Выполнив соответствующие преобразования, получим

$$\int_a^b (\dot{x}(t)+\lambda(P(t)x(t)+\lambda\int_a^b K(t,s)\dot{x}(s)ds)z(t)dt =$$

$$=\lambda x'(a)\int_a^b P'(t)z(t)dt+\int_a^b \dot{x}'(t)(z(t)+$$

$$+\lambda\int_t^b P'(s)z(s)ds+\lambda\int_a^b K'(s,t)z(s)ds)dt$$

Учитывая краевые условия задачи (1), получим:

$$\int_a^b (\dot{x}(t)+\lambda(P(t)x(t)+\int_a^b K(t,s)\dot{x}(s)ds)z(t)dt =$$

$$=\lambda\int_a^b \dot{x}'(t)M'(t)dt+\int_a^b P'(s)z(s)ds+\int_a^b \dot{x}'(t)(z(t)+$$

$$+\lambda\int_t^b P'(s)z(s)ds+\lambda\int_a^b K'(s,t)z(s)ds)dt$$

или

$$\int_a^b (\dot{x}(t)+\lambda P(t)x(t)+$$

$$+\lambda\int_a^b K(t,s)\dot{x}(s)ds)z(t)dt=\int_a^b \dot{x}'(t)(z(t)+$$

$$+\lambda\int_t^b P'(s)z(s)ds+\lambda\int_a^b (K'(s,t)+$$

$$+M'(t)P'(s))z(s)ds)dt.$$

Отсюда получим, что при $\forall x \in D(T)$ ($T$-линейный оператор, соответствующий краевой задаче (1), $\forall z \in L_2^n[a,b]$ имеет место равенство

$$(Tx,z)=(Sx,T_s^* z),$$

где $S$ - оператор, определяемый соотношениями (2), а оператор $T_s^*$ имеет вид:

$$T_s^* z \equiv z(t)+\lambda(\int_t^b (P'(s)z(s)ds+$$

$$+\int_a^b K'(s,t)+M'(t)P'(s))z(s)ds \qquad (3)$$

где $P'(s)$, $K'(s,t)$, $M'(t)$ - матрицы, транспонированные соответственно матрицам $P(s)$, $K(s,t)$, $M(t)$.

$S$- сопряженный оператор $T_s^*$ (3) можно записать в фредгольмовом виде

$$T_s^* z = z(t)+\lambda\int_a^b \tilde{K}(t,s)z(s)ds, \qquad (3')$$

если положить

$$\tilde{K}(t,s)=$$

$$=\left[\begin{array}{l} K'(s,t)+M'(t)P'(s),\ \text{если}\ a\le s<t \\ K'(s,t)+(M'(t)+E)\ \ P'(s),\ \text{если}\ t\le s\le b. \end{array}\right.$$

Используя результаты корректной разрешимости, изложенные в [1], утверждение 1, построение s-сопряженного оператора, приведенного в [2], заключаем, что имеет место

Теорема. Если $S$-сопряженный оператор (3) (или 3') везде разрешим, то оператор $T$, соответствующий краевой задаче (1), корректно разрешим.

### СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ


1. Крейн С.Г. Линейные уравнения в банаховом пространстве, М., 1971.
2. Пархимович И.В. ДУ, 8 № 8, 1972.


УДК 517.95

**Кот А.В.**

# О ПРИМЕНЕНИИ СЕТОЧНЫХ МЕТОДОВ ДЛЯ РЕШЕНИЯ НЕЛИНЕЙНЫХ ЗАДАЧ ПАРАБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

## ПОСТАНОВКА И АЛГОРИТМ РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных вида

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+P(u,x,t) \qquad (1)$$

с начальным условием

$$u(x,0)=u_0(x) \qquad (2)$$

и граничными условиями

$$u(x,t)=l_0\left(\frac{\partial u}{\partial t},u,x,t\right)\Bigg|_{x=\alpha_x},$$

$$u(x,t)=l_1\left(\frac{\partial u}{\partial t},u,x,t\right)\Bigg|_{x=\beta_x}, \qquad (3)$$

где $t\in[\alpha_t,\beta_t]$, $x\in[\alpha_x,\beta_x]$. Здесь $P(u,x,t)$ — некоторая нелинейная функция, $u_0(x)$, $l_0(x,t)$, $l_1(x,t)$ — некоторые заданные функции.

*Кот Александр Владимирович. Ст. преподаватель каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина.*
*Беларусь, БрГУ, г. Брест, бульвар Космонавтов, 21.*

Для решения поставленной дифференциальной задачи заменим дифференциальное уравнение в частных производных (1) системой обыкновенных дифференциальных уравнений, произведя дискретизацию задачи (1) – (3) по $t$.

На отрезке $\left[\alpha_t,\beta_t\right]$ возьмем точки $t_k=\alpha_t+kh_t$ ($k=\overline{0,N}$), $h_t=\left(\beta_t-\alpha_t\right)/N$ (для простоты будем рассматривать равномерную сетку) и проведем прямые $t=t_k$. Предполагая существование достаточно гладкого решения $u\left(x,t\right)$ задачи положим $t=t_k$ ($k=0,1,...,N$) и заменим производную по $t$ правосторонним разностным отношением.

Таким образом, получаем систему обыкновенных дифференциальных уравнений вида

$$\frac{y\left(x,t_k\right)-y\left(x,t_{k-1}\right)}{h_t}=\frac{d^2y\left(x,t_k\right)}{dx^2}+ \\ +P\left(y\left(x,t_k\right),x,t_k\right),\quad k=\overline{0,N} \tag{4}$$

Обозначив $y\left(x,t_k\right)=y_k\left(x\right)$ из (4) получим

$$y_k\left(x\right)=y_{k-1}\left(x\right)+h_t\left(\frac{d^2y_k\left(x\right)}{dx^2}+P\left(y_k\left(x\right),x,t_k\right)\right), \\ k=\overline{0,N}. \tag{5}$$

После аналогичной замены краевые условия (3) примут вид

$$y_k\left(\alpha_x\right)=l_0\left(\frac{y_k\left(\alpha_x\right)-y_{k-1}\left(\alpha_x\right)}{h_t},y_k\left(\alpha_x\right),\alpha_x,t_k\right) \\ y_k\left(\beta_x\right)=l_1\left(\frac{y_k\left(\beta_x\right)-y_{k-1}\left(\beta_x\right)}{h_t},y_k\left(\beta_x\right),\beta_x,t_k\right), \\ k=\overline{0,N} \tag{6}$$

Таким образом, применение метода прямых к задаче (1) – (3) приводит к системе $N$ дифференциальных уравнений вида (5), каждому из которых соответствует два граничных условия вида (6).

Очевидно, что из условия (2) при $k=0$ получаем решение на нулевом слое. Далее последовательно решаем дифференциальные задачи (5), (6) при $k=1,2,...,N$. При этом в каждой задаче используются уже вычисленные значения функции $y$ предыдущего слоя.

Каждую дифференциальную задачу (5), (6) будем решать методом сеток. Для этого на отрезке $\left[\alpha_x,\beta_x\right]$ возьмем точки $x_p=\alpha+p\tau$, $p=\overline{0,M}$, $\tau=\left(\beta_x-\alpha_x\right)/M$. Положим в уравнении (5) $x=x_p$ и заменим вторые производные по $x$ разностным аналогом. Получим

$$y_k\left(x_p\right)=y_{k-1}\left(x_p\right)+ \\ +h_t\left(\sum_{j=0}^{m_x}c_{pj}y_k\left(x_{p+j+l}\right)+P\left(y_k\left(x_p\right),x_p,t_k\right)\right), \\ p=\overline{0,M}, \tag{7}$$

где $\left(m_x+1\right)$ — количество точек аппроксимации производной, $p$ — номер точки, в которой производится аппроксимация производной по $l$-ой точке.

Заменим два последние уравнения системы (7) краевыми условиями (6). И так как значения функции $y$ на $k$-м слое являются искомыми, то для $k$-го слоя примем $y_{p,k}=z_p$. Тогда

$$\begin{cases} z_p=y_{p,k-1}+h_t\left(\sum\limits_{j=0}^{m_x}c_{pj}z_{p+j-l}+P\left(f_p,x_p,t_k\right)\right), \\ p=\overline{0,M-2}, \\ z_0=l_0\left(\dfrac{z_0-u_{0,k-1}}{h_t},z_0,\alpha_x,t_k\right), \\ z_M=l_1\left(\dfrac{z_M-u_{M,k-1}}{h_t},z_M,\beta_x,t_k\right), \end{cases} \tag{8}$$

где $y_k\left(x_p\right)=y_{p,k}$.

Решая полученную систему (8) на слоях с номерами $1,2,...,N$, т.е. последовательно при $k=1,2,...,N$, получаем решение разностной задачи, соответствующей исходной дифференциальной задаче (1) – (3).

**Замечание 1**: Аппроксимацию полученного решения можно получить, используя, например, ряды Фурье.

**Замечание 2**: Преобразования системы (4) в (5) повышают устойчивость вычислительного процесса.

## РЕШЕНИЕ СИСТЕМЫ НЕЛИНЕЙНЫХ УРАВНЕНИЙ

Система нелинейных уравнений (8) есть система $M$ нелинейных уравнений с $M$ неизвестными. Ее можно представить в виде $F\left(Z\right)=0$, где

$$Z=\begin{bmatrix} z_1 \\ z_2 \\ ... \\ z_M \end{bmatrix},\quad F=\begin{bmatrix} f_1\left(Z\right) \\ f_2\left(Z\right) \\ ... \\ f_M\left(Z\right) \end{bmatrix},$$

$$\begin{cases} f_p\left(Z\right)=z_p-\left(u_{p,k-1}+h_t\left(\sum\limits_{j=0}^{m_x}c_{pj}z_{p+j-l}+P\left(f_p,x_p,t_k\right)\right)\right), \\ p=\overline{0,M-2}, \\ f_{M-1}\left(Z\right)=z_0-l_0\left(\dfrac{z_0-u_{0,k-1}}{h_t},z_0,\alpha_x,t_k\right), \\ f_M\left(Z\right)=z_M-l_1\left(\dfrac{z_M-u_{M,k-1}}{h_t},z_M,\beta_x,t_k\right). \end{cases} \tag{9}$$

Для решения системы (8) применим один из следующих методов:

1. Первый метод, предложенный в работе [1]:

$$\beta_{-1}=1,\ w_0=\left\|F\left(Z_0\right)\right\|^2, \tag{10}$$

$$\left(\beta_{n-1}\left\|F\left(Z_n\right)\right\|^2E+\overline{F'\left(Z_n\right)}F'\left(Z_n\right)\right)\Delta Z_n= \\ =-\overline{F'\left(Z_n\right)}F\left(Z_n\right) \tag{11}$$

$$Z_{n+1} = Z_n + \beta_n \Delta Z_n, \tag{12}$$

$$\beta_n = \frac{w_n}{w_n + \beta_{n-1}\left\|F\left(Z_n + \Delta Z_n\right)\right\|^2}, \tag{13}$$

$$w_{n+1} = \left(1 - 2\beta_n\right) w_n + \\ +\beta_n^2\left(w_n + \left\|F\left(Z_n + \Delta Z_n\right)\right\|^2 \beta_{n-1}\right). \tag{14}$$

2. Второй метод, предложенный в [1]:

$$\beta_{-1} = 1,\ w_0 = \left\|F\left(Z_0\right)\right\|, \tag{15}$$

$$\left(\beta_{n-1}\left\|F\left(Z_n\right)\right\|^2 E + \overline{F'\left(Z_n\right)} F'\left(Z_n\right)\right)\Delta Z_n = \\ = -\overline{F'\left(Z_n\right)} F\left(Z_n\right) \tag{16}$$

$$Z_{n+1} = Z_n + \beta_n \Delta Z_n, \tag{17}$$

$$\beta_n = \min\left(1, \frac{w_n}{2\beta_{n-1}\left\|F\left(Z_n + \Delta Z_n\right)\right\|}\right), \tag{18}$$

$$w_{n+1} = \left(1 - \beta_n\right) w_n + \beta_n^2\left\|F\left(Z_n + \Delta Z_n\right)\right\| \beta_{n-1}. \tag{19}$$

3. Метод, предложенный в [2]:

$$\left(\alpha\left\|F\left(Z_n\right)\right\|^2 E + \overline{F'\left(Z_n\right)} F'\left(Z_n\right)\right)\Delta Z_n = \\ = -\overline{F'\left(Z_n\right)} F\left(Z_n\right)$$

$$\alpha = 10^{-10} \div 10^{-15}, \tag{20}$$

$$Z_{n+1} = Z_n + \beta_n \Delta Z_n,\ \beta_0 = 10^{-1} \div 10^{-4}, \tag{21}$$

$$\beta_{n+1} = \min\left(1, \frac{\left\|F\left(Z_n\right)\right\|}{\left\|F\left(Z_{n+1}\right)\right\| \beta_n}\right). \tag{22}$$

Сравним эти методы с другими известными методами: методом Ньютона, регуляризованным методом Гаусса-Ньютона, нерегуляризованным методом Ермакова-Калиткина [3], регуляризованным методом Ермакова-Калиткина [3] и методом Жанлава-Пузынинна [4].

Для достижения большей точности шаг $h_t$ приходится брать очень малым. Это, в свою очередь, вызывает увеличение числа слоев, т.е. числа решаемых дифференциальных задач, а, следовательно, и систем вида (8). В свою очередь, при решении системы (8) одним из вышеуказанных методов приходится совершать очень много шагов итерационного процесса. Количество шагов можно сократить, если попытаться повысить точность решения системы. Это возможно, если на каждом шаге итерационного процесса попробовать получить более точные приближения координат $Z_n$.

Значения $z_p$, $p = \overline{0, p-1}$ получаем из (8) как значения правой части. При вычисления значения функции $F$ для очередного приближения $Z$ при решении системы нелинейных уравнений (8) вместо прямого вычисления значения $f_p\left(Z\right)$ сначала находим новое значение координаты $z_p$ вектора $Z$ по формулам (8), а затем вычисляем значение $f_p\left(Z\right)$ по формулам (9). В этом случае для вычисления очередной координаты $z_p$ будут использоваться новые, только что вычисленные, координаты $z_i$, $i = \overline{0, p-1}$.

Как показал вычислительный эксперимент, для достижения заданной точности в этом случае требуется произвести значительно меньше итераций. Это, в свою очередь, позволяет делать шаг по $t$ крупнее, т.е. решать меньшее количество дифференциальных задач (5), (6).

Вычисление значения $z_p$ по формулам (8) есть аналог применения формулы Эйлера при решении задачи Коши.

## ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Для проверки эффективности вычислительного алгоритма рассмотрим тестовый пример.

Пусть дано дифференциальное уравнение

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \sin x + \cos t$$

с начальным условием

$$g\left(x, 0\right) = \sin x$$

и граничными условиями

$$u_{\alpha_x}\left(t\right) = \sin\alpha_x + \sin t,$$

$$u_{\beta_x}\left(t\right) = \sin\beta_x + \sin t.$$

Точным решением этой дифференциальной задачи является функция $u\left(x, t\right) = \sin x + \sin t$.

Система (8) для данного примера будет иметь следующий вид

$$\begin{cases} z_p = u_{p,k-1} + h_t\left(\sum\limits_{j=0}^{m_x} c_{pj} z_{p+j-l} + \sin x_p + \cos t_k\right), \\ p = \overline{0, M-2}, \\ z_0 = \sin\alpha_x + \sin t_k, \\ z_M = \sin\beta_x + \sin t_k. \end{cases}$$

Данная система решалась рассмотренными выше методами при различных начальных параметрах. Точность решения системы нелинейных уравнений составляла $10^{-10}$.

Сразу заметим, что такие методы, как метод Ньютона, метод Гаусса-Ньютона, нерегуляризованный и регуляризованный методы Ермакова-Калиткина расходились, метод Жанлава-Пузынинна сходился очень медленно. Методы 1, 2 и 3 работают хорошо, но лучше всего показал себя метод 2, как по точности, так и по скорости вычислений.

**Замечание 1**: Так как количество последовательно решаемых дифференциальных задач достаточно велико, то при решении было установлено ограничение на количество итераций для решения одной системы нелинейных уравнений не более 100. Если же число итераций превышало эту цифру, то шаг по оси $t$ уменьшался вдвое (число дифференциальных уравнений увеличивалось вдвое) и вычисления начинались заново.

**Замечание 2**: При разбиении отрезка $\left[\alpha_t, \beta_t\right]$ можно использовать неравномерную сетку, используя для её построения свойства функции $u\left(x, t\right)$.

## СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Кот А.В., Мадорский В.М. Сравнительный анализ эффективности некоторых квазиньютоновских процессов при решении периодических краевых задач// Труды Института математики НАН Беларуси, Минск, 2001, Т.10, С.64–68.

2. Мадорский В.М. Локализация решений нелинейных уравнений// Труды Института математики НАН Беларуси. Минск. 2002. Т.11. С.96–103.
3. Ермаков В.В., Калиткин Н.Н. Оптимальный шаг и регуляризация в методе Ньютона// Журнал вычислительной математики и математической физики, 1981, Т.21, №2, С.491–497.
4. Жанлав Т., Пузынин И.В. О сходимости итераций на основе непрерывного аналога метода Ньютона// Журнал "Вычислит.матем. и матем.физ.", 1992, т.32, №6, С.146–156.

УДК 513.82

***Курочка О.Н., Юдов А.А.***

# ПРОБЛЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ ПОДМНОГООБРАЗИЙ ОДНОРОДНОГО ПРОСТРАНСТВА

Рассмотрим проблему эквивалентности подмногообразий однородного пространства $\mathbf{M} = G/H$.

Пусть заданы два подмногообразия $(D_o, f)$ и $(D_o, g)$ пространства $\mathbf{M}$.

**Определение.** Два подмногообразия $(D_o, f)$ и $(D_o, g)$ однородного $G$-пространства $\mathbf{M}$ называются эквивалентными (или $G$-эквивалентными), если существует элемент $a \in G$, такой, что

$$g(x_o) = T_a( f ( x_o)) \ \forall\, x_o \in D_o. \tag{1}$$

**Определение.** Подмногообразия $(D_o, f)$ и $(D_o, g)$ однородного пространства $\mathbf{M}$ будем называть эквивалентными по образу, если существует $a \in G$, такое, что

$$g(D_o) = T_a( f ( D_o)).$$

Очевидно, что эквивалентные подмногообразия являются эквивалентными по образу.

Подмногообразию $(D_o, f)$, для которого возможно построение канонического репера, была сопоставлена цепочка подгрупп $H \supset H_1 \supset \ldots \supset H_{p+1} = e$, названная типовой цепочкой или типом подмногообразия $(D_o, f)$ [1]. Нетрудно видеть, что каждая подгруппа этой цепочки определена с точностью до сопряженности в группе $G$.

**Определение.** Подмногообразия, имеющие одинаковые (с точностью до сопряженности) типовые цепочки, будем называть однотипными.

**Теорема 1.** Подмногообразия, эквивалентные по образу, однотипны.

Доказательство. Пусть $(D_o, f)$ и $(D_o, g)$ – подмногообразия пространства $G/H$, причем существует элемент $a \in G$, такой, что $g(x) = T_a \circ f ( x)\ \forall x \in D_o$.

Пусть $H_1$ – группа стационарности точки $f(x)$. Тогда группа стационарности точки $g(x)$ есть $aH_1a^{-1}$, т.е. группа сопряженная $H_1$. Аналогичные рассуждения имеют место для точек продолженных подмногообразий. Таким образом, с точностью до сопряженности, типовые цепочки подмногообразий $(D_o, f)$ и $(D_o, g)$ совпадают.

Теорема доказана.

Таким образом, классификация подмногообразий по типам более широкая, чем по эквивалентности. Сформулируем критерий эквивалентности подмногообразий.

**Теорема 2.** Два подмногообразия $(D_o, f)$ и $(D_o, g)$ однородного $G$-пространства $\mathbf{M} = G/H$ тогда и только тогда эквивалентны, когда

$$\hat{f}^*(\omega^i) = \hat{g}^*(\omega^i), \tag{2}$$

$i = 1, 2, \ldots, r$, где $\omega^i$ – базисные левоинвариантные формы на группе Ли $G$ (т.е. базис в $\bar{G}^*$), а $\hat{f}$ и $\hat{g}$ -канонические лифты подмногообразий $(D_o, f)$ и $(D_o, g)$.

Доказательство. Необходимость.

Пусть подмногообразия $(D_o, f)$ и $(D_o, g)$ эквивалентны, то есть существует элемент $a \in G$, что выполняется равенство (1) и пусть $\hat{f} = \lambda_f \circ f$ и $\hat{g} = \lambda_g \circ g$ их канонические лифты. Условие (1) удобно записывать в виде:

$$g(x_o) = a \circ f(x_o)\ \forall\, x_o \in D_o. \tag{3}$$

Пусть $\tilde{f} : f(D_o) = Imf \to M_1 : x \to \bar{T}_x (Imf)$, $\tilde{g} : g(D_o) = Img \to M_1 : x \to \bar{T}_x(Img)$- соответствующие продолжающие отображения, причем очевидно, что продолжение производится в одно и то же пространство $M_1 = G/H_1$. Действие $G$ в пространстве $M_1$ определим формулой:

$$G \times M_1 \to M_1 : (a, K) \to d\, T_a(K) \equiv a \circ K \tag{4}$$

Тогда имеем: $a \circ (\bar{T}_x (Imf)) = d\ T_a\ (\bar{T}_x\ (Imf)) = \bar{T}_{a \circ x}\ (T_a\ (Imf)) = \bar{T}_{a \circ x}\ (Im(T_a \circ f)) = \bar{T}_{a \circ x} (Img)$. Отсюда:

$$\tilde{g}\ (a \circ x) = a \circ \tilde{f}\ (x). \tag{5}$$

Значит, $a \circ f_1\ (x_o) = a \circ \tilde{f}\ (f\ (x_o)) = \tilde{g}\ (a \circ f\ (x_o)) = \tilde{g}\ (\ g\ (x_o)) = g_1\ (x_o)$.

Таким образом, $\forall x_o \in D_o\ \ g_1(x_o) = a \circ f_1(x_o)$.

Аналогично доказываются равенства $g_2(x_o) = a \circ f_2(\ x_o), \ldots, g_p(x_o) = a \circ f_p(\ x_o)$, а следовательно и

$$\hat{g}\ (\ x_o) = a \circ \hat{f}\ (\ x_o) = L_a (\ \hat{f}\ (\ x_o))\ \ \forall x_o \in D_o. \tag{6}$$

Таким образом, эквивалентным подмногообразиям соответствуют эквивалентные канонические лифты. Из (6) для любой левоинвариантной 1-формы $\omega^j$ на группе $G$ получим $\hat{g}^*(\omega^j) = (L_a \circ \hat{f}\ )^*(\omega^j) = \hat{f}^*(L_a^*(\omega^j))$ и, следовательно, в силу левоинвариантности формы $\omega^j$: $\hat{g}^*(\omega^j) = \hat{f}^*(\omega^j)$.

Достаточность. Пусть выполняется равенство (2), тогда в

***Курочка О.Н.*** *Студентка V курса математического факультета Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина.*
***Юдов А.А.*** *К. физ.-мат.н., доцент каф. алгебры и геометрии Брестского государственного университета им. А.С. Пушкина. Беларусь, БрГУ им. А.С. Пушкина, 224665, г. Брест, бульвар Космонавтов, 21.*