2. Мадорский В.М. Локализация решений нелинейных уравнений// Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. 2002. Т.11. С.96–103.
3. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона// Журнал вычислительной математики и математической физики, 1981, Т.21, №2, С.491–497.
4. Жанлав Т., Пузынин И.В. О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона// Журнал "Вычислит.матем. и матем.физ.", 1992, т.32, №6, С.146–156.

УДК 513.82

Курочка О.Н., Юдов А.А.

ПРОБЛЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим проблему эквивалентности подмногообразий однородного пространства $\mathbf{M} = G/H$.

Пусть заданы два подмногообразия (D_o, f) и (D_o, g) пространства $\mathbf{M}$.

Определение. Два подмногообразия (D_o, f) и (D_o, g) однородного G-пространства $\mathbf{M}$ называются эквивалентными (или G-эквивалентными), если существует элемент $a \in G$, такой, что

$$g(x_o) = T_a(f(x_o)) \ \forall x_o \in D_o. \qquad (1)$$

Определение. Подмногообразия (D_o, f) и (D_o, g) однородного пространства $\mathbf{M}$ будем называть эквивалентными по образу, если существует $a \in G$, такое, что

$$g(D_o) = T_a(f(D_o)).$$

Очевидно, что эквивалентные подмногообразия являются эквивалентными по образу.

Подмногообразию (D_o, f), для которого возможно построение канонического репера, была сопоставлена цепочка подгрупп $H \supset H_1 \supset \ldots \supset H_{p+1} = e$, названная типовой цепочкой или типом подмногообразия (D_o, f) [1]. Нетрудно видеть, что каждая подгруппа этой цепочки определена с точностью до сопряженности в группе G.

Определение. Подмногообразия, имеющие одинаковые (с точностью до сопряженности) типовые цепочки, будем называть однотипными.

Теорема 1. Подмногообразия, эквивалентные по образу, однотипны.

Доказательство. Пусть (D_o, f) и (D_o, g) – подмногообразия пространства G/H, причем существует элемент $a \in G$, такой, что $g(x) = T_a \circ f(x) \ \forall x \in D_o$.

Пусть H_1 – группа стационарности точки $f(x)$. Тогда группа стационарности точки $g(x)$ есть aH_1a^{-1}, т.е. группа сопряженная H_1. Аналогичные рассуждения имеют место для точек продолженных подмногообразий. Таким образом, с точностью до сопряженности, типовые цепочки подмногообразий (D_o, f) и (D_o, g) совпадают.

Теорема доказана.

Таким образом, классификация подмногообразий по типам более широкая, чем по эквивалентности. Сформулируем критерий эквивалентности подмногообразий.

Теорема 2. Два подмногообразия (D_o, f) и (D_o, g) однородного G-пространства $\mathbf{M} = G/H$ тогда и только тогда эквивалентны, когда

$$\hat{f}^*(\omega^i) = \hat{g}^*(\omega^i), \qquad (2)$$

$i = 1, 2, \ldots, r$, где ω^i – базисные левоинвариантные формы на группе Ли G (т.е. базис в $\bar{G}^*$), а $\hat{f}$ и $\hat{g}$ -канонические лифты подмногообразий (D_o, f) и (D_o, g).

Доказательство. Необходимость.

Пусть подмногообразия (D_o, f) и (D_o, g) эквивалентны, то есть существует элемент $a \in G$, что выполняется равенство (1) и пусть $\hat{f} = \lambda_f \circ f$ и $\hat{g} = \lambda_g \circ g$ их канонические лифты. Условие (1) удобно записывать в виде:

$$g(x_o) = a \circ f(x_o) \ \forall x_o \in D_o. \qquad (3)$$

Пусть $\tilde{f}: f(D_o) = Imf \to M_1: x \to \bar{T}_x(Imf)$, $\tilde{g}: g(D_o) = Img \to M_1: x \to \bar{T}_x(Img)$- соответствующие продолжающие отображения, причем очевидно, что продолжение производится в одно и то же пространство $M_1 = G/H_1$. Действие G в пространстве M_1 определим формулой:

$$G \times M_1 \to M_1: (a, K) \to d\,T_a(K) \equiv a \circ K \qquad (4)$$

Тогда имеем: $a \circ (\bar{T}_x(Imf)) = d\,T_a(\bar{T}_x(Imf)) = \bar{T}_{a \circ x}(T_a(Imf)) = \bar{T}_{a \circ x}(Im(T_a \circ f)) = \bar{T}_{a \circ x}(Img)$. Отсюда:

$$\tilde{g}(a \circ x) = a \circ \tilde{f}(x). \qquad (5)$$

Значит, $a \circ f_1(x_o) = a \circ \tilde{f}(f(x_o)) = \tilde{g}(a \circ f(x_o)) = \tilde{g}(g(x_o)) = g_1(x_o)$.

Таким образом, $\forall x_o \in D_o \ g_1(x_o) = a \circ f_1(x_o)$.

Аналогично доказываются равенства $g_2(x_o) = a \circ f_2(x_o), \ldots, g_p(x_o) = a \circ f_p(x_o)$, а следовательно и

$$\hat{g}(x_o) = a \circ \hat{f}(x_o) = L_a(\hat{f}(x_o)) \ \forall x_o \in D_o. \qquad (6)$$

Таким образом, эквивалентным подмногообразиям соответствуют эквивалентные канонические лифты. Из (6) для любой левоинвариантной 1-формы ω^j на группе G получим $\hat{g}^*(\omega^j) = (L_a \circ \hat{f})^*(\omega^j) = \hat{f}^*(L_a^*(\omega^j))$ и, следовательно, в силу левоинвариантности формы ω^j: $\hat{g}^*(\omega^j) = \hat{f}^*(\omega^j)$.

Достаточность. Пусть выполняется равенство (2), тогда в

Курочка О.Н. *Студентка V курса математического факультета Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина.*
Юдов А.А. *К. физ.-мат.н., доцент каф. алгебры и геометрии Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина. Беларусь, БрГУ им. А.С. Пушкина, 224665, г. Брест, бульвар Космонавтов, 21.*

силу теоремы 2.3 [2, стр. 238] отображения $\hat{f}$ и $\hat{g}$ отличаются левым сдвигом, т.е. существует элемент $a \in G$, такой, что $\hat{g}(x_o) = L_a(\hat{f}(x_o))$ $\forall x_o \in D_o$.

Применим к обеим частям этого равенства каноническую проекцию π и поскольку π есть G-морфизм, получим: $\pi \circ \hat{g}(x_o) = \pi \circ L_a \circ \hat{f}(x_o) = a \circ \pi \circ \hat{f}(x_o)$.

Так как $\hat{f} = \lambda_f \circ f$, $\hat{g} = \lambda_g \circ g$, то $\pi \circ \lambda_g \circ g(x_o) = a \circ \pi \circ \lambda_f \circ f(x_o)$.

Поскольку λ_f и λ_g – сечения, то $\pi \circ \lambda_g = Id$, $\pi \circ \lambda_f = Id$. Отсюда: $g(x_0) = a \circ f(x_0)$, $\forall x_o \in D_o$.

Теорема доказана.

Следствие 1. Подмногообразия (D_o, f) и (D_o, g) однородного G-пространства $\mathbf{M}$ тогда и только тогда эквивалентны, когда эквивалентны (в группе G) их канонические лифты.

Необходимость доказывается равенством (6).

Достаточность. Пусть существует элемент $a \in G$, такой что $\hat{g}(x_o) = L_a \circ \hat{f}(x_o)$ $\forall x_o \in D_o$.

Применим к обеим частям этого равенства каноническую проекцию π: $\pi \circ \hat{g}(x_o) = \pi \circ L_a \circ \hat{f}(x_o) = T_a \circ \pi \circ \hat{f}(x_o)$. Отсюда $g(x_0) = T_a \circ f(x_0)$.

Достаточность доказана.

Теорема 3. Если канонический лифт $\hat{f}$ подмногообразия (D_o, f) подвергнуть преобразованию $I(h): G \to G: a \to hah^{-1}$, то получим канонический лифт подмногообразия (D_o, $T_h \circ f$), построенный по системе подпространств $h \circ K_1, h \circ K_2, \ldots, h \circ K_{p+1}$.

Доказательство.

$I(h) = R_{h^{-1}} \circ L_h$, $L_h(\hat{f})$ есть канонический лифт подмногообразия (D_o, $T_h \circ f$). Это следует из того, что эквивалентным подмногообразиям соответствуют эквивалентные канонические лифты (следствие 1). С другой стороны, $R_{h^{-1}}(L_h(\hat{f}))$ есть канонический лифт подмногообразия (D_o, $T_h \circ f$) по совокупности подпространств $h \circ K_1$, $h \circ K_2, \ldots, h \circ K_{p+1}$ [1]. Теорема доказана.

Каждому подмногообразию (D_o, f), для которого возможно построение канонического репера была отнесена совокупность функций $\lambda_p^1(x_o), \ldots, \lambda_p^s(x_o)$, $x_o \in D_o$, которые называются дифференциальными инвариантами подмногообразия (D_o, f) [3]. Справедлива теорема о том, что два подмногообразия однородного пространства одинаковой размерности эквивалентны в том и только том случае, если в соответствующих точках их дифференциальные инварианты одинаковы. Будем считать, что соответствие между точками подмногообразий задается с помощью прообразов. Что же означает " одинаковые дифференциальные инварианты"? Система $\omega^{j+1} = 0, \ldots, \omega^J = 0$, $\omega^{s_1+1} - \lambda_\rho^{s_1+1}\omega^\rho = 0, \ldots, \omega^s - \lambda_\rho^s \omega^\rho = 0$, задающая дифференциальные инварианты подмногообразия (D_o, f), дает выражение левоинвариантных форм группы через некоторые базисные: $\omega^{s+1}, \ldots, \omega^J$. Базисные формы выбираются произвольно с тем условием, что они будучи ограничены на $T(Im\,\hat{f})$ образуют там базис. Вид функций, являющихся дифференциальными инвариантами, зависит от выбора базиса. Выберем базис $V = \{V_1, \ldots, V_n\}$ векторных полей на D_o. Условимся в качестве базисных форм подмногообразия (D_o, f) в точке $x_o \in D_o$ брать формы $d\,\overline{\hat{f}(V_i)^*}$, где знак звездочка означает форму, дуальную соответствующему вектору, а знак черты означает ее левоинвариантное распространение на группу Ли G. При этом понятие "дифференциальные инварианты" приобретает конкретность для подмногообразия (D_o, f). Имеет место следующая теорема.

Теорема 4. Для того, чтобы подмногообразия (D_o, f) и (D_o, g) были эквивалентны, необходимо и достаточно, чтобы существовал базис векторных полей $V = \{V_1, \ldots, V_n\}$ на D_o, такой, что $\overline{d\,\hat{f}(V_i)^*} = \overline{d\,\hat{g}(V_i)^*}$ и для любых соответствующих точек этих подмногообразий дифференциальные инварианты, найденные соответственно в базисах $d\,\hat{f}(V_i)^*$ и $d\,\hat{g}(V_i)^*$, совпадают.

Доказательство. Необходимость.

Пусть подмногообразия (D_o, f) и (D_o, g) эквивалентны, т.е. существует такой элемент $a \in G$, такой, что

$$g(x_o) = a \circ f(x_o). \tag{7}$$

Заметим, что эквивалентные подмногообразия продолжаются в одну и ту же орбиту $M_1 = G/H_1$ множества Γ_1. Пусть $\tilde{f}: Imf \to M_1: x \to \overline{T}_x(Imf)$, $\tilde{g}: Img \to M_1: x \to \overline{T}_x(Img)$ – продолжающие отображения. Тогда имеет место равенство (5): $\tilde{g}(a \circ x) = a \circ \tilde{f}(x)$. Значит, $a \circ f_1(x_o) = a \circ \tilde{f}(f(x_o)) = \tilde{g}(a \circ f(x_o)) = \tilde{g}(g(x_o)) = g_1(x_o)$.

Аналогично доказываются равенства:

$$g_i(x_o) = a \circ f_i(x_o),\ i = 1, 2, \ldots, p, \tag{8}$$

где f_i, g_i – последующие отображения f и g. Отсюда:

$$\hat{g}(x_o) = a \circ \hat{f}(x_o). \tag{9}$$

Следовательно,

$$\hat{g}^*(x_o) = (a \circ \hat{f})^*(x_o). \tag{10}$$

Равенство (9) выполняется и для любых линейных комбинаций форм ω^j.

Пусть $x_o \in D_o$. Рассмотрим последовательность подпространств

$$N_f = T_{f(x_0)}(Imf), N_{1f} = T_{f_1(x_0)}(Imf_1), \ldots, N_{p+1,f} = T_{f_{p+1}(x_0)}(Imf_{p+1}), \tag{11}$$

$$N_g = T_{g(x_0)}(Img),\ N_{1g} = T_{g_1(x_0)}(Img_1), \ldots, N_{p+1,g} = T_{g_{p+1}(x_0)}(Img_{p+1}). \tag{12}$$

В силу (8) пространства (11) с помощью сдвига элементом преобразуются в соответствующие пространства (12).

Рассмотрим пространства $N_f^* = d\pi^{-1}(T_{f(x_0)}(Imf))$ и $N_g^* = d\pi^{-1}(T_{g(x_0)}(Img))$. В силу равенств $\pi \circ L_a = T_a \circ \pi$, $d\pi \circ dL_a = dT_a \circ d\pi$ имеем $d\pi \circ dL_a(N_f^*) = dT_a(d\pi(N_f^*)) = dT_a(N_f) = N_g =$

$=d\pi(\, d\pi^{-1}(N_g)) = d\pi(\, N_g^{*})$.

Отсюда:

$$d\,L_a(N_f^{*}) = N_g^{*}, \qquad (13)$$

поскольку при $d\;L_a$ полный прообраз преобразуется в полный прообраз.

Пусть

$$\omega^{t+1} = 0,\ldots,\omega^{r} = 0 \qquad (14)$$

- система 1-форм в точке $\hat{g}^{*}(x_o)$, определяющая подпространство N_g^{*}, тогда система

$$d\,L_a\,\omega^{t+1} = 0,\ldots,\, d\,L_a\,\omega^{r} = 0 \qquad (15)$$

1-форм в точке $\hat{f}\,(x_o)$ будет определять подпространство N_f^{*}. Рассуждая аналогично для подпространства N_{if}^{*} и N_{ig}^{*}, $i = 1,2,\ldots,\, p{+}1$, получим, что N_{if}^{*} и N_{ig}^{*} определяются системами 1-форм, отличающимися левым сдвигом L_a. Это означает, что дифференциальные инварианты подмногообразий $(D_o,\, f)$ и $(D_o,\, g)$ в соответствующих точках совпадают. Базисными формами подмногообразия $(D_o,\, f)$, $\omega^{s+1},\ldots,\, \omega^{j}$ можно выбрать формы $d\,\hat{f}(V_i)^{*}_{x_0}$, где $V = \{V_1,\ldots,V_n\}$- некоторый базис векторных полей на D_o. Тогда базисными формами подмногообразия $(D_o,\, g)$ будут формы $d(a \circ \hat{f})(V_i)^{*}_{x_0} = d\,\hat{g}(V_i)^{*}_{x_0} = d\,\hat{f}(V_i)^{*}_{x_0}$.

Достаточность. Пусть существует базис $V = \{V_1,\ldots,V_n\}$ векторных полей на D_o, такой, что $\forall x_o \in D_o$ в базисе $\omega^{j} = d\,\hat{f}(V_i)^{*}_{x_0} = d\,\hat{g}(V_i)^{*}_{x_0}$ подмногообразия $(D_o,\, f)$ и $(D_o,\, g)$ имеют одинаковые дифференциальные инварианты. Это значит, что любая форма ω^{j}, не являющаяся базисной, выражается через ω^{j} на пространствах $T_{\hat{f}(x_0)}(Im\,\hat{f})$ и $T_{\hat{g}(x_0)}(Im\,\hat{g})$ с одними и теми же коэффициентами. Поскольку $\omega^{j} = d\,\hat{f}(V_i)^{*}_{x_0} = d\,\hat{g}(V_i)^{*}_{x_0}$, то $\omega^{j}\,(d\,\hat{f}(V_k)^{*}_{x_0}) = \omega^{j}\,(d\,\hat{g}(V_k)^{*}_{x_0}) = \delta^{i}_{k},\ i, k = 1, 2,\ldots,\, n$ и значит:

$$\hat{f}^{\,*}(\omega^{j}) = \hat{g}^{\,*}(\omega^{j}),\ i = 1, 2,\ldots,\, n.$$

Остальные левоинвариантные формы ω^{j} группы Ли G в точках $\hat{f}\,(x_o)$ и $\hat{g}\,(x_o)$ выражаются через базисные с одинаковыми коэффициентами: $\omega^{j} = \sum_i \alpha_i \omega^{i}$. Значит:

$$\hat{f}^{\,*}(\omega^{j}) = \hat{f}^{\,*}\Big(\sum_i \alpha_i\omega^{i}\Big) = \sum_i \alpha_i\ \hat{f}^{*}(\omega^{j}) =$$

$$= \sum_i \alpha_i\ \hat{f}^{*}(\omega^{j}) = \hat{g}^{\,*}\Big(\sum_i \alpha_i\omega^{i}\Big) = \hat{g}^{\,*}(\,\omega^{j}).$$

Таким образом, выполняется условие теоремы 2.3 [2, стр. 238]. Тогда существует элемент $a \in G$ такой, что для любого $x_o \in D_o$: $g(x_o) = L_a(\,f(x_0))$, то есть по следствию 1 подмногообразия $(D_o,\, f)$ и $(D_o,\, g)$ эквивалентны. Теорема доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗУЕМЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Андреев А.С., Юдов А.А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в ее алгебру Ли.// Вестник Брестского государственного технического университета, № 5- 2000.С. 28-31.
2. Стернберг С. Лекции по дифференциальной геометрии. М., 1970 г.
3. Андреев А.С. Построение канонического лифта подмногообразия однородного пространства в структурную группу Ли и в ее алгебру Ли.// Вестник Брестского государственного технического университета, № 5- 2001.С. 61-64.
4. Юдов А.А. Описание и обоснование метода Картана построения канонического репера подмногообразия. // Известия АН БССР, деп. ВИНИТИ, 1982 г., № 359582.
5. Юдов А.А. Канонический лифт подмногообразия однородного пространства *G* в структурную группу Ли и ее алгебру Ли. Проблема эквивалентности подмногообразий пространства $^{2}R_4$. // Известия АН БССР, деп. ВИНИТИ, 1989 г., № 1498-В89.

УДК 517.9

Макарук С.Ф.

КОНСТРУКТИВНЫЙ АНАЛИЗ ЗАДАЧИ ОПТИМАЛЬНОГО ДИЗАЙНА КОМПОЗИЦИОННОГО МАТЕРИАЛА В СЛУЧАЕ ДВУХ КРУГОВЫХ ВКЛЮЧЕНИЙ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

При конструировании композиционных материалов возникает задача размещения круговых включений таким образом, чтобы проводимость эквивалентного ему однородного материала (так называемая эффективная проводимость) принимала экстремально возможные значения. Задачи такого типа относятся к задачам оптимального дизайна композиционных материалов (см., например, [1-4]). Стационарная плоская задача такого типа может быть сформулирована как смешанная краевая задача для (аналитического) комплексного потенциала в области, часть границы которой неизвестна.

Постановка задачи оптимального дизайна композиционных материалов такова. Дана область D, ограниченная простой замкнутой кривой Ляпунова Γ. Эта область разбивается на две части $D^{+} := int\ \ L$ и $D^{-} := ext\ \ L \bigcap int\ \ \Gamma$ некоторой неизвестной кривой L, состоящей из конечного (≥ 1) числа связных непересекающихся компонент (простых гладких замкнутых кривых Ляпунова). Области D^{+} и D^{-} заполнены различными материалами, имеющими проводи-

Макарук Светлана Федоровна. *Ассистент каф. высшей математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.