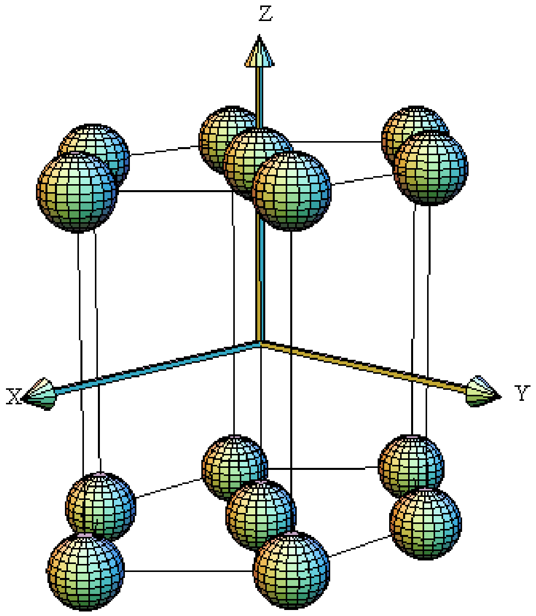

Рис. 5.

Возможности пакета «Mathematica» не ограничиваются рассмотренными примерами, для вывода на экран изображений различных решеток и структур можно, например, использовать подпакет **MolecularGraphics**, в котором рисование химических связей между атомами облегчено наличием специальной процедуры, требуется только задать координаты узлов кристаллической решетки, и ближайшие атомы будут соединены прямыми линиями. Для повышения наглядности обучения можно комбинировать различные подходы к визуализации кристаллических решеток при изучении дисциплины «Физика твердого тела».

Опыт проведения занятий по курсу «Физика твердого тела» в компьютерном классе показывает, что даже несколько простых примеров строения кристаллических решеток на экране, которые можно повернуть в любую сторону с помощью мыши в реальном времени, значительно улучшают восприятие лекционного материала. Таким образом, визуализация кристаллических решеток способствует формированию у студентов современных представлений о твердых телах и о связи особенностей их структуры с различными физическими свойствами.

Данная работа выполнена в рамках исследовательского проекта “Моделирование и решение прикладных задач по курсу “Физика твердого тела” в комьютерной алгебре “Mathematica” по сотрудничеству между Брестским государственным техническим университетом и Fachhochschule Ravensburg-Weingarten.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Wolfram S. The Mathematica book. 4 th ed. Addison-Wesley, 1999.
2. Блейкмор Дж. Физика твердого тела. М.: Мир, 1988.- 608 с.
3. Дьяконов В. Mathematica 4: учебный курс – СПб: Питер, 2001.- 656 с.

УДК 531.1

Прокопеня А.Н.

ОБ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ РЕШЕНИЙ ОГРАНИЧЕННОЙ ЗАДАЧИ ЧЕТЫРЕХ ТЕЛ

ВВЕДЕНИЕ

Основная задача динамики состоит в том, чтобы исследовать всю совокупность возможных движений заданной динамической системы. Для системы тел, движущихся под действием их взаимного гравитационного притяжения, соответствующая задача решена только в случае двух тел. Несмотря на то, что известны десять интегралов движения системы, в случае трех и более тел уравнения движения не могут быть проинтегрированы. Поэтому представляет большой интерес поиск и исследование их частных решений. Наибольшие результаты в этой области достигнуты при решении задачи трех тел и ее упрощенного варианта – ограниченной задачи трех тел [1]. Пять частных решений этой задачи были найдены еще в XVIII веке Л.Эйлером и Ж.Лагранжем. Однако анализ устойчивости треугольных лагранжевых решений оказался очень трудной задачей. К настоящему времени полностью исследована устойчивость этих решений в плоской круговой ограниченной задаче трех тел, подробно рассмотрена их устойчивость в пространственной круговой задаче, а также в плоской и пространственной эллиптических задачах [2]. При этом были разработаны новые качественные, аналитические и численные методы исследования нелинейных гамильтоновых систем, которые могут использоваться при решении многих других задач механики и математики [3]. Тем не менее, теория устойчивости гамильтоновых систем еще до конца не разработана, и исследования в этой области продолжают оставаться весьма актуальными.

В работах [4-6] было доказано, что существует новый класс точных частных решений плоской ньютоновой задачи многих тел. Это позволило предложить две новые динамические модели, которые известны как ньютоновы ограниченные проблемы ($n+2$)-тел [7, 8]. Теперь в рамках этих моделей необходимо найти все равновесные решения уравнений движения и исследовать их устойчивость. Поскольку в общем случае эта проблема очень сложная, в качестве первого шага рассмотрим случай четырех взаимодействующих тел. В данной работе исследуется движение частицы пренебрежимо малой массы в гравитационном поле, генерируемом тремя телами. Их движение определяется соответствующим решением задачи трех тел [6]. Получены уравнения движения частицы в фазовом пространстве Нехвила, найдены их равновесные решения, и исследована их устойчивость в линейном приближении. Все расчеты и визуализация полученных результатов производятся с помощью системы Mathematica, которая существенно увеличивает наши возможности при выполнении символьных и численных вычислений [9].

Прокопеня Александр Николаевич. *К. физ.-мат. н., доцент каф. физики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

РАВНОВЕСНЫЕ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДВИЖЕНИЯ

Пусть две точечные частицы P_1 и P_2 одинаковой массы m движутся по эллиптическим орбитам вокруг их общего центра масс, в котором покоится третья частица P_0 массой m_0, под действием взаимного ньютоновского притяжения. При этом частицы P_1 и P_2 в каждый момент времени располагаются симметрично относительно частицы P_0, а их орбиты находятся в плоскости xOy инерциальной барицентрической системы координат. Используя цилиндрические координаты, соответствующее частное решение задачи трех тел можно записать в виде [6]:

$$\rho_j(\nu)=\frac{p}{1+e\cos\nu},\ \varphi_j(t)=\nu(t)+\pi j,\quad z_j(t)=0,\ (j=1,2) \tag{1}$$

причем функции $\rho_j(t)$ и $\nu(t)$ связаны соотношением:

$$\rho_j^2\frac{d\nu}{dt}=\sqrt{fp(m_0+m/4)}\equiv c, \tag{2}$$

где f – гравитационная постоянная, а p и e – параметр и эксцентриситет орбиты. Рассмотрим движение четвертой точечной частицы P_3 пренебрежимо малой массы m_1 в гравитационном поле частиц P_0, P_1 и P_2. Обозначив ее цилиндрические координаты через $\rho,\ \varphi,\ z$, запишем функцию Лагранжа системы в виде:

$$L=\frac{m_1}{2}\left(\left(\frac{d\rho}{dt}\right)^2+\rho^2\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+\left(\frac{dz}{dt}\right)^2\right)+ +f\frac{m_1m_0}{r}+f\frac{m_1m}{r_1}+f\frac{m_1m}{r_2}, \tag{3}$$

где r – расстояние между частицами P_0 и P_3, а r_j – расстояния между частицами P_j и P_3 $(j=1,2)$, которые определяются следующими соотношениями:

$$r^2=\rho^2+z^2,\ r_j^2=\rho^2+\rho_j^2-2\rho\rho_j\cos(\varphi-\varphi_j)+z^2\quad (j=1,2).$$

Используя функцию Лагранжа (3), запишем дифференциальные уравнения движения частицы P_3 в виде:

$$\begin{gathered}\frac{d^2\rho}{dt^2}-\rho\left(\frac{d\varphi}{dt}\right)^2+fm_0\frac{\rho}{r^3}+fm\frac{\rho-\rho_1\cos(\varphi-\varphi_1)}{r_1^3}+ +fm\frac{\rho-\rho_2\cos(\varphi-\varphi_2)}{r_2^3}=0,\\ \rho\frac{d^2\varphi}{dt^2}+2\frac{d\rho}{dt}\frac{d\varphi}{dt}+fm\frac{\rho_1\sin(\varphi-\varphi_1)}{r_1^3} ++fm\frac{\rho_2\sin(\varphi-\varphi_2)}{r_2^3}=0,\\ \frac{d^2z}{dt^2}+fm_0\frac{z}{r^3}+fm\frac{z}{r_1^3}+fm\frac{z}{r_2^3}=0.\end{gathered} \tag{4}$$

Учитывая соотношения (1), (2), перейдем в уравнениях (4) к конфигурационному пространству Нехвила, используя следующую подстановку [1]:

$$\rho_j(t)\to\frac{p}{1+e\cos\nu},\ \rho(t)\to\frac{p}{1+e\cos\nu}\rho(\nu),$$
$$z(t)\to\frac{p}{1+e\cos\nu}z(\nu),\ \varphi(t)\to\nu+\varphi(\nu),$$

и будем использовать полярный угол ν, характеризующий положение частиц P_1 и P_2 на плоскости xOy, в качестве новой независимой переменной. Фактически такая подстановка означает переход в систему координат, вращающуюся вокруг оси Oz с переменной угловой скоростью, в которой расстояния между любыми двумя точками периодически пульсируют так, что частицы P_1 и P_2 покоятся на оси Ox в точках $x=-1$ и $x=1$ соответственно. Производные координат частицы P_3 примут вид:

$$\frac{d\rho}{dt}\to\frac{c}{p}\left(\left(1+e\cos\nu\right)\frac{d\rho}{d\nu}+e\sin\nu\cdot\rho\right),$$
$$\frac{d\varphi}{dt}\to\frac{c}{p^2}\left(1+e\cos\nu\right)^2\left(1+\frac{d\varphi}{d\nu}\right),$$
$$\frac{d^2\rho}{dt^2}\to\frac{c^2}{p^3}\left(1+e\cos\nu\right)^2\left(\left(1+e\cos\nu\right)\frac{d^2\rho}{d\nu^2}+e\cos\nu\cdot\rho\right),$$
$$\frac{d^2\varphi}{dt^2}\to\frac{c^2}{p^4}\left(1+e\cos\nu\right)^3\times \times\left(\left(1+e\cos\nu\right)\frac{d^2\varphi}{d\nu^2}-2e\sin\nu\frac{d\varphi}{d\nu}-2e\sin\nu\right).$$

Очевидно, производные координаты z выглядят аналогично производным координаты ρ. В результате уравнения движения (4) примут вид:

$$\begin{gathered}\frac{d^2\rho}{d\nu^2}-\rho\left(\frac{d\varphi}{d\nu}+1\right)^2+\frac{e\cos\nu}{1+e\cos\nu}\rho= =-\frac{fp}{c^2(1+e\cos\nu)}\times \times\left(\frac{m_0\rho}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}+\frac{m(\rho+\cos\varphi)}{r_1^3}+\frac{m(\rho-\cos\varphi)}{r_2^3}\right),\\ \rho\frac{d^2\varphi}{d\nu^2}+2\frac{d\rho}{d\nu}\left(\frac{d\varphi}{d\nu}+1\right)=\frac{fpm\cdot\sin\varphi}{c^2(1+e\cos\nu)}\left(\frac{1}{r_1^3}-\frac{1}{r_2^3}\right),\\ \frac{d^2z}{d\nu^2}+\frac{e\cos\nu}{1+e\cos\nu}z= =-\frac{fpz}{c^2(1+e\cos\nu)}\left(\frac{m_0}{(\rho^2+z^2)^{3/2}}+\frac{m}{r_1^3}+\frac{m}{r_2^3}\right),\end{gathered} \tag{5}$$

где

$$r_1=\left(\rho^2+1+2\rho\cos\varphi+z^2\right)^{1/2},$$
$$r_2=\left(\rho^2+1-2\rho\cos\varphi+z^2\right)^{1/2}$$

Равновесное решение системы (5) определяется из условия, что координаты $\rho,\ \varphi,\ z$ являются постоянными. Полагая в (5) все производные равными нулю, из второго и третьего уравнений находим, что равновесное решение возможно тогда и только тогда, когда

$$\varphi = 0, \;\; \frac{\pi}{2}, \;\; \pi, \;\; \frac{3\pi}{2}; \; z = 0 .$$

При $\varphi = 0, \; \pi$ равновесные положения частицы P_3 находятся на прямой P_1P_2 и по терминологии работы [8] называются радиальными равновесными решениями. При $\varphi = \frac{\pi}{2}, \; \frac{3\pi}{2}$ равновесные положения находятся на прямой, перпендикулярной P_1P_2, и называются биссекториальными равновесными решениями. Подставляя в первое уравнение (5) решения $\rho = R = const$, $\varphi = 0, \; \pi$ и $z = 0$, получаем уравнение для определения радиальных равновесных положений:

$$m_0\left(R - \frac{1}{R^2}\right) + \frac{1}{4}mR - m\left(\frac{R-1}{|R-1|^3} + \frac{R+1}{|R+1|^3}\right) = 0 . \quad (6)$$

Соответствующее уравнение для биссекториальных равновесных решений имеет вид:

$$m_0\left(R - \frac{1}{R^2}\right) + \frac{1}{4}mR - \frac{2mR}{(R^2+1)^{3/2}} = 0 . \quad (7)$$

Легко видеть, что при $m_0 = 0$ уравнения (6), (7) совпадают с соответствующими уравнениями, определяющими положение точек либрации в ограниченной задаче трех тел [1,2]. При этом существуют три радиальных равновесных решения, одно из которых есть $R = 0$, а два других находятся на расстоянии $R > 1$ симметрично относительно начала координат, где R является корнем уравнения

$$\frac{R}{8} = \frac{R^2+1}{(R^2-1)^2} .$$

Существует также два биссекториальных равновесных решения, расположенных симметрично относительно начала координат на расстоянии $R = \sqrt{3}$, которые соответствуют известным треугольным лагранжевым решениям. Поскольку все эти решения неустойчивы в смысле Ляпунова [1,2], далее мы рассмотрим случай $m_0 \neq 0$. Анализ уравнения (6) показывает, что в области $0 \le R < 1$ оно принимает вид:

$$m_0\left(R - \frac{1}{R^2}\right) + \frac{1}{4}mR + \frac{4mR}{(1-R^2)^2} = 0 \quad (8)$$

и имеет один корень. При $R > 1$ уравнение (6) можно переписать в виде:

$$m_0\left(R - \frac{1}{R^2}\right) + \frac{1}{4}mR - \frac{2m(R^2+1)}{(R^2-1)^2} = 0 . \quad (9)$$

Это уравнение также имеет один корень. Следует отметить, что в случае $m_0 >> m$ корни уравнений (8), (9) стремятся к одному и тому же значению $R = 1$. Уравнение (7) имеет только один корень, причем с увеличением массы центрального тела m_0 от нуля до бесконечности его величина уменьшается от $R = \sqrt{3}$ до $R = 1$. Таким образом, при $m_0 \neq 0$ ограниченная задача четырех тел имеет шесть равновесных решений в пространстве Нехвила: четыре радиальные (точки N_1, N_2, N_3, N_4 на рис. 1) и два биссекториальные (точки S_1, S_2). Они образуют три пары симметричных относительно центральной частицы P_0 решений, которые определяются как положительные действительные корни уравнений (7)-(9).

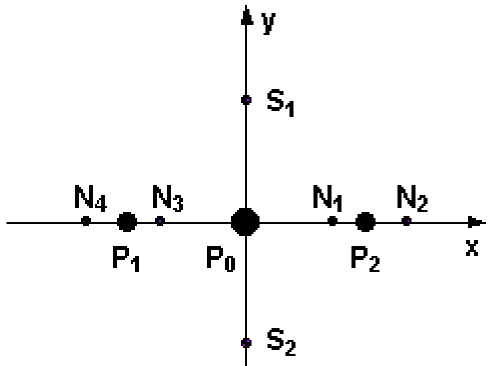

Рис. 1.

АНАЛИЗ УСТОЙЧИВОСТИ РАВНОВЕСНЫХ РЕШЕНИЙ

Проблема устойчивости найденных равновесных решений связана с исследованием нелинейных дифференциальных уравнений возмущенного движения. Ее решение обычно начинается с анализа соответствующей системы уравнений первого приближения. Чтобы исследовать уравнения движения (5) в окрестности радиальных и биссекториальных решений, сделаем в (5) следующую подстановку:

$$\rho(\nu) \to R + u(\nu), \; \varphi(\nu) \to \beta + \gamma(\nu),$$

где R является корнем одного из уравнений (7)-(9), а β равняется нулю или $\pi/2$. Рассматривая функции $u(\nu)$, $\gamma(\nu)$, $z(\nu)$ в качестве малых возмущений равновесных решений, разложим уравнения (5) по степеням u, γ, z с точностью до первого порядка. В результате уравнения возмущенного движения, линеаризованные в окрестности радиальных равновесных решений N_1 и N_2, запишем в виде:

$$\begin{gathered} \frac{d^2u}{d\nu^2} - 2R\frac{d\gamma}{d\nu} = \frac{3+2a_j}{1+e\cos\nu}u, \\ \frac{d^2\gamma}{d\nu^2} + \frac{2}{R}\frac{du}{d\nu} = -\frac{a_j}{1+e\cos\nu}\gamma, \\ \frac{d^2z}{d\nu^2} + \frac{1+a_j+e\;\cos\nu}{1+e\;\cos\nu}z = 0, \end{gathered} \quad (10)$$

где

$$a_1 = \frac{8(R^2+3)}{(1+4\mu)(1-R^2)^3}, \; a_2 = \frac{8(3R^2+1)}{(1+4\mu)R(R^2-1)^3}, \; \mu = \frac{m_0}{m}$$

Соответствующая системы уравнений, линеаризованная в окрестности биссекториальных решений S_1 и S_2, примет вид:

$$\begin{gathered} \frac{d^2u}{d\nu^2} - 2R\frac{d\gamma}{d\nu} = \frac{3-b}{1+e\cos\nu}u, \\ \frac{d^2\gamma}{d\nu^2} + \frac{2}{R}\frac{du}{d\nu} = \frac{b}{1+e\cos\nu}\gamma, \\ \frac{d^2z}{d\nu^2} + z = 0, \end{gathered} \quad (11)$$

где

$$b = \frac{24}{(1+4\mu)(1+R^2)^{5/2}} .$$

Поскольку параметры R и μ связаны между собой условиями (7)-(9), постоянные a_1, a_2 и b в (10), (11) зависят только от одного параметра.

Системы (10), (11) представляют собой системы трех линейных дифференциальных уравнений второго порядка с периодическими коэффициентами. Очевидно, в области $|e| < 1$ коэффициенты этих уравнений являются аналитическими функциями относительно параметра e. Следовательно, поведение их решений определяется значениями характеристических показателей систем при $e = 0$. Если при $e = 0$ система имеет хотя бы один характеристический показатель с положительной вещественной частью, то она является неустойчивой при малых значениях e, отличных от нуля. Неустойчивой будет системы и в том случае, когда она имеет чисто мнимые характеристические показатели, но некоторые из них являются кратными. Если же все ее характеристические показатели являются различными и чисто мнимыми, то неустойчивости в системе могут возникать только в условиях резонанса, когда ее характеристические показатели λ_k удовлетворяют соотношению:

$$\lambda_k \pm \lambda_l = iN \quad (k,l = 1,\ 2,\ 3,\ 4;\ N = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots). \tag{12}$$

Легко видеть, что в системах (10), (11) третье уравнение является независимым от первых двух. Это означает, что в линейном приближении возмущенные движения частицы в плоскости орбит xOy и в перпендикулярном направлении являются независимыми и их можно рассматривать отдельно. Третье уравнение системы (10) является уравнением Хилла и при $e = 0$ имеет два чисто мнимых характеристических показателя, равных $\pm i\sqrt{1+a_j}$, так как $a_j > 0$ при всех значениях μ. Уравнение такого типа подробно исследовано в работе [10], где показано, что при $e > 0$ вблизи точек $a_j = \frac{(2k-1)^2}{4} - 1 \quad (k = 1,\ 2,\ \ldots)$ на плоскости a_jOe существуют узкие области неустойчивости этого уравнения. Используя эти результаты и соотношения (8), (9), границы соответствующих областей неустойчивости третьего уравнения системы (10) можно найти в виде рядов по степеням малого параметра e. Оказывается, для биссекториальных решений N_1 и N_3 есть только три значения параметра μ, в окрестности которых на плоскости μOe существуют области неустойчивости: $\mu_1 = 0.216398$, $\mu_2 = 1.21553$, $\mu_3 = 18.2375$, причем ширины этих областей очень малы. Действительно, уравнения границ области неустойчивости, примыкающей к точке μ_3, имеют вид:

$$\mu_3 = 18.2375 + 37.1814e^2 + 67.311e^4 \pm 0.00454e^5.$$

При этом ширина области неустойчивости составляет $0.00908e^5$. Для точек μ_1 и μ_2 она еще меньше. Для биссекториальных решений N_2 и N_4 область неустойчивости существует только в окрестности точки $\mu = 2.30235$ и ограничена кривыми

$$\mu = 2.30235 - 4.23183e^2 \mp 0.176326e^3 + $$
$$+ 2.44335e^4 \pm 0.200685e^5.$$

Характеристические показатели первых двух уравнений системы (10) при $e = 0$ легко вычисляются и могут быть записаны в виде:

$$\lambda_k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1 + a_j \pm \sqrt{1 + 10a_j + 9a_j^2}\right)^{1/2}, \tag{13}$$
$$(k = 1, 2, 3, 4)$$

Численный анализ значений λ_k для коэффициентов a_1 и a_2 с учетом соотношений (8), (9) показал, что один из характеристических показателей (13) является действительным положительным числом при любых значениях параметра μ из интервала $0 \le \mu < \infty$. Следовательно, согласно теореме Ляпунова об устойчивости по первому приближению [2], радиальные равновесные решения ограниченной задачи четырех тел являются неустойчивыми.

Третье уравнение системы (11) имеет два чисто мнимых характеристических показателя, равных $\pm i$ при любом значении e. Характеристические показатели первых двух уравнений этой системы при $e = 0$ имеют вид:

$$\lambda_k = \pm\frac{1}{\sqrt{2}}\left(-1 \pm \sqrt{1 - 12b + 4b^2}\right)^{1/2}, \tag{14}$$
$$(k = 1, 2, 3, 4)$$

Если выполнено условие

$$0 < 1 - 12b + 4b^2 < 1, \tag{15}$$

то характеристические показатели (14) будут различными и чисто мнимыми: $\lambda_k = \pm i\sigma_{1,2}$,

где $\sigma_{1,2} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(1 \pm \sqrt{1 - 12b + 4b^2}\right)^{1/2}$. Численный анализ показал, что значения выражения $1 - 12b + 4b^2$ всегда меньше единицы. При $\mu = 11.7203$ оно обращается в ноль и система (11) будут иметь две пары кратных характеристических показателей, равных $\pm i/\sqrt{2}$. В этом случае даже при $e = 0$ система (11) будет неустойчивой, так как ее решение будет содержать линейно растущие члены вида $\nu\cos\frac{\nu}{\sqrt{2}}$ и $\nu\sin\frac{\nu}{\sqrt{2}}$. Неравенство (15) выполняется при $11.7203 < \mu < \infty$, причем параметры σ_1 и σ_2 изменяются в пределах:

$$\frac{1}{\sqrt{2}} < \sigma_1 < 1,\ 0 < \sigma_2 < \frac{1}{\sqrt{2}}.$$

Поэтому резонансное соотношение (12) в системе может выполняться только в одном случае: $\lambda_k = i/2$, $\lambda_l = -i/2$, $N = 1$, когда $\sigma_2 = 1/2$ и $\mu = \mu_R = 15.9691$. При $e > 0$ в окрестности резонансного значения параметра μ_R может существовать область неустойчивости. Чтобы найти границы этой области, необходимо вычислить фундаментальную матрицу системы (11). Для этого используем метод малого параметра Ляпунова-Пуанкаре.

Первые два уравнения системы (11) легко представить в виде системы четырех уравнений первого порядка:

$$\frac{dx}{d\nu} = P(\nu, e)x. \tag{16}$$

Здесь x – вектор с четырьмя компонентами, а $P(\nu, e)$ – матрица четвертого порядка, которая может быть представлена в виде:

$$P(\nu,e)=P_0+\sum_{k=1}^{\infty}P_k(\nu)\,e^k\,, \tag{17}$$

где

$$P_0=\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 0 \\ -\dfrac{2}{R} & 0 & 0 & \dfrac{1}{R^2} \\ -(1+b) & 0 & 0 & \dfrac{2}{R^2} \\ 0 & bR^2 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$

$$P_k(\nu)=(-\cos\nu)^k\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 3-b & 0 & 0 & 0 \\ 0 & bR^2 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Ряд (17) сходится при всех ν в области $e<1$, а $P_k(\nu)$ – непрерывные ограниченные матрицы.

Согласно теореме Ляпунова [11], фундаментальная матрица решений $X(\nu,e)$ системы (16), нормированная условием $X(0)=E_4$, где E_4 – единичная матрица четвертого порядка, представима в виде:

$$X(\nu,e)=\exp(P_0\nu)Z(\nu,e)\exp(\nu W(e))\,, \tag{18}$$

где $Z(\nu,e)=Z(\nu+2\pi,e)$ – периодическая аналитическая матрица-функция, а $W(e)$ – постоянная матрица, причем справедливы представления

$$Z(\nu,e)=\sum_{k=0}^{\infty}Z_k(\nu)\,e^k\,,\ Z_0(0)=E_4\,,$$

$$Z_k(0)=0\quad(k\geq 1)\,, \tag{19}$$

$$W(e)=\sum_{k=1}^{\infty}W_k\,e^k\,. \tag{20}$$

Ряды (19), (20) сходятся при $e<1$ для любого ν, а $Z_k(\nu)$ – непрерывные матрицы, которые могут быть найдены из рекуррентного соотношения:

$$\frac{dZ_k(\nu)}{d\nu}=$$
$$=\sum_{l=1}^{k}(\exp(-P_0\nu)P_l(\nu)\exp(P_0\nu)Z_{k-l}(\nu)-Z_{k-l}(\nu)W_l) \tag{21}$$

Матрицы W_k находятся из условия периодичности матриц $Z_k(\nu)$. Действительно, в первом порядке уравнение (21) имеет вид:

$$\frac{dZ_1(\nu)}{d\nu}=(\exp(-P_0\nu)P_1(\nu)\exp(P_0\nu)-W_1)\,. \tag{22}$$

Учитывая начальные условия (19), решение уравнения (22) можно представить в виде:

$$Z_1(\nu)=-W_1\nu+\int_0^{\nu}(\exp(-P_0\tau)P_1(\tau)\exp(P_0\tau))d\tau\,.$$

Используя условие периодичности матриц $Z_k(\nu)$, получаем:

$$W_1=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}(\exp(-P_0\tau)P_1(\tau)\exp(P_0\tau))d\tau\,.$$

Вычисления в следующих порядках по e выполняются аналогично, причем с ростом k они становятся все более громоздкими и не могут быть выполнены без компьютера. Вычисляя фундаментальную матрицу $X(\nu,e)$ с точностью до второго порядка по e в окрестности резонансной точки $\mu_R=15.9691$, получим характеристическое уравнение для системы (16) в виде:

$$\rho^4+(\rho^3+\rho)(2-2\cos(\sqrt{3}\pi)-\frac{4}{\sqrt{3}}e\pi s_1\sin(\sqrt{3}\pi)+$$
$$+\frac{e^2\pi}{144}(3\pi(99+64s_1^2(-3+\cos(\sqrt{3}\pi)))+$$
$$+\sqrt{3}(45-256s_1^2-192s_2)\sin(\sqrt{3}\pi)))+$$
$$+\rho^2(2-4\cos(\sqrt{3}\pi)-\frac{8}{\sqrt{3}}e\pi s_1\sin(\sqrt{3}\pi)+$$
$$+\frac{e^2\pi}{72}(3\pi(-99+256s_1^2)\cos(\sqrt{3}\pi)+$$
$$+\sqrt{3}(45-256s_1^2-192s_2)\sin(\sqrt{3}\pi)))+1=0 \tag{23}$$

где s_1, s_2 - постоянные, определяющие отклонение от резонансного характеристического показателя σ_2 в соответствии с соотношением: $\sigma_2=\frac{1}{2}+es_1+e^2s_2$. Анализ уравнения (23) показывает, что в окрестности характеристического показателя $\sigma_2=1/2$ условие $|\rho|\leq 1$ нарушается в области, ограниченной прямыми $\sigma_2=\frac{1}{2}\pm\frac{\sqrt{33}}{8}e$. Для параметра μ соответствующее уравнение имеет вид:

$$\mu=15.9691\pm 32.5305e\,. \tag{24}$$

Таким образом, в линейном приближении биссекториальные равновесные решения являются устойчивыми при $e=0$, если выполняется следующее условие: $11.7203<\mu<\infty$. При достаточно малых значениях эксцентриситета e вблизи значения $\mu_R=15.9691$ существует область неустойчивости этих решений, ограниченная прямыми (24).

ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В данной работе исследуется ограниченная проблема четырех тел, предложенная в работе [7]. В конфигурационном пространстве Нехвила получены уравнения движения частицы нулевой массы в гравитационном поле трех частиц, движущихся в соответствии с частным точным решением соответствующей задачи трех тел, найденным в [6]. Показано, что существует шесть равновесных решений уравнений движения: четыре радиальных решения и два биссекториальных. Поскольку уравнения, определяющие равновесные положения частицы, являются нелинейными, соответствующие решения могут быть найдены только численно. В линейном приближении проанализирована устойчивость найденных решений. Показано, что радиальные решения являются неустойчивыми при любом соотношении между массами частиц, а биссекториальные решения являются устойчивыми при $e=0$, если $11.7203<\mu<\infty$. Исследование характеристического уравнения линеаризованной системы уравнений, описывающих возмущенное движение частицы в плоскости *xOy*, показало, что вблизи значения $\mu_R = 15.9691$ на плоскости $\mu - e$ существует область неустойчивости, которая при малых значениях параметра *e* ограничена прямыми (24). Все аналитические и численные вычисления выполнены с помощью системы компьютерной алгебры *Mathematica*.

Автор выражает глубокую признательность проф. Е.А.Гребеникову за полезное и интересное обсуждение рассматриваемой проблемы.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. В. Себехей. Теория орбит: ограниченная задача трех тел. – М.: Наука, 1982. – 656 с.
2. А.П.Маркеев. Точки либрации в небесной механике и космодинамике. – М.: Наука, 1978. – 312 с.
3. А.П.Маркеев. Устойчивость гамильтоновых систем // Нелинейная механика/ Под ред. В.М.Матросова, В.В.Румянцева, А.В.Карапетяна. – М.: Физматлит, 2001. – С.114-130.
4. L.M.Perko, E.L.Walter. Regular Polygon Solutions of the N-Body Problem. *Proc. American Math. Soc.*, 94, No 2 (1985), 301-309.
5. B.Elmabsout. Sur l'existence de certaines configurations d'equilibre relatif dans le probleme des N corps / Celestial Mechanics. – V. 41. – 1988. – 131-151.
6. Е.А.Гребеников. Существование точных симметричных решений в плоской ньютоновой проблеме многих тел // Математическое моделирование. – Т. 10, № 8. – 1998. – 74-80.
7. E.A.Grebenikov. Two new dynamical models in celestial mechanics. *Romanian Astronomical Journal*, 8, No. 1 (1998), 13-19.
8. E.A.Grebenikov, D.Kozak-Skoworodkin, M.Jakubiak. The methods of computer algebra in the many-body problem, Moscow, Ed. RUDN, 2002. – 210 C.
9. А.Н.Прокопеня, А.В.Чичурин. Использование системы Mathematica для решения обыкновенных дифференциальных уравнений. – Мн.: Изд-во БГУ, 1999. – 265 С.
10. A.N.Prokopenya. Studying Stability of a Hill's Equationwith Computer Algebra System Mathematica // Proc. 8th International Conf. on Applications of Computer Algebra (June 25-28, 2002, Volos, Greece). – Volos, University of Thessaly, 2002. – P.96-98.
11. Н.П. Еругин. Линейные системы обыкновенных дифференциальных уравнений с периодическими и квазипериодическими коэффициентами. – Мн.: Изд-во АН БССР, 1963. – 272 с.

УДК 621.315.592

Русаков К.И., Паращук В.В.

ИЗЛУЧАТЕЛЬНЫЕ ПРОЦЕССЫ ПРИ НЕПОЛНОМ ЭЛЕКТРИЧЕСКОМ ПРОБОЕ В ДИЭЛЕКТРИКАХ И ЭЛЕКТРООПТИЧЕСКИХ КРИСТАЛЛАХ

В ряде наших предыдущих работ [1-8] теоретически обосновано взаимодействие электромагнитных волн видимого и микроволнового диапазонов в условиях стримерного разряда в гексагональных и кубических полупроводниках. Показано, что данное взаимодействие является одной из причин кристаллографической ориентации стримерных разрядов, вносит вклад в формирование их пороговых условий, обуславливает высокую скорость развития и некоторые другие свойства стримеров. Предсказана зависимость ориентации разрядов от размеров и формы кристалла в определенной области его толщин (размерный эффект), в том числе возможность образования неветвящихся одиночных разрядов в тонких стержневидных образцах, подтверждающаяся наблюдением на опыте неветвящихся разрядов в полупроводниках [1,2,9] и щелочно-галоидных кристаллах [10] при близких условиях. В связи с этим представляет интерес анализ указанного процесса в кристаллах NaCl как типичном представителе ЩГК, а также в $LiNbO_3$ - модельной среде с ярко выраженным электрооптическим эффектом, определяющим механизм взаимодействия волн.

Экспериментальное обнаружение микроволнового излучения в канале стримеров осуществлялось на примере кристаллов сульфида кадмия, в которых свойства указанных разрядов изучены в наибольшей степени. Для этой цели использовались стандартные полупроводниковые СВЧ - приемники сантиметрового диапазона, на входе которых располагался сменный волновод рупорного типа, калиброванный на фиксированные длины волн (≈ 1; 3; 10 см и т. д.) [11]. На фоне помех (шума с широким спектром) был выделен полезный сигнал, характеризующийся следующими свойствами: спектр этого сигнала ограничен диапазоном ~ $10^{-2} \div 10$ см с максимумом в области ~1 см; его интенсивность при возникновении разрядов в кристалле заметно возрастала. Данный результат подтверждает предположение о том, что формирование стримера происходит в условиях генерации мощного СВЧ излучения и его взаимодействия с рекомбинационным свечением электронно-дырочной плазмы в полупроводнике. Известно, что при стримерном пробое других твердых тел [12,13] также образуются интенсивные микроволны, позволяющие контролировать параметры разряда.

Рассмотрим по аналогии с [6-8] условия фазового синхронизма СВЧ волн и света в сильном электрическом поле сначала в NaCl. Кристаллы хлористого натрия являются центросимметричными средами, в которых отсутствует линейный электрооптических эффект, зато наблюдается отчетливо выраженный квадратичный электрооптический эффект [14,15], что предполагает возможность его учета при определении направлений фазового синхронизма по аналогии с описанной ранее методикой для случая сульфида кадмия. Вторая возможность заключается в том, что при наложении внешнего поля меняется (понижается) симметрия решетки, кристалл становится псевдоцентросимметричным и в этих условиях проявляется линейный эффект [14,16-20], что требует учета обоих факторов при некоторой неопределенности соответ-

Русаков Константин Иванович. *К. физ.-мат. н., доцент каф. физики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.
Паращук Валентин Владимирович. *К. физ.-мат. н., ведущий научный сотрудник лаборатории оптики полупроводников ИФ НАНБ им. Б.И. Степанова.*
Беларусь, 220072, г. Минск, пр. Ф. Скорины, 70.