводящие к снижению их деформируемости. Это можно объяснить следующими явлениями.

При высоких давлениях, возникающих в условиях ударного уплотнения, происходит сближение частиц грунта и наблюдается сжимаемость жидкости совместно с микропузырьками газа. Следует отметить, что существующее представление о водонасыщенном грунте, как о практически несжимаемой под действием кратковременных нагрузок среде, которое следует из допущения К. Терцаги [6] о несжимаемости поровой жидкости здесь не правомерно, ибо оно было использовано для решения задач консолидации грунта при невысоких (относительно динамических напряжений при ударе) нагрузках, т.е. оно правомерно лишь для ограниченного класса задач.

Когда расстояние между частицами грунта равно двойной толщине диффузного слоя, тогда достаточно ярко проявляется сопротивление их дальнейшему сближению в следствие наличия сил отталкивания между одноименно заряженными диффузными слоями. Однако если преодолеть это сопротивление, то при дальнейшем сближении этих частиц, появляются силы молекулярного взаимодействия непосредственно между твердыми частицами (силы притяжения – Ван-дер-Ваальсовы силы).

Таким образом, при сближении мельчайших частиц одновременно действуют силы отталкивания и притяжения, поэтому связность грунта создается в результате преодоления молекулярными силами сил отталкивания диффузных слоев. Естественно, что чем ближе друг к другу частицы и меньше разделяющая их пленка связанной воды, т.е. чем плотнее грунт, тем прочнее молекулярные структурные связи. В результате глинистые коллоидные частицы, обволакивая более крупные частицы и «склеиваясь» между собой и с крупными частицами под действием молекулярных сил, создают сложную структуру глинистых грунтов. Важной особенностью таких водноколлоидных структурных связей является то, что после их разрушения они при сближении частиц частично или полностью восстанавливаются. Их величина и период восстановления зависят от размера частиц и содержания пылевато-глинистых фракций. Эти связи Н. Я. Денисов назвал первичными.

С течением времени в контактах между частицами грунта образуются вторичные связи. Или могут быть менее прочные и водостойкие связи, образуемые гипсом, кальцитом, и более прочные и водостойкие, такие, как оксиды железа, кремния и др. Если величина первичного сцепления определяется плотностью грунта, то сцепление уплотнения определяется величиной цементоносных связей.

Пойта Петр Степанович, *к.т.н., профессор каф. оснований, фундаментов, инженерной геологии и геодезии, ректор Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.