$$\| x^* - x_n \| \le \sum_{i=n}^{\infty} \| \Delta x_i \| < \frac{Bq_0^n \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|}{1 - q_0}, \quad (23)$$

из которой следует и сильная сходимость последовательности $\{x_n\}$ к x^*.

При $n = 0$ из (23) находим величину радиуса интересующей нас области $D = \overline{S}(x_0, r)$

$$r = \frac{B \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \|}{1 - q_0}.$$

Как следует из (19), существует такой номер n_0, что для всех $n > n_0$ итерации (3) – (5) попадают в область притяжения метода с $\beta_n \equiv 1$, так что из (19) при $n > n_0$ следует оценка

$$\| f(x_{n+1}) + g(x_{n+1}) \| \le (LB + KB^{1+p}) \| f(x_n) + g(x_n) \|^{1+p},$$

или $\varepsilon_{n+1} \le \varepsilon_n^{1+p}$, из которой следует сверхлинейная сходимость процесса (3) – (5) с $\beta_n = 1$ к x^*. Теорема доказана.

Теорема 3. Если операторы f и g недифференцируемы, но оператор первой разделенной разности $[f(x_n, y_n)]^{-1}$ по норме равномерно ограничен в интересующей нас области D, константой $B > 0$, оператор $f(x, y)$ удовлетворяет условию Липшица с некоторой константой K в смысле [6], имеет место соотношение

$$\| \beta_n g(x_{n+1}) - \beta_{n-1} g(x_{n+1}) \| \le$$
$$\le \beta_n L \| \Delta x_n \| \cdot \| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|,$$

шаговая длина β_n и начальное приближение x_0 таковы, что выполняется условие

$$\varepsilon_0 = \beta_0 (LB + KBM) \| f(x_0) + \beta_{-1} g(x_0) \| < 1,$$

то итерационный процесс (24), (4), (5) со сверхлинейной скоростью сходится к x^* – решению уравнения (1), если решение в D существует. Здесь решение системы (3) заменено решением системы (24)

$$f(x_n, y_n)(x_{n+1} - x_n) = -\beta_n (f(x_n) + g(x_n)), \quad (24)$$

$$\| E - [f(x_n, y_n)]^{-1} \| \le M, \quad y_n = x_n - \beta_n (f(x_n) + g(x_n)).$$

Доказательство сформулированной выше теоремы вполне аналогично доказательству теоремы 1.

Как показывает вычислительная практика решения существенно нелинейных задач, алгоритм, описанный выше, является более эффективным (часто на порядок) по количеству итераций, если вместо формулы (5) для определения шаговой длины использовать следующие формулы

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\| f(x_n) + \beta_{n-1} g(x_n) \|}{\| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| \beta_n}\right), \quad (25)$$

$$\beta_0, \beta_{-1} \in \left[10^{-6}, 10^{-1}\right], \ \beta_1 < \beta_0.$$

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{W_n}{2 \| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \| \beta_n}\right), \quad (26)$$

$$W_{n+1} = (1 - \beta_{n+1}) W_n + \beta_{n+1}^2 \beta_n \| f(x_{n+1}) + \beta_n g(x_{n+1}) \|,$$

$$W_0 = \gamma \| f(x_0) + g(x_0) \|, \ \gamma << 1$$

Относительно процессов, описываемых формулами (3), (4), (25) или (3), (4), (26) могут быть сформулированы и доказаны теоремы, аналогичные теоремам 1, 2, 3.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Приближение решения операторных уравнений / Красносельский М.А., Вайникко Г.М., Забрейко П.П. и др. – М.: Наука, 1969.
2. Zabrejko P.P., Nguen D.F. The Majorant method in the Theory of Newton-Kantorovich Approximations and the Ptak Error Estimates // Numer. Funct. Anal and Optimiz, 1987, 9, № 5-6, P. 671-684.
3. Perron O. Über Stabilität und asymptotisches Verhalten der Lösungen eines Systems endlicher Differenzengleichungen // J.Reine und Angew. Math, 1929, 161, S. 41-64.
4. Ортега Дж., Рейнболдт В. Итерационные методы решения нелинейных систем уравнений со многими неизвестными. – М.: Мир, 1975.
5. Жанлав Т., Пузынин И. В. О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона // ЖВМ. – 1992. – Т.32, № 6. – С 146-156.
6. Ульм С. Об обобщенных разделенных разностях // Известия АН ЭССР, физика, математика. – 1967. – Т.16, № 1. – С. 13-26.

УДК 517.519.63

Мадорский В.М., Стрилец Н.Н.

ОБ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕТОДАХ АППРОКСИМАЦИИ ПРИБЛИЖЕННЫХ РЕШЕНИЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ КРАЕВЫХ ЗАДАЧ

Рассматриваются уравнения:

1. Дуффинга

$$\ddot{x}(t) + 0.2\dot{x}(t) + x(t) + x^3(t) = F(t).$$

2. Ван-дер-Поля

$$\ddot{x}(t) - (1 - x^2(t))\dot{x}(t) + x(t) = F(t).$$

Для каждого из уравнений были исследованы два типа тестовых задач:

1. Периодическая краевая задача с граничными условиями

$$x(0) - x(2\pi) = 0, \quad \dot{x}(0) - \dot{x}(2\pi) = 0$$

и точным решением

$$x(t) = 10 \sin 3t.$$

2. Непериодическая краевая задача с граничными условиями

$$x(0) = 0, \quad x(6) = 3{,}961900249464$$

и точным решением

$$x(t) = t \cos 3t.$$

Стрилец Николай Николаевич, *ассистент каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина.*
Беларусь, БрГУ, г. Брест, бульвар Космонавтов, 21.

Предложенные задачи можно решать, например, методом пристрелки (параллельной пристрелки), конечно-разностным методом, методом квазилинеаризации и др. Среди них достаточно популярным является конечно-разностный метод.

Суть его заключается в том, что решение краевой задачи в результате дискретизации и замены производных их разностными аналогами (например, по методу неопределенных коэффициентов [1]) сводится к решению системы нелинейных уравнений. Для оценки эффективности полученного из системы (одним из итерационных процессов [2]) сеточного решения его обычно восстанавливают в аналитическом виде с последующей подстановкой в дифференциальную задачу. Всюду далее, под эффективностью будем понимать малость нормы невязки на приближенном решении. При этом эффективность оценки приближенного решения часто существенно зависит от способа аппроксимации.

Среди существующих многочисленных методов аппроксимации функций наиюолее популярными являются следующие: аппроксимация отрезком тригонометрического ряда Фурье, отрезком ряда Фурье по полиномам Чебышева I рода (далее будем рассматривать только такие полиномы, если не оговорено противное) и сплайн-аппроксимация.

Аппроксимация отрезком тригонометрического ряда Фурье, как показала вычислительная практика решения существенно нелинейных задач теории колебаний, дает хорошие результаты только для периодических задач. При этом число пар гармоник берут, как правило, примерно в два раза меньшим, чем количество узлов аппроксимации, но не более 96.

Аппроксимация отрезком ряда Фурье по полиномам Чебышева осуществлялась по формулам [3] для случая, когда число точек совпадает с числом членов разложения (полином наилучшего приближения):

$$P_n(t)=\frac{C_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}C_kT_k\left(\frac{2t-b-a}{b-a}\right),\quad t\in[a,b],$$

$$C_k=\frac{2}{n+1}\sum_{j=1}^{n+1}f(t_j)T_k\left(\frac{2t_j-b-a}{b-a}\right),\quad k=\overline{0,\ n}\ ,$$

$$t_j=\frac{b-a}{2}\tau_j+\frac{b+a}{2},\quad \tau_j=\cos\frac{2j-1}{2(n+1)}\pi,\quad j=\overline{1,\ n+1}$$

Существенным здесь является то, что в качестве узлов аппроксимации используются точки, полученные линейным преобразованием корней полинома Чебышева $T_{n+1}(t)$. При этом для получения требуемой точности (10^{-6} – 10^{-8}), как показывает вычислительная практика, нет необходимости брать большое n.

Весьма популярной в последнее время стала также и сплайн-аппроксимация функций. При этом наиболее распространенной является аппроксимация сплайном 3-ей степени [4]. Алгоритм построения такого сплайна прост для реализации на ЭВМ и устойчив к накоплению ошибок округления. Однако в ряде случаев аппроксимация кубическими сплайнами не позволяет получить требуемую точность.

В работе [5] построен сплайн, практически лишенный данного недостатка. Там же рассмотрен ряд численных примеров, позволяющих судить об эффективности предложенных подходов в задаче аппроксимации. Аналогичным образом с применением таких же идей могут быть получены формулы для сплайн-аппроксимации более высокой степени.

Рассмотрим принципиальную схему расчета применительно к сплайну 5-ой степени дефекта 1.

Пусть на отрезке $[a,b]$ задана равномерная сетка $\overline{\Delta}_n:\ a=t_0<t_1<\ldots<t_n=b$ с шагом h. Пусть также $S_5(t)$ – сплайн 5-ой степени дефекта 1, $S_5''(t_i)=A_i,\quad S_5^{\mathrm{IV}}(t_i)=B_i,\quad i=\overline{0,n}$.

При этом предполагалось, что в случае периодического сплайна имеют место периодические краевые условия

$$S_5^{(k)}(a)=S_5^{(k)}(b),\quad k=\overline{0,4},$$

а в случае непериодического сплайна – непериодические краевые условия

$$S_5^{(2k+1)}(a)=x_0^{(2k+1)},\quad S_5^{(2k+1)}(b)=x_n^{(2k+1)},\quad k=0,\ 1.$$

Тогда кусочно-многочленная форма представления сплайна 5-ой степени имеет вид:

$$S_5(t)=x_i+\left[\frac{\Delta x_i}{h}-\frac{h}{6}\left(2A_i+A_{i+1}\right)+\frac{h^3}{360}\left(8B_i+7B_{i+1}\right)\right]\times$$
$$\times\left(t-t_i\right)+\frac{A_i}{2}\left(t-t_i\right)^2+\frac{1}{6}\left[\frac{\Delta A_i}{h}-\frac{h}{6}\left(2B_i+B_{i+1}\right)\right]\left(t-t_i\right)^3$$
$$+\frac{B_i}{24}\left(t-t_i\right)^4+\frac{\Delta B_i}{120h}\left(t-t_i\right)^5,\quad t\in[t_i,t_{i+1}],\quad i=\overline{0,n-1},$$

где параметры $A_i,\ B_i$ определяются из линейной системы порядка $2n$:

$$\begin{cases}\frac{1}{6}(4A_0+A_1+A_{n-1})-\frac{h^2}{360}(16B_0+7B_1+7B_{n-1})=\\ =\frac{-2x_0+x_1+x_{n-1}}{h^2},\\ \frac{1}{6}(A_{i-1}+4A_i+A_{i+1})-\frac{h^2}{360}(7B_{i+1}+16B_i+7B_{i+1})=\\ =\frac{\Delta^2x_{i-1}}{h^2},\quad i=\overline{1,n-2}\ ,\\ \frac{1}{6}(A_0+A_{n-2}+4A_{n-1})-\frac{h^2}{360}(7B_0+7B_{n-2}+16B_{n-1})h^2=\\ =\frac{x_0+x_{n-2}-2x_{n-1}}{h^2}\ ,\\ 2A_0-A_1-A_{n-1}+\frac{h^2}{6}(4B_0+B_1+B_{n-1})=0\ ,\\ -A_{i-1}+2A_i-A_{i+1}+\frac{h^2}{6}(B_{i-1}+4B_i+B_{i+1})=0,\\ i=\overline{1,n-2}\ ,\\ -A_0-A_{n-2}+2A_{n-1}+\frac{h^2}{6}(B_0+B_{n-2}+4B_{n-1})=0\ ;\end{cases}$$

если $x(t)$ – периодическая функция, и из линейной системы порядка $2n+2$:

$$\begin{cases} \dfrac{1}{6}(2A_0 + A_1) - \dfrac{h^2}{360}(8B_0 + 7B_1) = \dfrac{\Delta x_0}{h^2} - \dfrac{x_0'}{h}\ , \\ \dfrac{1}{6}(A_{i-1} + 4A_i + A_{i+1}) - \dfrac{h^2}{360}(7B_{i+1} + 16B_i + 7B_{i+1}) = \\ = \dfrac{\Delta^2 x_{i-1}}{h^2}, \quad i = \overline{1, n-1}\ , \\ \dfrac{1}{6}(A_{n-1} + 2A_n) - \dfrac{h^2}{360}(7B_{n-1} + 8B_n) = \dfrac{x_n'}{h} - \dfrac{\Delta x_{n-1}}{h^2}\ , \\ A_0 - A_1 + \dfrac{h^2}{6}(2B_0 + B_1) = -6x_0'''h\ , \\ -A_{i-1} + 2A_i - A_{i+1} + \dfrac{h^2}{6}(B_{i-1} + 4B_i + B_{i+1}) = 0, \\ i = \overline{1, n-1}\ , \\ -A_{n-1} + A_n + \dfrac{h^2}{6}(B_{n-1} + 2B_n) = 6x_n'''h\ . \end{cases}$$

если $x(t)$ – непериодическая функция.

Аппроксимация рассмотренной выше модификацией сплайна 5-ой степени позволяет получить требуемую точность, если взять достаточно большое количество узлов (не меньше 257). Однако при этом существенно возрастают временные затраты. Поэтому можно использовать вторую модификацию сплайна 5-ой степени [5], которая в случае периодических задач проигрывает по точности аппроксимации первой модификации на 1-2 порядка (для непериодических задач она сравнима по точности со сплайном 3-ей степени), зато существенно выигрывает по временным затратам. Из работы [6] следует, что для достаточно густых сеток равенства $A_i = x''(t_i),\quad i = \overline{0, n}$ выполняются в пределах точности вычислений. Если теперь вторые производные функции аппроксимировать по методу неопределенных коэффициентов то можно считать параметры A_i известными. Тогда $S_5''(t)$ можно рассматривать как сплайн 3-ей степени, и оставшиеся параметры B_i легко находятся из систем для определения коэффициентов такого сплайна [4].

Описанные выше сплайны задаются локально, т. е. на каждом частичном отрезке требуются свои коэффициенты. В работе [7] построены естественные сплайны произвольной степени, которые задаются глобально (на всем отрезке).

Пусть на отрезке $[a, b]$ задана сетка $\overline{\overline{\Delta}}_n:\ a = t_0 < t_1 < ... < t_n = b$. Тогда естественный сплайн k - ой степени имеет вид:

$$S_k(t) = x(t_0) + \sum_{i=0}^{k} a_i (t - t_0)^i + \sum_{j=1}^{n-1} b_j (t - t_j)_+^k,$$

$$\varphi_+ = \frac{1}{2}(\varphi + |\varphi|).$$

Если $x(t)$ – периодическая функция, то коэффициенты определяются из системы:

$$\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{k} a_i (t_p - t_0)^i + \sum\limits_{j=1}^{p-1} b_j (t_p - t_n)^k = x_p - x_0, \quad p = \overline{1, n}\ , \\ \sum\limits_{i=p}^{k} \dfrac{i!}{(i-p)!} a_i (t_n - t_0)^{i-p} + \dfrac{k!}{(k-p)!} \sum\limits_{j=1}^{n-1} b_j (t_n - t_j)^{k-p} = \\ = \begin{cases} 0, & при\ \ p = 0\ , \\ p!\,a_p, & p = \overline{1, k-1} \end{cases} \end{cases}$$

Если $x(t)$ – непериодическая функция, то поступают следующим образом. Решая систему

$$\begin{cases} \sum\limits_{p=1}^{n} \lambda_p (t_p - t_0)^i = 0, \quad i = \overline{0, k}\ , \\ \sum\limits_{i=1}^{k} a_i (t_p - t_0)^i + \sum\limits_{q=2}^{n} \lambda_q \sum\limits_{j=1}^{\min(p,q)-1} \dfrac{(t_p - t_j)^k (t_q - t_j)^k}{r_j} = \\ = x_p - x_0, \quad p = \overline{1, n}\ , \end{cases}$$

определяют коэффициенты $a_i,\ \lambda_q$. Оставшиеся коэффициенты b_j находят из соотношений

$$b_j = \frac{1}{r^j} \sum_{p=j+1}^{n} \lambda_p (t_p - t_j)^k, \quad r_j = \frac{\rho_j}{t_{j+1} - t_{j-1}}, \quad j = \overline{1, n-1}\,,$$

где ρ_j – весовые коэффициенты.

Точность аппроксимации, как показала вычислительная практика, с помощью естественных сплайнов для периодических задач возрастает с увеличением числа узлов и степени, при этом для нечетных степеней результат лучше. Алгоритм построения естественного сплайна неустойчив к накоплению погрешностей округления [7], и поэтому точность аппроксимации со значительным увеличением числа узлов и степени падает. Кроме того, алгоритм реализации естественных сплайнов требует больших вычислительных затрат для достаточно густых сеток.

Численный эксперимент и обсуждение его результатов

Восстановление сеточного решения для дифференциальной задачи производилось как на равномерной, так и на неравномерной сетках. При этом аппроксимация отрезком тригонометрического ряда Фурье, кубическим сплайном, сплайном 5-ой степени осуществлялась только на равномерной сетке, аппроксимация отрезком ряда Фурье по полиномам Чебышева – на неравномерной сетке (состоящей из корней полинома Чебышева соответствующей степени), аппроксимация естественным сплайном произвольной степени – на обеих сетках. В качестве неравномерной сетки для решения дифференциальных краевых задач хорошо себя зарекомендовали две модификации комбинированной сетки. Как уже было сказано, для получения требуемой точности при аппроксимации отрезком ряда Фурье по полиномам Чебышева нет необходимости, и, более того, нецелесообразно брать большое число точек (например, более чем 65). Поэтому первую модификации комбинированной сетки составляют 65 корней полинома Чебышева $T_{65}(t)$ и $n - 65$ равноотстоящих узлов, расположенные в порядке возрастания. Вторая модификация отличается тем, что для каждого корня полинома Чебышева в предварительно заполненной равномерной сетке ищут ближайший к нему узел и осуществляют замену. При этом дифференциальная задача решается по всей сетке, а аппроксимация (отрезком ряда Фурье по полиномам Чебышева) – только по 65 корням полинома $T_{65}(t)$. Аппроксимация естественным сплайном произвольной степени осуществлялась по всем точкам неравномерной сетки.

Общее количество точек сетки варьировалось от 65 до 513 (65, 129, 257, 513). Для аппроксимации производных по методу неопределенных коэффициентов использовались от 9 до 13 (9, 11, 13) точек. Нелинейная система решалась с точностью от 10^{-13} до 10^{-11}.

Как показал вычислительный эксперимент, в случае периодических задач для аппроксимации наиболее эффективными оказались отрезок тригонометрического ряда Фурье, отрезок ряда Фурье по полиномам Чебышева, сплайн 5-ой степени, естественный сплайн высокой (7, 9, 11) степени. В случае непериодических задач наиболее эффективными оказались отрезок ряда Фурье по полиномам Чебышева и сплайн 5-ой степени. Как для периодических, так и для непериодических задач точность аппроксимации естественным сплайном слабо зависит от способа заполнения сетки.

Особо следует отметить два момента.

Во-первых, на точность сеточного решения, а, следовательно, и на точность восстановленного приближенного решения существенное влияние оказывает способ аппроксимации производных. В тестовых задачах, например, при аппроксимации 2-ых производных по методу неопределенных коэффициентов точность находится в пределах от 1e-6 до 1e-8.

Во-вторых, норма невязки на приближенном решении будет существенно больше (на 1-4 порядка) нормы отклонения точного решения от приближенного. В тестовых задачах эти значения составляли $10^{-5}-10^{-8}$ и $10^{-8}-10^{-10}$ соответственно. С другой стороны, норма невязки на приближенном решении не выше отклонения 2-ой производной точного решения от 2-ой производной приближенного решения.

Резюмируя вышесказанное, можно дать следующие рекомендации по аппроксимации сеточных (приближенных) решений задач теории колебаний: в случае периодических колебательных процессов для получения приближенного решения в аналитическом виде из сеточного рекомендуется использовать аппроксимацию отрезком тригонометрического ряда Фурье, в непериодическом случае предлагается восстанавливать приближенное решение дифференциальной краевой задачи отрезком ряда Фурье по полиномам Чебышева I рода или сплайном 5-ой степени.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Березин И. С., Жидков Н.П. Методы вычислений. В 2-х т.: Т. 1. – М., 1966.
2. Мадорский В. М. Локализация решений нелинейных уравнений // Труды Института математики НАН Беларуси – Минск, 2002. – Т. 11. – С. 96 – 103.
3. Корн Г., Корн Т. Справочник по математике (для научных работников и инженеров). – М., 1974. – 832 с.
4. Макаров В.Л., Хлобыстов В.В. Сплайн-аппроксимация функций. – М, 1983.
5. Мадорский В. М., Стрилец Н. Н. К вопросу аппроксимации функций сплайном пятой степени // Вестник Брестского ун-та. – 2002. – № 4. – С. 24 – 32.
6. Алберг Дж., Нильсон Э., Уолш Дж. Теория сплайнов и ее применения. – М., 1972.
7. Калиткин Н.Н., Кузьмина Л.В. Естественные сплайны произвольной степени// Доклады РАН. – 1966. – Т. 351. № 6. – С. 738-742.

УДК 517.948

Мадорский В.М., Черноокий А.Л.

ПРИМЕНЕНИЕ НЕЛОКАЛЬНЫХ ИТЕРАЦИОННЫХ МЕТОДОВ ЛОКАЛЬНО СХОДЯЩИХСЯ С КУБИЧЕСКОЙ СКОРОСТЬЮ ДЛЯ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЯ ДУФФИНГА

Модели, описываемые уравнением Дуффинга, имеют широкое применение в различных областях знаний, особенно в тех, где рассматриваются колебательные и циклические процессы. Помимо этого, уравнение Дуффинга является достаточно содержательной моделью для изучения численного решения нелинейных краевых задач.

Будем рассматривать краевую задачу для уравнения типа Дуффинга

$$a\ddot{x}(t)+b\dot{x}(t)+cx(t)+dx^{p}(t)=F(t),\qquad p\in\mathbf{N} \tag{1}$$

Исследуем непериодическую задачу. В частности, будем рассматривать на отрезке [0; 2,5] краевую задачу (1) при p=3

$$\begin{gathered}\ddot{x}(t)+\dot{x}(t)+x^{3}(t)=F(t),\\ x(0)=\gamma_0,\quad x(2,5)=\gamma_1,\end{gathered} \tag{2}$$

с правой частью вида

$$F(t)=t^{6}+2t+2. \tag{3}$$

Точное решение этой задачи при γ_0=0 и γ_1=6,25 равно x^2.

Одним из наиболее популярных численных методов решения нелинейных дифференциальных задач является метод конечных разностей.

Для этого область непрерывного изменения аргумента заменяется дискретным множеством точек, которые составляют разностную сетку. Искомая функция непрерывного аргумента приближенно заменяется функцией дискретного аргумента на заданной сетке. Эта функция называется сеточной. При этом для входящих в уравнение производных используются соответствующие конечно-разностные аппроксимации. Такая замена дифференциального уравнения разностным называется его аппроксимацией на сетке (или разностной аппроксимацией). Таким образом, решение дифференциального уравнения сводится к отысканию значений сеточной функции в узлах сетки, тем самым решение краевой задачи фактически сводится к решению систем нелинейных уравнений.

Для хорошей аппроксимации производных необходимо использовать значения функции во многих узлах, так как порядок точности соотношений для аппроксимации производных прямо пропорционален числу узлов, используемых при аппроксимации. Однако, слишком большое количество узлов ведет к накоплению погрешности, связанной с округлением в вычислительном процессе. Формулы для аппроксимации производных по произвольному количеству точек, а также для случая неравномерной сетки можно получить, используя метод неопределённых коэффициентов.

Искомое выражение для производной k-го порядка в некоторой точке $t=t_i$ представляется в виде

Черноокий Александр Леонидович, *ассистент каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина.*
Беларусь, БрГУ, г. Брест, бульвар Космонавтов, 21.