по 65 корням полинома $T_{65}(t)$. Аппроксимация естественным сплайном произвольной степени осуществлялась по всем точкам неравномерной сетки.

Общее количество точек сетки варьировалось от 65 до 513 (65, 129, 257, 513). Для аппроксимации производных по методу неопределенных коэффициентов использовались от 9 до 13 (9, 11, 13) точек. Нелинейная система решалась с точностью от 10^{-13} до 10^{-11}.

Как показал вычислительный эксперимент, в случае периодических задач для аппроксимации наиболее эффективными оказались отрезок тригонометрического ряда Фурье, отрезок ряда Фурье по полиномам Чебышева, сплайн 5-ой степени, естественный сплайн высокой (7, 9, 11) степени. В случае непериодических задач наиболее эффективными оказались отрезок ряда Фурье по полиномам Чебышева и сплайн 5-ой степени. Как для периодических, так и для непериодических задач точность аппроксимации естественным сплайном слабо зависит от способа заполнения сетки.

Особо следует отметить два момента.

Во-первых, на точность сеточного решения, а, следовательно, и на точность восстановленного приближенного решения существенное влияние оказывает способ аппроксимации производных. В тестовых задачах, например, при аппроксимации 2-ых производных по методу неопределенных коэффициентов точность находится в пределах от 1е-6 до 1е-8.

Во-вторых, норма невязки на приближенном решении будет существенно больше (на 1-4 порядка) нормы отклонения точного решения от приближенного. В тестовых задачах эти значения составляли 10^{-5} – 10^{-8} и 10^{-8} – 10^{-10} соответственно. С другой стороны, норма невязки на приближенном решении не выше отклонения 2-ой производной точного решения от 2-ой производной приближенного решения.

Резюмируя вышесказанное, можно дать следующие рекомендации по аппроксимации сеточных (приближенных) решений задач теории колебаний: в случае периодических колебательных процессов для получения приближенного решения в аналитическом виде из сеточного рекомендуется использовать аппроксимацию отрезком тригонометрического ряда Фурье, в непериодическом случае предлагается восстанавливать приближенное решение дифференциальной краевой задачи отрезком ряда Фурье по полиномам Чебышева I рода или сплайном 5-ой степени.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Березин И. С., Жидков Н.П. Методы вычислений. В 2-х т.: Т. 1. – М., 1966.
2. Мадорский В. М. Локализация решений нелинейных уравнений // Труды Института математики НАН Беларуси – Минск, 2002. – Т. 11. – С. 96 – 103.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М., 1974. – 832 с.
4. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Сплайн-аппроксимация функций. – М, 1983.
5. Мадорский В. М., Стрилец Н. Н. К вопросу аппроксимации функций сплайном пятой степени // Вестник Брестского ун-та. – 2002. – № 4. – С. 24 – 32.
6. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее применения. – М., 1972.
7. Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В. Естественные сплайны произвольной степени// Доклады РАН. – 1966. – Т. 351. № 6. – С. 738-742.

УДК 517.948

Мадорский В.М., Черноокий А.Л.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ЛОКАЛЬНО СХОДЯЩИХСЯ С КУБИЧЕСКОЙ СКОРОСТЬЮ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

Модели, описываемые уравнением Дуффинга, имеют широкое применение в различных областях знаний, особенно в тех, где рассматриваются колебательные и циклические процессы. Помимо этого, уравнение Дуффинга является достаточно содержательной моделью для изучения численного решения нелинейных краевых задач.

Будем рассматривать краевую задачу для уравнения типа Дуффинга

$$a\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+cx(t)+dx^p(t)=F(t), \quad p\in \mathbf{N} \qquad (1)$$

Исследуем непериодическую задачу. В частности, будем рассматривать на отрезке [0; 2,5] краевую задачу (1) при p=3

$$\begin{gathered}\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x^3(t)=F(t),\\ x(0)=\gamma_0, \quad x(2,5)=\gamma_1,\end{gathered} \qquad (2)$$

с правой частью вида

$$F(t)=t^6+2t+2. \qquad (3)$$

Точное решение этой задачи при γ_0=0 и γ_1=6,25 равно x^2.

Одним из наиболее популярных численных методов решения нелинейных дифференциальных задач является метод конечных разностей.

Для этого область непрерывного изменения аргумента заменяется дискретным множеством точек, которые составляют разностную сетку. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется сеточной. При этом для входящих в уравнение производных используются соответствующие конечно-разностные аппроксимации. Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его аппроксимацией на сетке (или разностной аппроксимацией). Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки, тем самым решение краевой задачи фактически сводится к решению систем нелинейных уравнений.

Для хорошей аппроксимации производных необходимо использовать значения функции во многих узлах, так как порядок точности соотношений для аппроксимации производных прямо пропорционален числу узлов, используемых при аппроксимации. Однако, слишком большое количество узлов ведет к накоплению погрешности, связанной с округлением в вычислительном процессе. Формулы для аппроксимации производных по произвольному количеству точек, а также для случая неравномерной сетки можно получить, используя метод неопределённых коэффициентов.

Искомое выражение для производной k-го порядка в некоторой точке $t=t_i$ представляется в виде

Черноокий Александр Леонидович, *ассистент каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина.*
Беларусь, БрГУ, г. Брест, бульвар Космонавтов, 21.

$$x^{(k)}(t_i)=\sum_{j=0}^{n}c_jx_j+R(f) \tag{4}$$

Коэффициенты c_j выбираются из условия $R(f)=0$, когда $f=1,t,t^2,\ldots,t^n$, n – количество узлов. Получится следующая система для определения коэффициентов c_j, которая в случае большого числа узлов становиться плохо обусловленной. В этом случае рекомендуется либо уменьшить количество точек аппроксимации либо произвести регуляризацию линейной алгебраической системы одним из известных методов регуляризации. Как показала вычислительная практика решение существенно не линейных задач теории колебаний, для аппроксимации производных целесообразно применять не более 13 точек, при этом линейная система имеет вид

$$\begin{cases} c_0+c_1+\ldots+c_m=0\ , \\ c_0t_0+c_1t_1+\ldots+c_mt_m=0\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0t_0^k+c_1t_1^k+\ldots+c_mt_m^k=k!\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0t_0^l+c_1t_1^l+\ldots+c_mt_m^l=\dfrac{l!}{(l-k)!}t_i^{l-k}\ , \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_0t_0^m+c_1t_1^m+\ldots+c_mt_m^m=\dfrac{m!}{(m-k)!}t_i^{m-k}\ . \end{cases} \tag{5}$$

С помощью системы (5) находим коэффициенты для вычисления производных любого порядка по произвольному количеству узлов.

Дискретизация задачи (2), (3) приведёт к системе нелинейных уравнений вида $f(x)=0$. Для решения систем нелинейных уравнений существует большое количество методов, каждый из которых имеет свои достоинства и недостатки.

Как известно, метод Ньютона имеет узкую область сходимости, в связи с этим рассмотрим нелокальный сверхлинейный итерационный процесс с обратной связью [3]

$$\begin{gathered} f'(x_n)\Delta x_n=-f(x_n), \\ x_{n+1}=x_n+\beta_n\Delta x_n, \\ \beta_{n+1}=min\left(1,\frac{\|f(x_n)\|}{\beta_n\|f(x_{n+1})\|}\right),\quad \beta_0\in[10^{-4};10^{-1}]. \end{gathered} \tag{6}$$

Метод (6) отличается от метода Ньютона наличием регулятора длины шага, что значительно расширяет его область сходимости. Этот метод, как и метод Ньютона, сходится локально с квадратичной скоростью.

Рассмотрим более быстрый метод третьего порядка с регулятором длины шага [4]. Его можно записать в несколько этапов:

Этап 1. Решается линейная система.

$$f'(x_n)\Delta y_n=-f(x_n),\ \ y_n=x_n+\Delta y_n \tag{7}$$

Этап 2. Решается вторая линейная система.

$$\begin{gathered} f'(x_n)\Delta x_n=-(f(x_n)+\beta_n f(y_n)), \\ \beta_0\in[10^{-4};10^{-1}]. \end{gathered} \tag{8}$$

Этап 3. Вносится поправка.

$$x_{n+1}=x_n+\beta_n\Delta x_n\,. \tag{9}$$

Этап 4. Проводим проверку окончания процесса: если $\|f(x_{n+1})\|<\varepsilon$, ($\varepsilon$ – малая величина, параметр останова) то конец просчетов, иначе этап 5.

Этап 5. Делается перерасчет регулятора длины шага по следующим формулам

$$\beta_{k+1}=min(1,\beta_k\frac{\|f(x_k)\|}{\|f(x_{k+1})\|}),\ \ k=0,1,\ldots \tag{10}$$

И переходим на этап 1.

Докажем сходимость этого процесса. Описанный выше итерационный процесс символически можно записать в виде

$$\begin{gathered} x_{n+1}=x_n-\beta_n\left[f'(x_n)\right]^{-1}\left(f(x_n)+\beta_n f(x_n-\right. \\ \left.-\left[f'(x_n)\right]^{-1}f(x^n))\right)=x_n-\beta_n\Delta x_n, \\ n=0,\ 1,\ \ldots;\ \beta_0\in\left[10^{-4},10^{-1}\right]. \end{gathered} \tag{11}$$

В силу того, что $f\in C_D^{(2)}$, справедлива оценка

$$\begin{gathered} \|f(x_{n+1})-f(x_n)-f'(x_n)(x_{n+1}-x_n)\|\le \\ \le\frac{K}{2}\|\Delta x_n\|^2,\ n=0,\ 1,\ \ldots \\ K\ge sup\|f''(x_n+\Theta\Delta x_n)\|,\ 0\le\Theta\le1. \end{gathered} \tag{12}$$

С учетом (8), соотношение (12) можно переписать в виде

$$\begin{gathered} \|f(x_{n+1})-f(x_n)+\beta_n f(x_n)+ \\ +\beta_n^2 f(y_n))\|\le\frac{K}{2}\|\Delta x_n\|^2\,. \end{gathered} \tag{13}$$

Из (13) имеем оценку

$$\begin{gathered} \|f(x_{n+1})\|\le(1-\beta_n)\|f(x_n)\|+ \\ +\beta_n^2\|f(y_n)\|+\frac{K}{2}\|\Delta x_n\|^2\,. \end{gathered} \tag{14}$$

Оценим $\|f(y_n)\|$ и $\|f(x_n)\|$. Используя теорему о среднем, имеем

$$\|f(y_n)-f(x_n)-f'(x_n)(y_n-x_n)\|\le\frac{K}{2}\|y_n-x_n\|^2 \tag{15}$$

откуда в силу (7), (15) справедлива оценка для $\|f(y_n)\|$

$$\begin{gathered} \|f(y_n)\|\le\frac{K}{2}B^2\|f(x_n)\|^2; \\ \beta_n\|f(y_n)\|=h_n\|f(x_n)\|. \\ \textit{Здесь}\quad h_n=\beta_n\frac{K}{2}B^2\|f(x_n)\|, \\ B\ge\|[f'(x)]^{-1}\|,\ \forall x\in D. \end{gathered} \tag{16}$$

Далее из (11), (16) имеем

$$\begin{gathered} \|\Delta x_n\|\le\beta_nB(\|f(x_n)\|+ \\ +\beta_n\|f(y_n)\|)\le\beta_nB(1+h_n)\|f(x_n)\|. \end{gathered} \tag{17}$$

Подстановка (16), (17) в (14) позволяет выразить связь между нормами невязок на соседних шагах.

$$\begin{gathered} \|f(x_{n+1})\|\le(1-\beta_n)\|f(x_n)\|+ \\ +\beta_nh_n\|f(x_n)\|+\beta_nh_n(1+h_n)^2= \\ =(1-\beta_n(1-h_n(2+2h_n+h_n^2)))\|f(x_n)\|. \end{gathered} \tag{18}$$

Из (10) имеем, что при $\beta_k<1$ справедлива цепочка равенств

$$\beta_0 \| f(x_0) \| = \beta_1 \| f(x_1) \| = \ldots = \beta_{n+1} \| f(x_{n+1}) \| \quad (19)$$

Если положить

$$\delta_n = h_n(2 + 2h_n + h_n^2) \text{ и } q_n = 1 - \beta_n(1 - \delta_n),$$

то неравенство (18) можно переписать в более компактном виде

$$\| f(x_n) \| \le (1 - \beta_n(1 - \delta_n)) \| f(x_n) \| = q_n \| f(x_n) \| \quad (20)$$

Соотношение (20) является базовым при доказательстве сходимости итерационных процессов локально сходящихся с кубической скоростью.

Теорема 1. Пусть в области

$$D = S(x_0, \frac{B \| f(x_0) \| (2 + h_0)}{1 - q_0})$$

существует x^* — решение нелинейного уравнения, оператор f удовлетворяет перечисленным выше условиям и

$$\delta_0 = h_0(2 + 2h_0 + h_0^2) < 1. \quad (21)$$

Тогда итерационный процесс (7) – (10) со сверхлинейной (локально с кубической) скоростью сходится к x^*.

Доказательство.

При $n = 0$ из (20), (21) имеем, что

$$\begin{aligned} &\| f(x_1) \| \le (1 - \beta_0(1 - \delta_0)) \| f(x_0) \| = \\ &= q_0 \| f(x_0) \|; \; q_0 = 1 - \beta_0(1 - \delta_0) < 1, h_0 < 1. \end{aligned} \quad (22)$$

Из (10), (22) следует что $\| f(x_1) \| < \| f(x_0) \|, \; \beta_1 > \beta_0$.

При $n = 1$ имеем, что

$$h_1 = \beta_1 \frac{K}{2} B^2 \| f(x_1) \| = h_0,$$

$$\alpha_1 = 1 - \beta_1(1 - h_1) = 1 - \beta_1(1 - h_0) < 1 - \beta_0(1 - h_0) = \alpha_0,$$

$$\delta_1 = h_1(2 + 2h_1 + h_1^2) = \delta_0 < 1,$$

$$\| f(x_2) \| \le (1 - \beta_1(1 - \delta_1)) \| f(x_1) \| = q_1 \| f(x_1) \|, \; q_1 < q_0$$

Индуктивные рассуждения позволяют утверждать, что последовательность $\{q_n\}$ монотонно убывает к нулю, последовательность $\{\beta_n\}$ монотонно возрастает к 1 и справедлива оценка

$$\| f(x_{n+1}) \| \le \prod_{i=1}^{n} q_i \| f(x_0) \|,$$

из которой следует, что последовательность элементов $\{x_n\}$ по функционалу стремиться к нулю, $h_n \xrightarrow{n \to \infty} 0$ и при некотором $k > n_0$ итерационный процесс (7) – (10) входит в область притяжения процесса (7) – (10) с $\beta_k = 1$.

Нетрудно проверить, что все $x_n, \; y_n \in D$

$$\| x_n - x_0 \| \le \sum_{i=0}^{n-1} \| x_{i+1} - x_i \| =$$

$$= \sum_{i=0}^{n-1} \| \Delta x_i \| < B \| f(x_0) \| \frac{1 + h_0}{1 - q_0};$$

$$\| y_n - x_0 \| \le \| y_n - x_n \| + \| x_n - x_0 \| <$$

$$< B \| f(x_n) \| + B \frac{\| f(x_0) \| (1 + h_0)}{1 - q_0} <$$

$$< \frac{B \| f(x_0) \|}{1 - q_0}(2 + h_0).$$

Стандартным образом можно показать не только слабую сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^* но и сильную сходимость $\{x_n\}$ к x^*

$$\begin{aligned} &\| x_{n+p} - x_n \| \le \sum_{i=n}^{n+p-1} \| \Delta x_n \| < \\ &< B \| f(x_0) \| (1 + h_0) \prod_{i=0}^{n-1} q_i \end{aligned} \quad (24)$$

Из (24) следует фундаментальность элементов $\{x_n\}$, в силу полноты пространства R^n существование предельного элемента x^*, который, как просто проверить, является решением исходной нелинейной системы. Так как $\exists k \in N$ при котором $\beta_k = 1$, а, следовательно $\forall n > k \;\; \beta_n = 1$, то как показано в [5], процесс (7) – (10) с $\beta_n = 1$ обладает кубической скоростью сходимости. Теорема доказана.

Этот процесс можно ускорить, если вместо (10) использовать следующую формулу пересчета регулятора длины шага

$$\beta_{k+1} = min(1, \frac{\|f(x_k)\|}{\beta_k \|f(x_{k+1})\|}), \;\; k = 0, 1, \ldots \quad (25)$$

Метод обладает высокой скоростью сходимости вблизи решения. Как показывает практика, разболтка у этого метода наступает значительно позже, чем у квазиньютоновских методов, а, следовательно, его можно назвать более эффективным.

Численный эксперимент. Была написана программа, позволяющая сравнивать нелокальный итерационный процесс с обратной связью и метод третьего порядка с регулятором длины шага. В таблице приведено необходимое количество итераций для получения сеточного решения и точность по сравнению с точным решением в норме L^2.

Таблица 1.

Количество интервалов разбиения отрезка [0; 2,5]	Методы	
	Второго порядка	Третьего порядка
32	24 $2{,}4 \cdot 10^{-13}$	7 $2{,}1 \cdot 10^{-17}$
64	25 $1{,}4 \cdot 10^{-13}$	8 $1{,}8 \cdot 10^{-19}$
128	20 $8{,}3 \cdot 10^{-15}$	9 $7{,}3 \cdot 10^{-19}$
256	19 $3{,}6 \cdot 10^{-15}$	9 $2{,}5 \cdot 10^{-19}$
512	22 $4{,}7 \cdot 10^{-15}$	9 $1{,}3 \cdot 10^{-18}$

Преимущество метода третьего порядка для решения задачи Дуффинга очевидно. Считается, что более быстрые методы имеют более узкую область сходимости, но как показывает практика, если использовать регулятор длины шага по формулам (10) или (25), то метод будет иметь область сходимости не меньше, чем метод (6) и «разболтка» будет наступать значительно позже.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Жанлав Т., Пузынин И.В. О сходимости на основе непрерывного аналога метода Ньютона // Ж. выч. мат. и мат. физ. – 1992. – Т.32, № 6. – С. 846–856.
2. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона // Ж. выч. мат. и мат. физ. – 1981. – Т.21, № 2. – С. 491–497.
3. Мадорский В.М. О некоторых подходах к построению нелокальных итерационных процессов и начального приближения для одного сверхлинейного процесса // SAATS – 97: тез. докл. межд. науч. конф. – Брест, 1997. – С. 257–266.
4. Мадорский В.М. Численная локализация решений нелинейных уравнений методами третьего порядка. // SAATS – 97: тез. докл. межд. науч. конф. – Брест, 1997.— С. 241-248.
5. Ортега Дж., Рейндболт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений с многими неизвестными. М. Мир., 1975.

УДК 519.872

Семенова О.В.

ОПТИМАЛЬНОЕ ПОРОГОВОЕ УПРАВЛЕНИЕ ПОТОКОМ В СИСТЕМЕ МАССОВОГО ОБСЛУЖИВАНИЯ SM/MSP/1 С MAP-ПОТОКОМ СБОЕВ

Рассмотрена система массового обслуживания SM/MSP/1 с марковским потоком катастрофических сбоев и управляемым потоком запросов. Поступление сбоя в систему вызывает мгновенный уход всех запросов из системы. Для управления входящим потоком используется многопороговая стратегия. Найдено стационарное распределение вероятностей состояний вложенной цепи Маркова. Разработан алгоритм нахождения оптимальной пороговой стратегии управления потоком запросов.

1. ВВЕДЕНИЕ

Необходимость адекватного описания случайных процессов, имеющих место в современных информационных сетях, повышает интерес исследователей к моделям систем массового обслуживания, учитывающих особенности потоков информации в этих сетях: разноприоритетность и потребность обеспечения высокого качества обработки приоритетных потоков; ненадежность работы сети и возможность потери части информации при сбоях в системе.

Одной из таких моделей является модель управляемой системы массового обслуживания с потоком катастрофических сбоев, приводящих к потере всех запросов в системе, включая обслуживаемый запрос. Частный случай таких систем есть системы с несколькими режимами входящего потока запросов. Характерным для них является то, что режимы, в которых интенсивности поступления запросов ниже, являются более дорогими по сравнению с режимами, запросы в которых поступают интенсивнее. Выбор режима входящего потока происходит в соответствии с некоторой стратегией (например, одно-, многопороговой или гистерезисной) с целью минимизации экономического критерия качества, оценивающего эффективность работы системы. Обзор работ по управляемым системам содержится в [1-5].

Сбои, происходящие в реальных системах массового обслуживания, в том числе и сетях связи, нарушают работу систем и, в частности, приводят к потере нескольких или всех запросов. Сбои, вызывающие потерю всех запросов в системе, (disasters) являются важным частным случаем так называемого отрицательного запроса, понятие которого в 1991 году ввел Э. Геленбе [6]. Список работ по исследованию систем с отрицательными запросами и со сбоями можно найти в [6-10].

Таким образом, становится актуальным исследование управляемых систем со сбоями. Для этих систем экономический критерий качества включает штраф за потерю запросов в единицу времени, а динамическое управление системой (в частности, переключение на режим с менее интенсивным потоком запросов) позволяет уменьшить длину очереди в системе, что снижает расходы, связанные с потерей запросов из-за поступления сбоя.

Описание входящего потока запросов с помощью SM-процесса позволяет достаточно адекватно описать потоки информации в современных сетях связи, поскольку они являются коррелированными и нестационарными. В современной литературе SM-процесс также широко используют для описания процесса обслуживания запросов [9-11].

Марковский процесс обслуживания (MSP) является обобщением обслуживания фазового типа. Система G/MSP/1/r с конечным и бесконечным буфером исследована в [12].

В данной работе рассмотрена система с многорежимным потоком запросов, марковским обслуживанием и потоком катастрофических сбоев, приводящих к мгновенному уходу всех запросов из системы. Для управления потоком запросов используется многопороговая стратегия.

2. МАТЕМАТИЧЕСКАЯ МОДЕЛЬ

Рассмотрим однолинейную систему массового обслуживания с неограниченным буфером и потоком катастрофических сбоев.

Входящий поток запросов имеет n режимов, $n \geq 2$. Процесс поступления запросов в k-м режиме – SM (Semi-Markovian), задаваемый полумарковским процессом $\nu_t, t \geq 0$ с пространством состояний $\{1,...,W\}$ и полумарковским ядром $A^{(k)}(t) = \left\| A^{(k)}_{\nu,\nu'}(t) \right\|_{\nu,\nu'=\overline{1,W}}$, $k = \overline{1,n}$. Полагаем, что ядро $A^{(k)}(t)$ удовлетворяет условиям Ньютса [13] и Лукантони и Ньютса [11]. Моменты поступления запросов в систему есть моменты изменения состояний процесса $\nu_t, t \geq 0$.

Интенсивность SM-потока в k-м режиме определяется следующим образом:

$$\lambda_k^{-1} = \vec{\delta}^{(k)} \int_0^\infty t dA^{(k)}(t) \mathbf{1}, \ k = \overline{1,n},$$

где $\mathbf{1} = (1,1,...,1)^T$, $\vec{\delta}^{(k)}$ есть собственный стохастический вектор матрицы $A^{(k)}(\infty)$, соответствующий собственному значению 1, то есть

$$\vec{\delta}^{(k)} A^{(k)}(\infty) = \vec{\delta}^{(k)}, \ \vec{\delta}^{(k)} \mathbf{1} = 1, \ k = \overline{1,n}.$$

Семенова Ольга Валерьевна, *аспирант ф-та прикладной математики и информатики, НИЛ прикладного вероятностного анализа Белорусского государственного университета.*
Беларусь, БГУ, 220050, г. Минск, просп. Ф. Скорины, 4.