УДК 681.3

Шуть В.Н., Ярошевич А.В., Мазец А.Г., Козловский А.Ю.

ДВА АЛГОРИТМА ПРИБЛИЖЁННОГО РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ КОММИВОЯЖЁРА

1. ВВЕДЕНИЕ

Задача коммивояжера (ЗК) занимает центральное место среди труднорешаемых задач комбинаторной (дискретной) оптимизации. Все существенные идеи решения таких задач или были первоначально предложены для решения ЗК, или, как правило, прошли проверку на этой задаче.

В 1831 г. в Германии вышла книга под названием «Кто такой коммивояжер и что он должен делать для процветания своего предприятия». Одна из рекомендаций этой книги гласила: «Важно посетить, как можно больше мест возможного сбыта, не посещая ни одно из них дважды». По-видимому, это была первая формулировка задачи коммивояжера. Современный этап изучения ЗК связывают с именами Карла Мангера в Европе и Хаслера Уитни в Америке[1].

Наиболее употребляемая формулировка ЗК состоит в следующем. Заданы список городов некоторого региона и таблица попарных расстояний между ними. Требуется найти замкнутый (т. е. начинающийся и заканчивающийся в одном и том же городе) маршрут коммивояжера, проходящий через все города, причем входящий в каждый город и выходящий из каждого города по одному разу и имеющий минимальную длину. В дальнейшем будем употреблять термины «города» и «расстояния» даже тогда, когда им трудно придать географический смысл[2].

В развитии вычислительных алгоритмов решения трудных задач комбинаторной оптимизации и, конечно, в первую очередь ЗК в последние годы четко обозначались две главные тенденции. Первая состоит в разработке алгоритмов, содержащих большое число вычислительных процедур, реализующих вычисления различных нижних оценок, набор высокоэффективных эвристик, использование множителей Лагранжа и отсекающих плоскостей, различные правила разбиения и ветвления, процедуры анализа и упрощения информации. Программные комплексы, реализующие такие алгоритмы, часто содержат программы управления вычислительным процессом и программы решения задач с участием человека в диалоговом режиме. Такие алгоритмы ориентированы на скрупулезный учет специфики исходных данных задачи и призваны доставлять решения за минимальное время вычислительной системы. Конечно, в этом случае достаточно большими становятся расходы на алгоритмическое и программное обеспечение алгоритма.

Другая тенденция состоит в снижении расходов на программную реализацию алгоритмов. Исходная задача формулируется таким образом, что для ее решения используются только коммерческие пакеты или пакеты программ стандартного математического обеспечения ЭВМ[3].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Пусть N - число городов, тогда $(C)_{ij}$, $i, j=1..N$ - матрица затрат, где C_{ij} - затраты на переход из i-го города в j-й город.

X_{ij} - матрица переходов с компонентами:

$X_{ij} = 1$, если коммивояжер совершает переход из i-го города в j-й,

$X_{ij} = 0$, если не совершает перехода, где i, $j = 1..N$ и $i \neq j$.

Критерий:

$$F(X) = \sum_{i=1}^{N} \sum_{j=1}^{N} C_{ij} \cdot X_{ij}. \tag{1}$$

Ограничения:

$$\sum_{i=1}^{N} X_{ij} = 1, \; i = 1..N. \tag{2}$$

$$\sum_{j=1}^{N} X_{ij} = 1, \; j = 1..N. \tag{3}$$

$$U_i - U_j + N \cdot X_{ij} \le N-1, \quad i, j = 1..N, \; i \neq j. \tag{4}$$

Данная модель (1-4) описывает задачу коммивояжера:

Действительно, условие (2) означает, что коммивояжер из каждого города выезжает только один раз; условие (3) - въезжает в каждый город только один раз; условие (4) - обеспечивает замкнутость маршрута, содержащего N городов, и не содержащего замкнутых внутренних петель.

В настоящей работе предлагается два метода (алгоритма) приближённого решения задачи коммивояжёра.

3. МЕТОД КРИСТАЛЛИЗАЦИИ ПРИ УСЛОВИИ ЗАМКНУТОСТИ КОНТУРОВ

Исходными данными является месторасположение городов, которое задается массивом координат на плоскости. Пусть имеется n городов, месторасположение каждого задано координатами (x_i, y_i), $i=1,n$. Тогда $K = \| k_{x\,i}; k_{y\,i} \|$ – массив координат городов. Задача – найти оптимальный гамильтонов контур, т.е. контур минимальной длины.

Введём понятие «валентности» вершины Первоначально все вершины имеют валентность равную двум. При присоединении вершины к другой вершине её валентность становиться равной 1. При присоединении её к двум вершинам валентность становится равной нулю. Этим обеспечивается условие, что в вершину есть один вход и один выход, но не более.

Предлагается алгоритм приближенного метода решения задачи коммивояжера:

1) по координатам расположения городов на местности находятся расстояния между городами: $d_{ij} = ((k_{x\,i} - k_{x\,j})^2 + (k_{y\,i} - k_{y\,j})^2)^{1/2}$, формируется матрица расстояний $D = \| d_{ij} \|$;

2) находится минимальное расстояние между городами:

$$d_{min} = \min d_{i,j}, \text{ где } i=1..n, j=1..n, \; i \neq j;$$

3) соединяются города, и удаляется данный путь из дальнейшего рассмотрения;

4) если валентность какой-либо вершины (города) стала равной 0, то данная вершина удаляется из дальнейшего рассмотрения;

5) если соединены не все вершины, то переходим на шаг 2;

6) объединяются два контура;

7) если контуров больше чем два, то переходим на шаг 6;

Ярошевич А.В. *К.т.н., начальник ВЦ Брестоблтелекома.*
Мазец А.Г. *Студент 5 курса специальности АСОИ Брестского государственного технического университета.*
Козловский А.Ю. *Студент 5 курса специальности АСОИ Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

8) находится значение целевой функции F, т.е. длина пути, как сумма всех расстояний между городами, входящими в состав найденного контура. Если m – количество ребер между вершинами (дорог между городами), а $S = \| i_k; j_k \|$ – массив связей между городами i и j, где k = 1.. m, то $F = \sum (d_{Sk})$. В результате получается приближённый к оптимальному маршрут и его длина.

Рассмотрим пример графического решения задачи коммивояжера данным методом: пусть дано 6 городов и матрица расстояний $D=\| d_{ij} \|$, где $i,j=1,6$ (табл.1).

Таблица 1.

Город	1	2	3	4	5	6
1	∞	d_{12}	d_{13}	d_{14}	d_{15}	d_{16}
2	d_{21}	∞	d_{23}	d_{24}	d_{25}	d_{26}
3	d_{31}	d_{32}	∞	d_{34}	d_{35}	d_{36}
4	d_{41}	d_{42}	d_{43}	∞	d_{45}	d_{46}
5	d_{51}	d_{52}	d_{53}	d_{54}	∞	d_{56}
6	d_{61}	d_{62}	d_{63}	d_{64}	d_{65}	∞

По матрице расстояний $D=\| d_{ij} \|$ находятся минимальные расстояния. Соответствующие точки соединяются. Вершина удаляется из рассмотрения после того, как её валентность становиться равной 0, т.е. вершина соединена с двумя ближайшими вершинами.

В результате выполнения алгоритма каждая точка будет входить только в один из контуров, как это показано на (рис. 1).

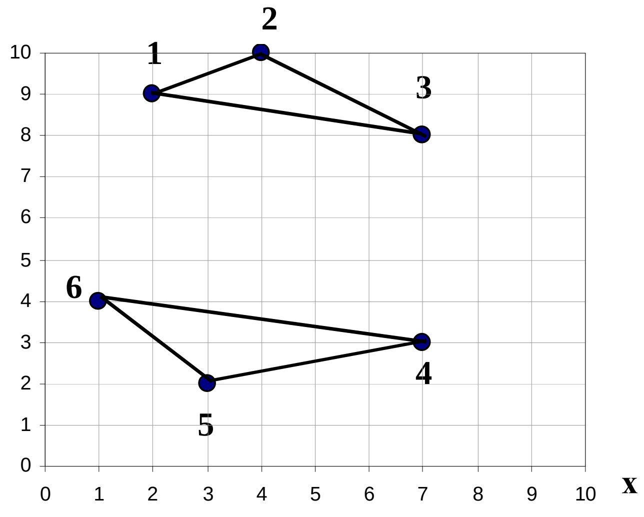

Рис. 1. Замкнутые контуры

Так как валентность всех вершин равна 0, то переходим к объединению контуров 1-2-3 и 4-5-6. Для этого определяется пара минимальных расстояний между контурами d_{16} и d_{34}. Затем соединяем на графе соответствующие вершины 1-6 и 3-4 с одновременным устранением дублирующих рёбер 1-3 и 6-4 (рис 2.).

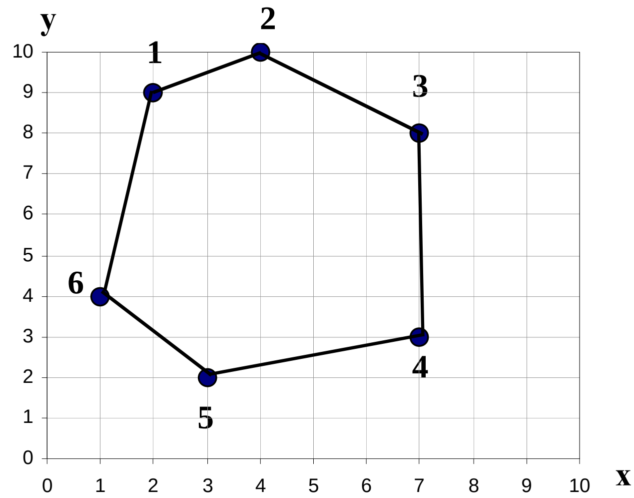

Рис. 2. Объединённые контуры.

После чего вычисляется значение целевой функции, т.е. длительность пути $F = d_{12} + d_{56} + d_{23} + d_{45} + d_{34} + d_{16} = d_{opt}$. Для данного примера это оптимальное решение.

4. МЕТОД ПО ПАРНОГО СОЕДИНЕНИЯ

Приближённый метод решения состоит из трёх этапов:

1) по парное соединение ближайших точек. В результате на поле вершин образуются линии. Валентность всех вершин становиться равной 1.

2) одновалентные точки соединяются попарно по критерию минимальности расстояний. В результате получается совокупность контуров.

3) склеивание контуров.

Рассмотрим пример графического решения предыдущей задачи коммивояжера данным методом:

Минимальное расстояние между точками 1и 2 $d_{min} = d_{12}$, ближайшая к ним точка - 3, следующее минимальное расстояние - между точками 6,5: $d_{min} = d_{56}$, ближайшая к ним точка – 4. Затем соединяются точки 3 и 4. В результате этих действий валентность всех вершин становиться равной 1 (рис 3.).

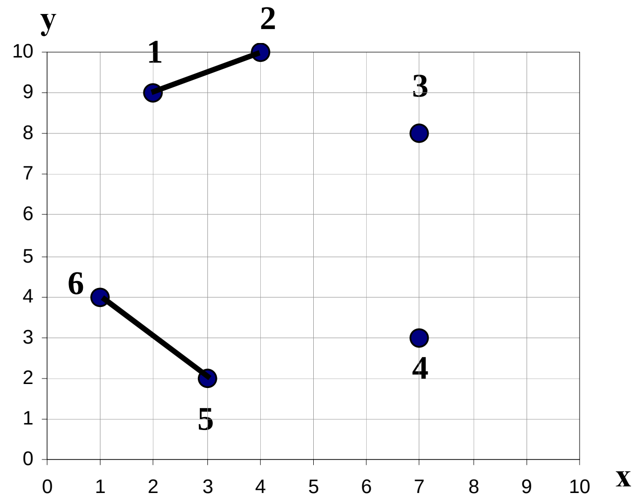

Рис 3. Попарно соединенные контуры.

Таблица 2.

Количество точек	Метод кристаллизации при условии замкнутости контуров	Метод по парного соединения	Количество точек	Метод кристаллизации при условии замкнутости контуров	Метод по парного соединения
10	1590	1665	60	3131	3393
	1469	1414		3497	3229
	1655	1578		3350	3315
	1432	1432		3452	3918
	1510	1393		3513	3417
20	1657	1744	70	3643	3892
	1834	1851		3429	3394
	2527	2429		3783	3519
	1808	1916		3473	3644
	1735	1931		3666	4275
30	2622	2642	80	3766	3978
	2372	2280		3567	3777
	2349	2646		4269	4210
	2599	2555		3261	3601
	2451	2272		3550	4106
40	2927	2998	90	4091	4244
	2849	2884		3792	4227
	2960	2786		4043	4008
	2990	2699		4244	4560
	3014	2894		3982	4222
50	2978	3262	100	4002	4018
	3067	3216		4418	4702
	2996	3294		3968	4055
	2819	3285		4148	4347
	2842	2816		4140	4531

Графическое отображение решения задачи коммивояжера, при условии большого количества точек

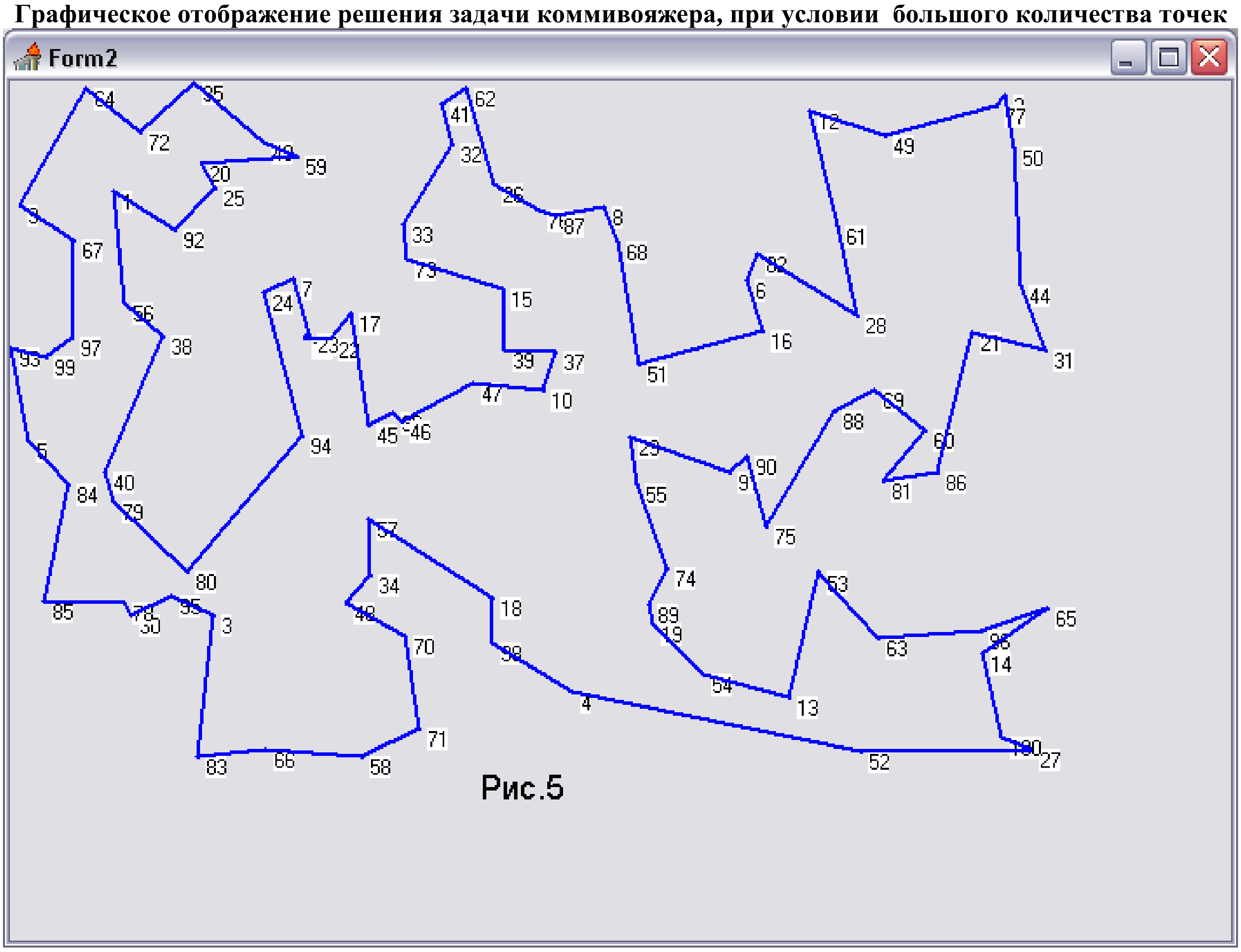

Рис.5

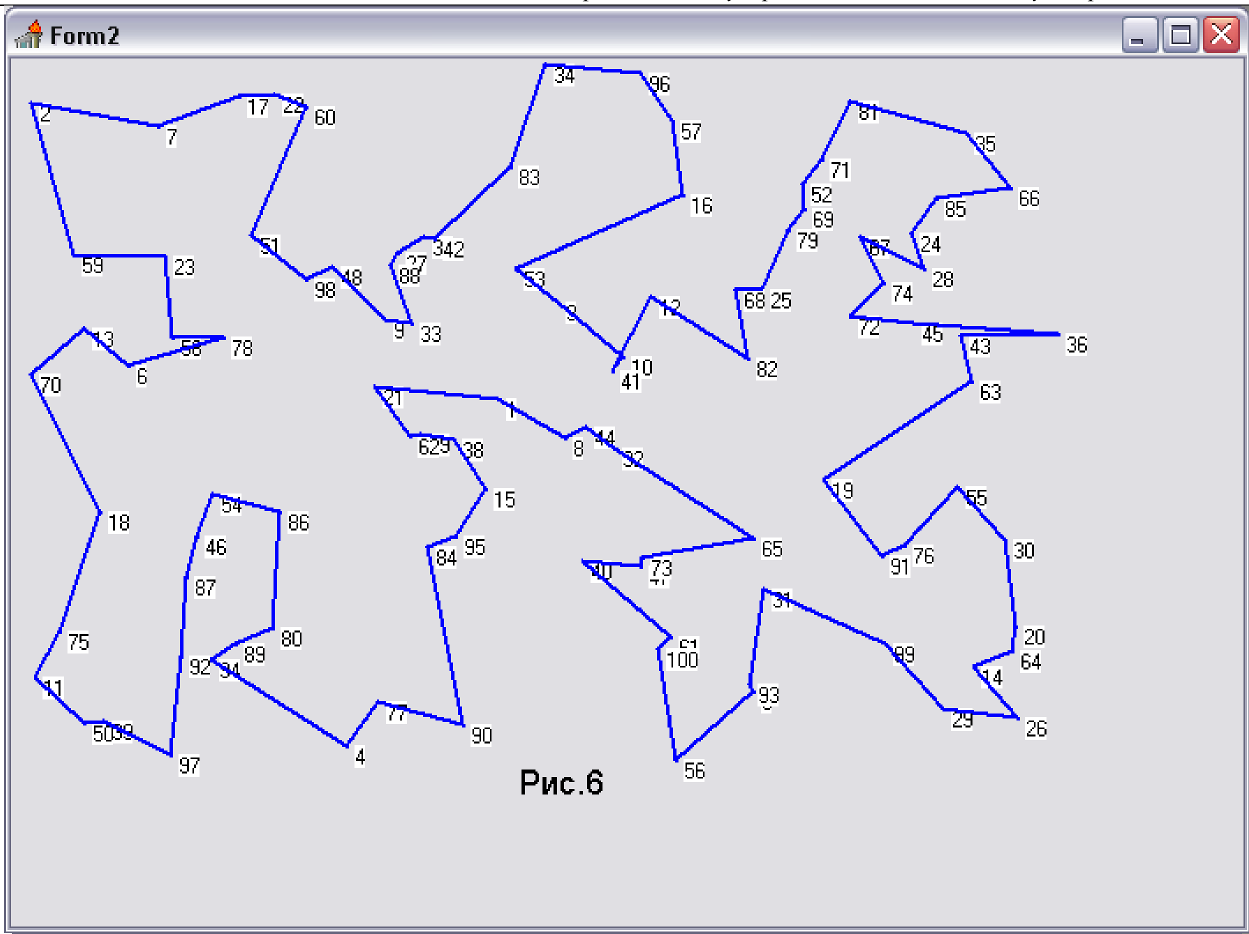

Рис.6

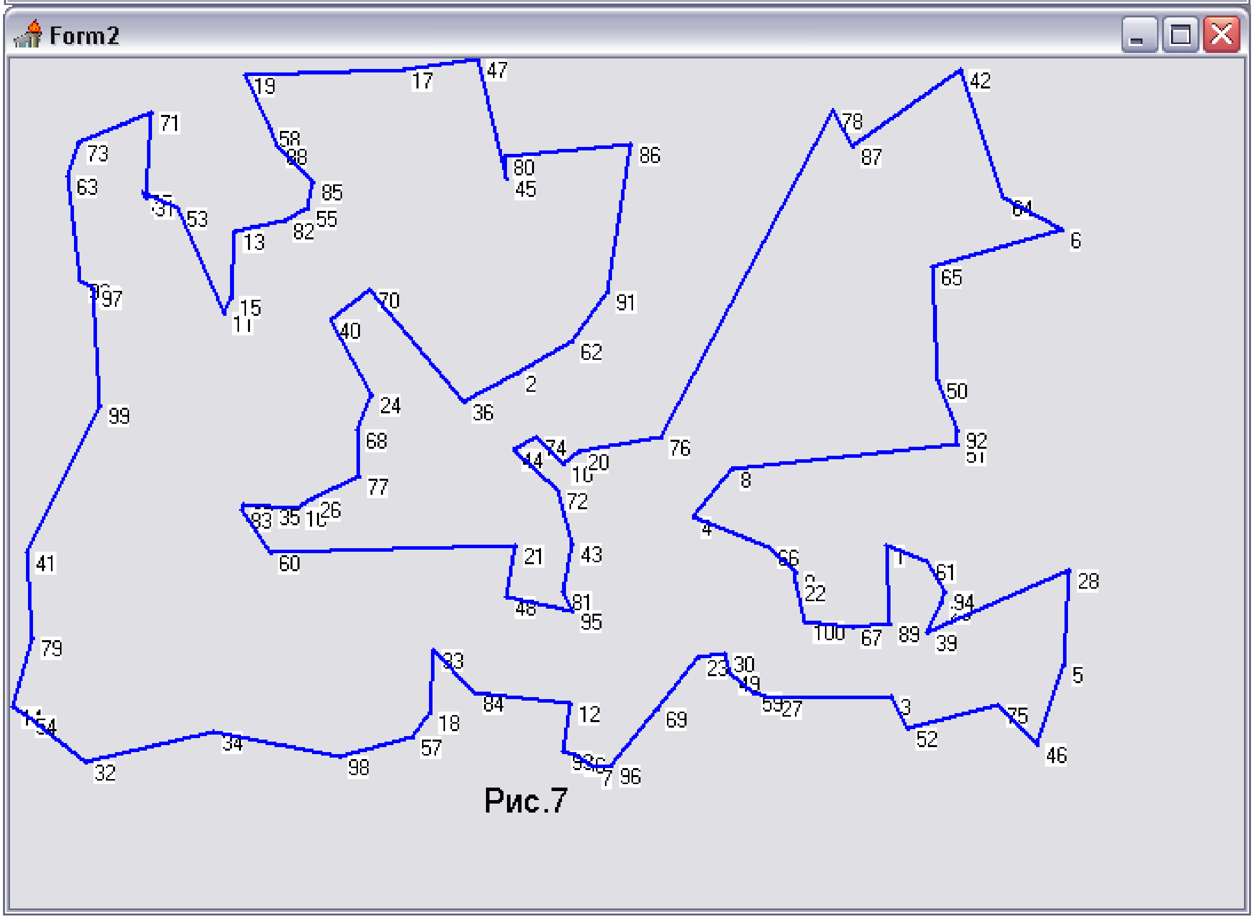

Рис.7

На втором этапе получившиеся отрезки соединяются по минимальному между ними расстоянию. В результате получаем замкнутый контур (рис 2.)

Если контуров несколько, то на третьем этапе выполняется их склеивание.

5. АЛГОРИТМ ОБЪЕДИНЕНИЯ (СКЛЕИВАНИЕ) КОНТУРОВ

Для рассматриваемых методов решения задачи используется один метод объединения контуров. Операция склейки представляет собой процедуру объединения двух контуров, при которой из каждого контура удаляется по одному ребру, а затем добавляются два ребра так, чтобы получился замкнутый контур. Перед объединением, необходимо выбрать два контура, расстояние между которыми минимально. Для рисунка 1 оно равно:

$(d_{16} + d_{34}) - (d_{46} + d_{13}) = d_{min}$, где d_{16}, d_{34}, d_{46}, d_{13} - расстояния между соответствующими точками; d_{min} представляет собой найденную минимальную оценку.

6. СРАВНЕНИЕ РЕЗУЛЬТАТОВ ДВУХ МЕТОДОВ

Сравним решение задачи коммивояжера данным методом кристаллизации при условии замкнутости контуров с решением задачи методом парного соединения.

Так как оба метода дают приемлемое время решения задачи, то в качестве критерия сравнения будем использовать целевую функцию суммы расстояний. Результаты сравнения приведены в таблице 2.

Из результатов сравнения, представленных в табл. 2 видно, что с увеличением количества точек более приемлемым является метод кристаллизации при условии замкнутости контуров. Однако отклонение от оптимального решения зачастую зависит от расположения точек.

На рисунках 5,6,7 приведены примеры решения задачи коммивояжера при следующих условиях:

- количество точек – 100;
- расположение – случайное;
- закон распределения – равномерный.

7. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Решение задачи коммивояжера является трудной задачей, так как все точные методы решения имеют экспоненциальную оценку сложности, т.е. они имеют сложность порядка $O(e^n)$. Известные алгоритмы решения таких задач являются алгоритмами полного перебора всех вариантов и не являются эффективными.

Поэтому в данной статье для решения задачи коммивояжера рассматриваются приближенные методы. Они не всегда находят оптимальный путь, но по сравнению с другими методами, мы получаем большой выигрыш в скорости, и возможность обрабатывать большое количество точек. Следует отметить, что предложенные методы представляют значительный интерес для различных исследований, проводимых в диалоговом режиме.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ

1. Мамиконов А.Г. "Основы построения АСУ", Москва, "Высшая школа" - 1981.
2. Схрейвер А. "Теория линейного и целочисленного программирования", Москва, "Мир" - 1981.
3. Таха Х. "Введение в исследование операций", Москва, "Мир" – 1985

УДК 681.3

Шуть В.Н., Волчок А.П., Кирьянов Д.П., Мегель И.С.

КОРЕЛЛЯЦИОННЫЙ ОБРАЗ СЛУЧАЙНОГО МАССИВА ТОЧЕК НА ПЛОСКОСТИ

ВВЕДЕНИЕ

Объектом исследования является группа случайных точек на плоскости отражающая не жестко, неявно некоторый объект либо физический процесс [1]. Такую группу не жестко связанных точек на плоскости назовем дискретной системой. Определим ее следующим образом. Пусть d и D - произвольные положительные числа. Систему точек на плоскости назовем простой *(d, D* -системой, если выполняются следующие два условия:

1) расстояние между любыми двумя точками системы не меньше d (d-условие);

2) где бы на плоскости ни нарисовать окружность радиуса D, внутри или на ней самой лежит хотя бы одна точка системы (D -условие).

Непересекающиеся между собой круги одного и того же радиуса D на плоскости можно располагать бесконечно. Поскольку по D-условию в каждом из них должна содержаться, по крайней мере одна точка (d, D-системы), то такая система точек бесконечна.

С другой стороны в любой ограниченной области может содержаться лишь конечное число точек d, D - системы. Это непосредственно вытекает из d-условия. Таким образом, в нашей системе нет ни больших разряжений точек, ни чересчур плотных скоплений. D-условие является притягивающей (собирающей) силой, а d-условие действует как отталкивающая сила. Плотность распределения точек колеблется в некоторых пределах, зависящих, разумеется, от параметров d *и* D. Введение параметров посредством условий 1 и 2 неоднозначно связывает с ними данную систему. В самом деле, если система удовлетворяет приведенным условиям при некоторых значениях d и D, то она будет удовлетворять тем же условиям и при других значениях d' и D', для которых выполняются неравенства $d'<d$, $D'<D$.

Избавиться от неоднозначности можно, выбрав для данной системы в качестве параметра d наибольшее число, при котором она еще удовлетворяет условию 1, а в качестве параметра D - соответственно наименьшее число среди тех, для которых выполняется условие 2. В дальнейшем, несмотря конкретную *(d, D)* -систему точек, под d и D будем понимать именно экстремальное для этой системы значение параметров, которое может быть практически получено с самой системы.

Волчок А.П. *Студент 5 курса специальности ЭВМиС Брестского государственного технического университета.*
Кирьянов Д.П. *Студент 5 курса специальности ЭВМиС Брестского государственного технического университета.*
Мегель И.С. *Студент 5 курса специальности АСОИ Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.