

Частое повторение ситуации $\tau - h \in T_{on}^0(\tau - h)$ означает, что в замкнутой системе (10) возник дискретный аналог скользящего режима. Способы регуляризации скользящего режима в рамках рассматриваемого подхода описаны в [3].

УДК 539.3

Босяков С.М.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ И КЛАССИФИКАЦИЯ КУБИЧЕСКИ АНИЗОТРОПНЫХ СРЕД

ВВЕДЕНИЕ

Достаточно полный анализ закономерностей распространения упругих волн в кубических анизотропных средах проведен в большом количестве публикаций, в том числе [1—4]. В них большое место уделено исследованию особенностей кривых высшего порядка (кривые обратных скоростей, волновые фронты). Некоторые из них, например параболические точки на кривых обратных скоростей (точки возврата на волновых фронтах) [5, 6], легли в основу классификации анизотропных сред. Так, в [6] выделены десять групп гексагонально-анизотропных сред, а также четыре основные и три промежуточные группы кубически анизотропных сред с общими для каждой группы упругими свойствами. Классификация проведена по точкам перегиба кривых обратных скоростей одной из квазипоперечных волн, указывающих на возникновение лагун и их количество. Однако, несмотря на полноту исследования, осталось неучтенным появление лагун на волновом фронте второй квазипоперечной волны. Ниже предлагается классификация кубически анизотропных сред, опирающаяся на трехмерные представления волновых движений в кубически анизотропных средах, которые позволяют одновременно учесть особенности распространения двух квазипоперечных волн.

ОПРЕДЕЛЯЮЩИЕ СООТНОШЕНИЯ

Уравнения движения кубически анизотропных сред при отсутствии массовых сил имеют следующий вид:

$$\begin{aligned} & (A_4 \Delta + (A_1 - A_2 - 2A_4) \partial_i^2) u_i + \\ & + (A_2 + A_4) \partial_i \sum_{k=1}^3 \partial_k u_k = \rho \ddot{u}_i, \end{aligned} \quad (1)$$

где $\vec{u} = (u_1, u_2, u_3)$ — вектор перемещений; A_1, A_2, A_4 — постоянные упругости в основной кристаллографической системе координат; ρ — плотность среды;

$\Delta = \partial_1^2 + \partial_2^2 + \partial_3^2$; $\partial_i = \frac{\partial}{\partial x_i}$; $i = \overline{1, 3}$; точка обозначает дифференцирование по времени.

Выражения для координат точек среды $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$, до которых дошла энергия волнового возмущения к моменту времени t , запишем, следуя [7], виде:

$$x_j^{(k)} = \frac{ct}{\sqrt{1 + \frac{a}{3} - 2\sqrt{-\frac{p}{3}} \cos(\Lambda_k + 2\pi k)}} \left(2 \cos \alpha_j \left(1 + \frac{a}{3} \right) + \right.$$

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Габасов Р., Дмитриук Н.М., Кириллова Ф.М. Оптимизация многомерных систем управления с параллелепипедными ограничениями // АИТ. 2002. № 3. С. 3 - 26.
2. Габасов Р., Кириллова Ф.М. Оптимизация линейных систем. Минск: Изд-во БГУ, 1973.
3. Балашевич Н. В., Габасов Р., Кириллова Ф.М. Субоптимальный регулятор, сглаживающий управления и фильтрующий высокочастотные возмущения на участках скольжения // Изв. РАН. Техн. кибернетика. 1993. № 6. С. 25 - 32.

$$\begin{aligned} & + \sqrt{3} \left(\frac{p_j^*}{\sqrt{-p}} \cos(\Lambda_k + 2\pi k) + \frac{1}{3} \frac{\sqrt{4p^3} \sin(\Lambda_k + 2\pi k)}{\sqrt{4p^3 + 27q^2}} \sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3} \times \right. \\ & \left. \times \left(q_j^* + \frac{9\sqrt{3} q}{2 p} p_j^* \right) \right) \end{aligned} \quad (3)$$

где $a = \frac{A_1}{A_4} - 1$; $b = \frac{A_2}{A_4} + 1$; $\Lambda_k = \arccos \left(-\frac{q}{2} \sqrt{-\left(\frac{3}{p}\right)^3} \right)$;

$$\begin{aligned} & p = -\frac{a^2}{3} + (a^2 - b^2)m; \quad q = \frac{2a^3}{27} - \frac{a(a^2 - b^2)m}{3} + \\ & + (a^3 - 3ab^2 + 2b^3)n; \quad p_j^* = 2(a^2 - b^2) \cos \alpha_j \times (1 - \cos^2 \alpha_j) - \\ & - \frac{4a^2 \cos \alpha_j}{3}; \quad q_j^* = \frac{4a^3}{9} - \frac{2a}{3}(a^2 - b^2)(m \cos \alpha_j + \cos \alpha_j(1 - \cos^2 \alpha_j)) \\ & + 2(a^3 - 3ab^2 + 2b^3) \cos \alpha_j (m - \cos^2 \alpha_j (1 - \cos^2 \alpha_j)); \end{aligned}$$

$$m = \sum_{i \neq j=1}^3 \cos^2 \alpha_i \cos^2 \alpha_j; \quad n = \cos^2 \alpha_1 \cos^2 \alpha_2 \cos^2 \alpha_3;$$

$\cos \alpha_j$ — направляющие косинусы нормали к волновой поверхности; $c = \sqrt{A_4/\rho}$; $j = \overline{1, 3}$.

В формулах (3) $k = 1$ соответствует квазипродольной волне, $k = 2, 3$ - квазипоперечным волнам.

С помощью (3) можно построить безразмерные волновые поверхности квазипродольной (L_1) и квазипоперечных волн (L_2 и L_3) для кубически анизотропных материалов, а также их сечения в плоскостях, проходящих через начало основной системы координат, задавая в (3) соответствующим образом направляющие косинусы нормали к характеристической поверхности. Для расчета абсолютных значений координат $(x_1^{(k)}, x_2^{(k)}, x_3^{(k)})$ в момент времени t , следует умножить безразмерные значения, приведенные ниже на рисунках, на ct .

Заметим, что волновые фронты квазипоперечных волн, распространяющихся в кубически анизотропных средах, хорошо изучены в координатных плоскостях, и результаты исследований нашли отражение в достаточно большом количестве работ.

Босяков Сергей Михайлович, доцент каф. теоретической и прикладной математики Белорусского государственного университета. Беларусь, БГУ, г. Минск.

стве работ, например [2, 6]. Однако анализ трехмерных волновых поверхностей показывает, что более целесообразным является построение волновых фронтов в координатных плоскостях системы $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3)$ (см. рис. 1), поскольку в этом случае можно обнаружить возникновение лакун, как в координатной плоскости $x_3 = 0$, так и в плоскости $\bar{x}_1 = 0$ (или $\bar{x}_2 = 0$). Поэтому, чтобы выделить группы кубически анизотропных материалов с присущими только им свойствами рассмотрим характерные волновые фронты квазипоперечных волн в плоскостях $\bar{x}_1 = 0$ и $x_3 = 0$. Те же результаты можно получить, рассматривая сечения волновых поверхностей плоскостями $\bar{x}_2 = 0$ и $x_1 = 0$ (или $x_2 = 0$).

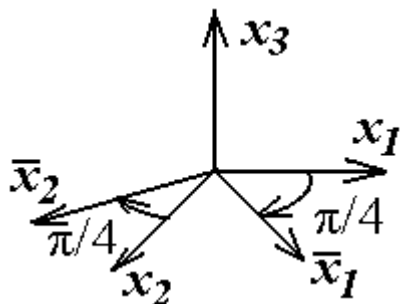


Рис. 1. Основная и вспомогательная системы координат $(\bar{x}_1, \bar{x}_2, x_3)$.

К первой группе отнесем те кубически анизотропные материалы, для которых волновые фронты квазипоперечных волн имеют вид кривых, представленных на рис. 1 ($a = 0.98, b = 2.18$).

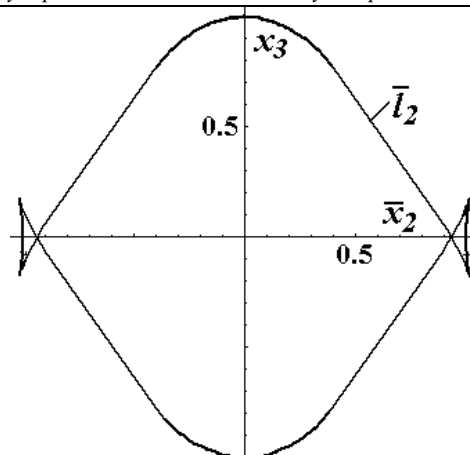
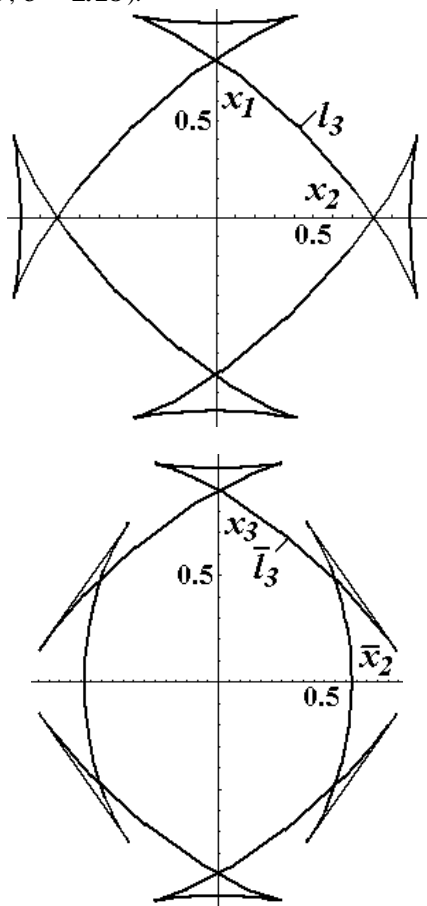


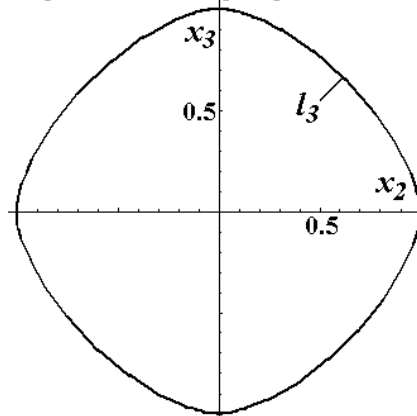
Рис. 1. Волновые фронты l_1, l_2 и l_3 квазипоперечных волн в плоскостях $x_3 = 0$ и $\bar{x}_1 = 0$ для кубически анизотропных материалов первой группы.

Кубически анизотропные среды этой группы характеризуются двумя лакунками на волновом фронте l_2 , шестью лакунками на волновом фронте l_3 в плоскости $\bar{x}_1 = 0$, а также четырьмя лакунками на волновом фронте l_3 в плоскости $x_3 = 0$ (аналогичный вид кривая l_3 имеет в плоскостях $x_1 = 0$ и $x_2 = 0$). К этой группе принадлежат, например латунь, медь, свинец, никель, германий, кремний и многие другие материалы, представляющие большой практический интерес.

Вторую группу кубически анизотропных сред образуют алюминий, алмаз и др., волновые фронты которых показаны на рис. 2 (построения выполнены для материала с константами $a = 2.8, b = 3.15$).

Из рис. 2 видно, что в кубически анизотропных средах второй группы лакунки возникают на волновой поверхности l_3 (об этом свидетельствуют четыре лакунки на волновом фронте l_3 в плоскости $\bar{x}_1 = 0$). На волновой поверхности l_2 лакунки отсутствуют. Между первой и второй группами может существовать промежуточная группа кубически анизотропных материалов, для которых волновой фронт l_3 аналогичен кривой l_3 представленной на рис. 1, а волновой фронт l_2 не имеет лакун (см. рис. 2).

К третьей группе кубически анизотропных сред отнесем материалы, в которых не возникает лакун при распространении квазипоперечных волн, например кварц, вольфрам.



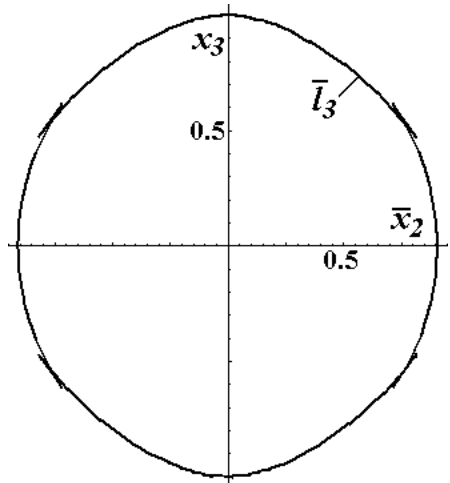


Рис. 2. Волновые фронты l_3 и \bar{l}_2 , \bar{l}_3 квазипоперечных волн в плоскостях $x_3 = 0$ и $\bar{x}_1 = 0$ для кубически анизотропных материалов второй группы.

Волновые фронты квазипоперечных волн в плоскости $\bar{x}_1 = 0$ четвертой группы кубически анизотропных материалов группы аналогичны фронтам \bar{l}_2 и \bar{l}_3 для сред второй группы (см. рис. 2). Отличие сред второй и четвертой группы можно обнаружить с помощью сечений волновых поверхностей L_2 и L_3 координатной плоскостью $x_3 = 0$. На рис. 4 представлены волновые фронты l_2 и l_3 сред второй ($a = 2.8$, $b = 3.15$) и четвертой групп ($a = 3.18$, $b = 2.6$).

Как следует из рис. 3, в кубически анизотропных средах второй группы в плоскости $x_3 = 0$ фронт l_2 (поперечная волна) является окружностью и опережает фронт l_3 (квазипоперечная волна). В материалах четвертой группы фронт l_3 является окружностью и отстает от фронта l_2 квазипоперечной волны. Такое поведение волновых фронтов второй и четвертой групп можно объяснить различным знаком параметра $\epsilon = (A_1 - A_2 - 2A_4)/A_4$, характеризующим анизотропию материала [2]. В таблице 1 приведены значения параметра ϵ для некоторых кубически анизотропных сред (числовые значения констант упругости взяты из [8, 9]).

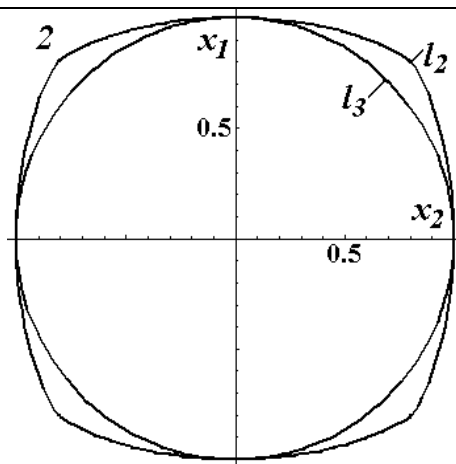
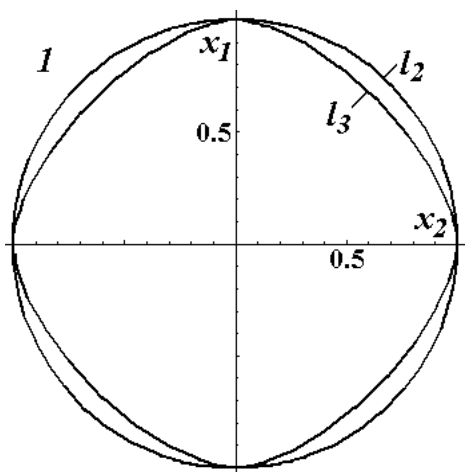
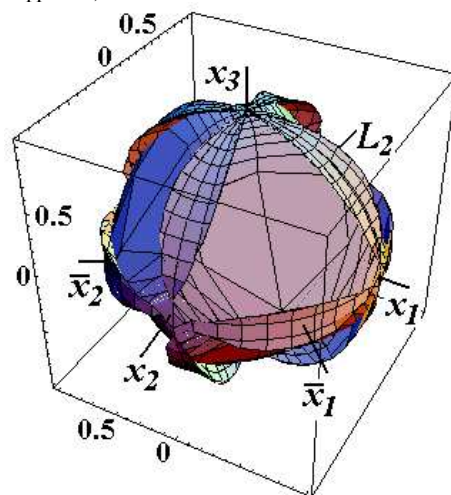


Рис. 3. Волновые фронты l_2 и l_3 квазипоперечных волн в плоскости $x_3 = 0$ для кубически анизотропных материалов: 1 — второй группы; 2 — четвертой группы.

Таблица. Значения механических констант и параметра ϵ

Группа	Материал	A_1	A_2	A_4	ϵ
5	галенит	12.7	2.98	2.48	1.92
4	молибден	46	17.6	11.0	0.582
3	вольфрам	50.1	19.8	15.14	0.001
2	алюминий	10.82	6.13	2.85	-0.354
1	никель	24.65	14.73	12.47	-1.205

Анализ волновых фронтов l_2 для кубически анизотропных материалов, постоянные упругости которых удовлетворяют неравенству $\epsilon = (A_1 - A_2 - 2A_4)/A_4 < 0$, показывает, что волновой фронт, построенный с помощью формул (3), в любой координатной плоскости является окружностью. Однако это выполняется не всегда. Поверхность L_2 квазипоперечной волны и ее сечение плоскостью $\bar{x}_1 = 0$ (или $\bar{x}_2 = 0$) позволяет уточнить вид кривой l_2 в координатных плоскостях для материалов четвертой группы. На рис. 4 представлена поверхность L_2 квазипоперечной волны и «приближенный» фронт l_2 для материала второй группы с константами $a = 0.98$, $b = 2.18$ (под «приближенным» волновым фронтом понимается кривая, мало отличающаяся от истинного волнового фронта).



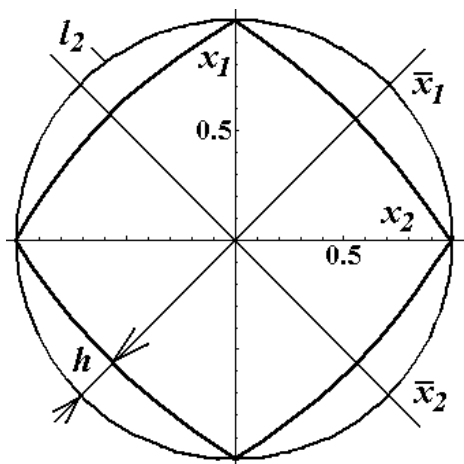


Рис. 4. Поверхность L_2 и приближенный фронт l_2 квазиперечной волны в плоскости $x_3 = 0$ кубически анизотропных материалов первой группы.

Расстояние h , обозначенное на рис. 4, равно расстоянию между точкой пересечения линий волнового фронта \bar{l}_2 и точкой пересечения фронта с координатной осью \bar{x}_2 .

Анализ показывает, что в большинстве кубически анизотропных сред, константы упругости которых удовлетворяют неравенству $\epsilon > 0$, волновой фронт l_3 в любой координатной плоскости является окружностью.

Обратимся к кубически анизотропным средам пятой группы. Волновой фронт l_3 для материала этой группы приведен на рис. 5 ($a = 4.12$, $b = 2.2$). К средам этой группы относятся галенит, флюорит, пирит, химические соединения (бромистый калий, хлористое серебро и др.) щелочных металлов и др.

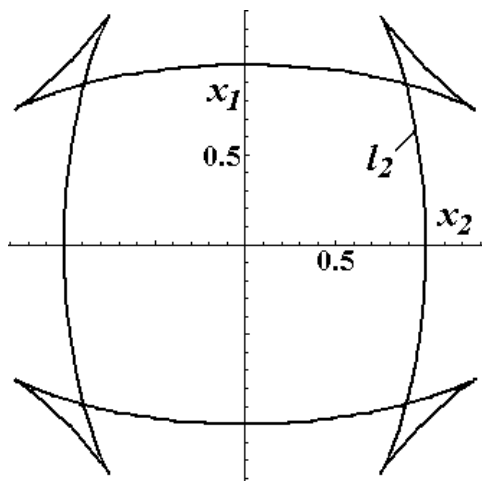


Рис. 5. Фронт l_2 квазиперечной волны в плоскости $x_3 = 0$ кубически анизотропной среды пятой группы.

Волновые фронты \bar{l}_2 и \bar{l}_3 для сред пятой группы имеют вид аналогичный l_2 (см. рис. 5), и также как и l_3 , содержат лакуны в четырех координатных четвертях. Здесь следует обратить внимание на волновую поверхность L_2 , поскольку она содержит участки, на которых происходит наложение трех лакун одновременно. На появление таких областей ука-

зано в [10], однако обнаружить их с помощью только лишь двумерных кривых не представляется возможным. На рис. 6 показаны трехмерный и двумерный волновые фронты L_2 и \bar{l}_2 для материала пятой группы при $a = 4.74$, $b = 2.06$.

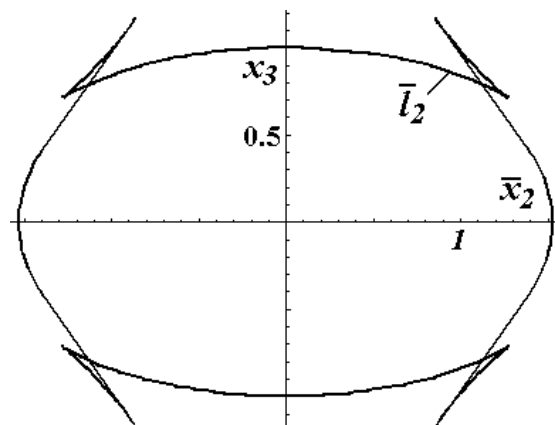
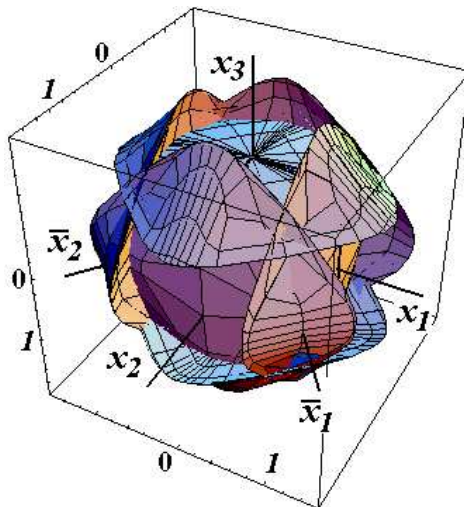


Рис. 6. Волновая поверхность L_2 и ее сечение плоскостью $\bar{x}_3 = 0$ кубически анизотропного материала пятой группы.

Таким образом, можно выделить пять основных групп кубически анизотропных сред, каждая из которых характеризуется только ей присущими особенностями, проявляющимися, в частности, при распространении упругих квазиперечных волн. Анализ трехмерных волновых фронтов L_2 и L_3 показывает, что в большинстве кубически анизотропных материалов происходит возникновение лакун. Исключение составляют кубически анизотропные среды третьей группы, близкие по своим упругим свойствам к изотропным телам. Важным с практической точки зрения можно считать обнаружение четырех лакун в плоскости $\bar{x}_1 = 0$ ($\bar{x}_2 = 0$) алмаза, поскольку в области лакун одновременно существуют три квазиперечные волны.

Работа выполнена при поддержке Белорусского республиканского фонда фундаментальных исследований (проект № Ф03М-171).

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Musgrave M.J.P. Crystal Acoustics. San-Francisco: Holden-Day. 1970. 282 p.

2. Дьелесан Э., Руайе Д. Упругие волны в твердых телах. Применение для обработки сигналов. М.: Наука. 1982. 424 с.
3. Петрашень Г. И. Распространение волн в анизотропных упругих средах. Л.: Наука 1980. 284 с.
4. Подгорный А. Н., Гузь И. С., Дружинин А. Г. Волновой фронт, возбуждаемый нестационарным источником в однородной анизотропной среде // Прикл. механика. 1976. Т. 12, № 12. С. 51—56.
5. Musgrave M. J., Payton R. G. Criteria for elastic waves in anisotropic media – a consolidation // J. Elast. 1984. Vol.14. № 3. P. 269—285.
6. Будаев В. С. Корни характеристического уравнения и классификация анизотропных сред // Известия АН СССР. МТТ 1978. № 3. С. 33—40.
7. Мартыненко М. Д., Босяков С. М. Построения трехмерных волновых поверхностей и их сечений в динамической теории упругости кубически анизотропных сред // Вестник БГТУ, 2002, № 4, С. .
8. Современная кристаллография Т. IV. Физические свойства кристаллов. М.: Наука. 1984. 584 с.
9. Хантингтон Г. Упругие постоянные кристаллов // УФН. 1961. Т. 74. № 3. С. 461—520.
10. Гутфельд Р. Распространение тепловых импульсов // Физическая акустика. Т. V. Под ред. У. Мэзона. Москва: Мир, 1973. С. 267—329.

УДК 697.137.2

Афонин А.В.

МОДЕЛЬ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ВЛАГИ В КАПИЛЛЯРНО-ПОРИСТЫХ МАТЕРИАЛАХ В УСЛОВИЯХ СОРБЦИОННОГО ГИСТЕРЕЗИСА

1. ВВЕДЕНИЕ

Строительные капиллярно-пористые материалы и изделия, такие, как бетон, керамический и силикатный кирпич, асфальтобетоны и т. д. при эксплуатации в ограждениях зданий, а также в дорожных покрытиях подвергаются интенсивным атмосферным изменениям температуры и влажности. Влага, проникающая в материал, способна вызвать его разрушение множеством способов, начиная с изменения напряженно-деформированного состояния, прочностных свойств, поровой структуры, и заканчивая потерей устойчивости к биологическим, низко- и высокотемпературным воздействиям. Таким образом, для правильной оценки срока службы материала (его долговечности) необходимо в первую очередь иметь возможность определять температурно-влажностные поля, возникающие в нем в процессе эксплуатации.

Для определения этих полей расчетным путем следует иметь информацию об уравнениях, описывающих процессы переноса влаги, и о коэффициентах, входящих в эти уравнения. Такую информацию можно получить с помощью моделирования поровой структуры материала, а также равновесия и процессов переноса влаги.

Данная статья является продолжением работ [1-5] и посвящена дальнейшему теоретическому уточнению полученных в них результатов. В этих работах были построены модели для вычисления коэффициентов влагопроводности и паропроницаемости, входящих в известные [6, 7] уравнения изотермического переноса влаги в капиллярно-пористых материалах. Эти уравнения не учитывают, однако, существенной для многих материалов разницы между процессами сорбции и десорбции (сорбционного гистерезиса). Целью данной работы является теоретическое получение уравнений, описывающих процессы переноса влаги в условиях сорбционного гистерезиса, а также установление аналитических выражений для коэффициентов, входящих в эти уравнения, путем моделирования.

В настоящее время процессы переноса влаги в условиях сорбционного гистерезиса почти не исследованы как теоретически, так и экспериментально (не существовало даже уравнений, описывающих эти процессы). Поэтому сравнение с опытными данными в настоящей работе не приводится.

2. ПАРАМЕТРЫ МАТЕРИАЛА

Для описания необходимых свойств материала нам будет достаточно знаний о двух функциях:

- 1) дифференциальной функции распределения объема пор по радиусам $f_v(r)$, где r – радиус поры (капилляра);
- 2) изотерме расклинивающего давления $\Pi(h)$, где h – толщина адсорбционного слоя (смачивающей пленки).

2.1. Распределение объема пор по радиусам

Как и в [3, 8], определим дифференциальную функцию распределения объема пор по радиусам следующим образом. Выражение $f_v(r)dr$ равно отношению объема пор с радиусами от r до $r+dr$ в некотором участке материала к объему этого участка. При этом пористость материала P вычисляется как

$$P = \int_0^{\infty} f_v(r) dr. \quad (1)$$

Дифференциальная функция распределения объема пор по радиусам может быть измерена при помощи ртутного порометра.

2.2. Изотерма расклинивающего давления

Изотерма расклинивающего давления $\Pi(h)$, введенная и изученная Б.В. Дерягиным и др. [9-12], характеризует сорбционные свойства вещества, из которого состоит скелет материала. Для плоской равновесной смачивающей пленки толщиной h расклинивающее давление Π равно взятому с обратным знаком химическому потенциалу пленки, деленному на молярный объем жидкости. Поскольку химический потенциал пленки совпадает с химическим потенциалом находящегося над ней водяного пара, то для плоских адсорбционных слоев справедлива формула [9-11]:

$$\Pi(h) = \frac{\rho RT}{M} \ln \frac{E}{e}, \quad (2)$$

где ρ – плотность жидкости, R – универсальная газовая постоянная, T – абсолютная температура, M – молярная масса водяного пара, e – парциальное давление (упругость) водяного пара, E – максимальная упругость водяного пара при данной температуре.

*Афонин Александр Владимирович, аспирант каф. технологии бетона и строительных материалов Брестского государственного технического университета.
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.*