$$M=\frac{A}{\Gamma(\alpha)}\times$$

$$\times\left(\frac{l^{\alpha}}{\alpha}+\sum_{i=1}^{n-1}(\alpha-1)(\alpha-2)\ldots(\alpha-(j-1))\,l^{\alpha-j}\right), \qquad (36)$$

$$B=\sum_{k=0}^{\infty}M^{k}, \qquad (37)$$

В правую часть (34) подставляем C_{λ} из (35), получим:

$$\|y(x)-y_{\lambda}(x)\|_{L^{(j)}(0,\,l)}\le B\|y(x)-\mathcal{U}_{\lambda}(y;x)\|_{L^{(j)}(0,\,l)}+$$

$$+A\,l\,\|y(x)-y_{\lambda}(x)\|_{L^{(j)}(0,\,l)}\cdot\varepsilon\left(\mathcal{U}_{\lambda},æ^{\omega_L^{(j)}}_{\cdots\,\alpha}\right) \qquad (38)$$

Решаем неравенство (38) относительно $\|y(x)-y_{\lambda}(x)\|_{L^{(j)}(0,l)}$

$$\|y(x)-y_{\lambda}(x)\|_{L^{(j)}(0,\,l)}\le$$

$$\le\frac{B\,\|y(x)-\mathcal{U}_{\lambda}(y;x)\|_{L^{(j)}(0,\,l)}}{1-A\,l\,\varepsilon\left(\mathcal{U}_{\lambda},æ^{\omega_L^{(j)}}_{\cdots\,\alpha}\right)} \qquad (39)$$

Теорема 2 доказана.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Семенчук Н.П. // Дифференциальные уравнения. 1982. Т. 18, № 10. С. 1831-1833.
2. Джрбашян М.М., Нерсенян А.Б. //Известия АН Армянской ССР. 1968. 3, № 1. С. 3-29.
3. Натансон И.П. Теория функций вещественной переменной. М., 1974.
4. Колмогоров А.Н., Фомин С.В. Элементы теории функций и функционального анализа. М., 1981.
5. Самко С.Г., Килбас А.А., Маричев О.И. – Интегралы и производные дробного порядка и некоторые их приложения. Минск, 1987.

УДК 517.929

Афонин В.Г., Тузик И.В.

ОБ УСРЕДНЕНИИ В СИСТЕМАХ, СОВЕРШАЮЩИХ МЕДЛЕННЫЕ И БЫСТРЫЕ ДВИЖЕНИЯ

1. УСРЕДНЕНИЕ В ПЕРВОМ ПРИБЛИЖЕНИИ

Рассмотрим систему дифференциальных уравнений

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\varepsilon X(x,y,\varepsilon)=\varepsilon X(x,y,0)+\varepsilon^2X^1(x,y,\varepsilon),\\[2mm] \dfrac{dy}{dt}=Y(x,y,\varepsilon)=Y(x,y,0)+\varepsilon Y^1(x,y,\varepsilon)\end{cases} \qquad (1.1)$$

с начальными условиями $x|_{t=0}=x_0$, $y|_{t=0}=y_0$ на промежутке $0<t<L/\varepsilon$. Здесь $\varepsilon>0$ - малый параметр, L - конечное число, X – m-мерная, а Y – k-мерная вектор-функции, достаточно гладкие по компонентам x и y и аналитические по параметру ε.

Системе (1.1) ставится в соответствие система

$$\frac{d\xi}{dt}=\varepsilon\,\bar{X}(\xi) \qquad (1.2)$$

с начальным условием $\xi|_{t=0}=x_0$, причем m-мерная вектор-функция $\bar{X}(\xi)$ должна быть подобрана таким образом, чтобы на большом промежутке $0<t<L/\varepsilon$ выполнялось соотношение

$$\|x(t)-\xi(t)\|=O(\varepsilon)\,. \qquad (1.3)$$

Пусть выбор $\bar{X}(\xi)$ уже сделан. Для получения оценки вида (1.3) введем вспомогательную функцию

$$\tilde{x}=\xi+\tilde{X}(x,y)\,. \qquad (1.4)$$

Здесь $\tilde{X}(x,y)$ является частным решением векторного уравнения

$$\left(Y(x,y,0),\frac{\partial}{\partial y}\right)\tilde{X}(x,y)=X(x,y,0)-\bar{X}(x), \qquad (1.5)$$

в котором x и y являются решением системы (1.1). Заметим, что поскольку x и y нам неизвестны, уравнение (1.5) должно решаться при произвольных допустимых значениях x и y.

Теорема 1. Пусть $\bar{X}$ и $\tilde{X}$ выбраны таким образом, что

$$\left\|X^1(x,y,\varepsilon)-\left(X(x,y,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{X}(x,y)-\right.$$

$$-\left(Y^1(x,y,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial y}\right)\tilde{X}(x,y)+ \qquad (1.6)$$

$$\left.+\left[\bar{X}(\xi+\varepsilon\tilde{X}(x,y))-\bar{X}(\xi)\right]/\varepsilon\right\|\le L(t)\,,$$

$$\|\bar{X}(x)-\bar{X}(\tilde{x})\|\le K(t)\|x-\tilde{x}\|, \qquad (1.7)$$

$$\|\tilde{X}(x,y)\|\le M(t) \qquad (1.8)$$

для $t\in[0,L/\varepsilon)$.

Тогда имеет место неравенство

$$\|x(t)-\xi(t)\|\le\varepsilon M(0)exp(\varepsilon\int_0^t K(u)du)+$$

$$+\varepsilon^2\int_0^t L(s)exp(\varepsilon\int_s^t K(u)du)ds+\varepsilon M(t). \qquad (1.9)$$

<u>Доказательство</u>. В силу (1.1), (1.2), (1.4) имеем

Афонин Владимир Гаврилович. *Доцент каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного технического университета.*
Тузик Ирина Владимировна. *Аспирант каф. информатики и прикладной математики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

$$\frac{d(x-\tilde{x})}{dt}=\varepsilon X(x,y,\varepsilon)-\frac{d\xi}{dt}-\varepsilon\frac{d}{dt}\tilde{X}(x,y)=$$
$$=\varepsilon X(x,y,0)+\varepsilon^2X^1(x,y,\varepsilon)-\varepsilon\bar{X}(\xi)-$$
$$-\varepsilon^2\left(X(x,y,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{X}(x,y)-$$
$$-\varepsilon\left(Y(x,y,0),\frac{\partial}{\partial y}\right)\tilde{X}(x,y)-$$
$$-\varepsilon^2\left(Y^1(x,y,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial y}\right)\tilde{X}(x,y)=$$
$$=\varepsilon\bar{X}(x)-\varepsilon\bar{X}(\xi)+$$
$$+\varepsilon^2\left[X^1(x,y,\varepsilon)-\left(X(x,y,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{X}(x,y)-\right.$$
$$\left.-\left(Y^1(x,y,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial y}\right)\tilde{X}(x,y)\right]$$

Теперь, учитывая (1.6) и (1.7), получаем:

$$\left\|x(t)-\tilde{x}(t)\right\|\le\left\|x(0)-\tilde{x}(0)\right\|exp(\varepsilon\int_0^t K(u)du)+$$
$$+\varepsilon^2\int_0^t L(s)exp(\varepsilon\int_s^t K(u)du)ds$$

теорема доказана.

Очевидно, основным вопросом в вышеприведенных построениях является выбор функций $\bar{X}$ и $\tilde{X}$.

Приведем пример выбора $\bar{X}$ и $\tilde{X}$ для многочастотной системы

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\varepsilon X(x,\psi,\varepsilon)=\varepsilon X(x,\psi,0)+\varepsilon^2X^1(x,\psi,\varepsilon)=\\ =\varepsilon X_0(x)+\varepsilon\sum\limits_{p\neq0}X_p(x)e^{i(p,\psi)}+\varepsilon^2X^1(x,\psi,\varepsilon),\\ \dfrac{d\psi}{dt}=\omega(x)+\varepsilon\,\Psi(x,\psi,\varepsilon),\end{cases}\qquad(1.10)$$

которая получается из (1.1), если

$$y=\psi,\ Y(x,y,0)=\omega(x),$$
$$Y^1=\Psi,$$
$$X(x,y,0)=X_0(x)+\sum_{p\neq0}X_p(x)e^{i(p,\psi)}.$$

Здесь $p=\{p_1,p_2,\ldots,p_k\}$, где p_i - целые числа, вектор $X_{-p}(x)$ является комплексно сопряженным к $X_p(x)$; считая, что в $\sum\limits_p$ вместе с p встречается и $-p$, мы фактически будем иметь дело лишь с действительными величинами. Далее будем считать, что $\sum\limits_p$ конечна (см. Замечание 1). Предположим еще, что для всех значений $p\neq0$, встречающихся в $\sum\limits_p$ и $t\in[0,L/\varepsilon)$ величины $\dfrac{1}{(p,\omega(x))}$ конечны, т.е. будем рассматривать нерезонансный случай. Тогда в качестве $\bar{X}$ естественно взять X_0; уравнение (1.5) при этом запишется в виде

$$\left(\omega(x),\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\tilde{X}(x,\psi)=\sum_{p\neq0}X_p(x)exp(i(p,\psi)).$$

Решение последнего уравнения будем искать в виде

$$\tilde{X}(x,\psi)=\sum_{p\neq0}\tilde{X}_p(x)exp(i(p,\psi)).$$

Учитывая, что $\left(\omega,\dfrac{\partial}{\partial\psi}\right)e^{i(p,\psi)}=i(\omega,p)e^{i(p,\psi)}$, получаем $i(\omega(x),p)\tilde{X}_p(x)=X_p(x)$, откуда

$\tilde{X}_p(x)=\dfrac{1}{i(\omega(x),p)}X_p(x)$, поэтому

$$\tilde{X}(x,\psi)=\sum_{p\neq0}\frac{1}{i(\omega(x),p)}X_p(x)exp(i(p,\psi)).\qquad(1.11)$$

Легко проверить, что вопрос выбора функции $\bar{X}(x)$ здесь решается однозначно. Действительно, пусть $F(x)=\bar{X}-X_0\neq0$.

Тогда для $\tilde{X}(x,\psi)$ получается уравнение

$$\left(\omega(x),\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\tilde{X}(x,\psi)=$$
$$=\sum_{p\neq0}X_p(x)exp(i(p,\psi))+F(x),$$

решение которого

$$\tilde{X}(x,\psi)=\sum_{p\neq0}X_p(x)\frac{exp(i(p,\psi))}{i(p,\omega(x))}+\frac{1}{k}\sum_{s=1}^{k}\frac{\Psi_s}{\omega_s}F(x).$$

Но компоненты ψ_s вектора ψ имеют порядок $1/\varepsilon$, если $t\sim1/\varepsilon$, а компоненты ω_s вектора ω можно считать конечными. Поэтому $\left\|\tilde{X}(x,\psi)\right\|\sim\dfrac{1}{\varepsilon}$ при $t\sim1/\varepsilon$ и из (1.9) не будет следовать (1.3).

<u>Замечание 1</u>. Очевидно, если $\sum\limits_p$ будет содержать бесконечное число слагаемых, то оценка величин $(p,\omega(x))$ может вызвать серьезные трудности даже в случае $k=2$ [1].

2. ОБ УСРЕДНЕНИИ ВО ВТОРОМ ПРИБЛИЖЕНИИ МНОГОЧАСТОТНЫХ СИСТЕМ В НЕРЕЗОНАНСНОМ СЛУЧАЕ

Рассмотрим следующую многочастотную систему:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt}=\varepsilon X(x,\psi,\varepsilon)=\varepsilon X(x,\psi,0)+\varepsilon^2 X^1(x,\psi,\varepsilon)= \\ =\varepsilon X(x,\psi,0)+\varepsilon^2 X^1(x,\psi,0)+\varepsilon^3 X^2(x,\psi,\varepsilon)= \\ =\varepsilon\sum_p X_p(x)\exp(i(p,\psi))+\varepsilon^2\sum_q X_q^1(x)\exp(i(q,\psi))+ \\ +\varepsilon^3 X^2(x,\psi,\varepsilon), \\ \dfrac{d\psi}{dt}=\omega(x)+\varepsilon\,\Psi(x,\psi,\varepsilon)=\omega(x)+\varepsilon\,\Psi(x,\psi,0)+ \\ +\varepsilon^2\,\Psi^1(x,\psi,\varepsilon)= \\ =\omega(x)+\varepsilon\sum_r \Psi_r(x)\exp(i(r,\psi))+\varepsilon^2\Psi^1(x,\psi,\varepsilon)\end{cases} \tag{2.1}$$

на промежутке $0<t<L/\varepsilon$ с начальными условиями $x|_{t=0}=x_0$, $\psi|_{t=0}=\psi_0$.

Система (2.1) по своему строению вполне аналогична (1.10) и не требует дополнительных пояснений.

Для построения усредненной системы второго приближения и оценки погрешности ее решения рассмотрим вспомогательную функцию

$$\tilde{\tilde{x}}=\eta+\varepsilon\tilde{X}(x,\psi)+\varepsilon^2\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)\ , \tag{2.2}$$

где η - решение усредненной системы второго приближения, $\tilde{X}(x,\psi)$ строится по формуле (1.11), выбор $\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)$ будет сделан в дальнейшем. Рассмотрим разность $\gamma=x-\tilde{\tilde{x}}$. Для γ можно получить дифференциальное уравнение

$$\begin{aligned}&\frac{d\gamma}{dt}=\frac{dx}{dt}-\frac{d\tilde{\tilde{x}}}{dt}= \\ &=\varepsilon X_0(x)+\varepsilon\sum_{p\neq 0}\Big\{X_p(x)exp(i(p,\psi))- \\ &-\frac{d}{dt}\left[X_p(x)\frac{exp(i(p,\psi))}{i(p,\omega(x))}\right]\Big\}+\varepsilon^2 X^1(x,\psi,\varepsilon)- \\ &-\varepsilon^2\frac{d}{dt}\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)-\frac{d\eta}{dt}=\varepsilon X_0(x)+ \\ &+\varepsilon\sum_{p\neq 0}\Big\{X_p(x)exp(i(p,\psi))+i\frac{d}{dt}\left[\frac{X_p(x)}{(p,\omega(x))}\right]\times \\ &\times exp(i(p,\psi))-X_p(x)\frac{exp(i(p,\psi))}{(p,\omega(x))}\times \\ &\times\big[(p,\omega(x)+\varepsilon\,\Psi(x,\psi,\varepsilon))\big]\Big\}+\varepsilon^2 X^1(x,\psi,\varepsilon)- \\ &-\varepsilon^2\frac{d}{dt}\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)-\frac{d\eta}{dt}=\varepsilon X_0(x)+ \\ &+\varepsilon^2\sum_{p\neq 0}\Big\{i\left(X(x,\psi,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{X_p(x)}{(p,\omega(x))}\right]exp(i(p,\psi))- \\ &-X_p(x)\frac{exp(i(p,\psi))}{(p,\omega(x))}(p,\Psi(x,\psi,\varepsilon))\Big\}+\varepsilon^2 X_0^1(x)+ \\ &+\varepsilon^2\sum_{q\neq 0}X_q^1(x)exp(i(q,\psi))+\varepsilon^3 X^2(x,\psi,\varepsilon)- \\ &-\varepsilon^2\frac{d}{dt}\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)-\frac{d\eta}{dt}\,.\end{aligned} \tag{2.3}$$

Построим правую часть усредненной системы второго приближения таким образом, чтобы в нее включались не зависящие явно от ψ функции правой части (2.3) до второго порядка малости по ε включительно. Именно, положим

$$\begin{aligned}&\frac{d\eta}{dt}=\varepsilon\bar{\bar{X}}(\eta,\varepsilon)=\varepsilon X_0(\eta)+\varepsilon^2\sum_{p\neq 0}\Big\{i\left(X_{-p}(\eta),\frac{\partial}{\partial\eta}\right)_-\\ &\times\left[\frac{X_p(\eta)}{(p,\omega(\eta))}\right]-\frac{X_p(\eta)}{(p,\omega(\eta))}\big(p,\Psi_{-p}(\eta)\big)\Big\}+ \\ &+\varepsilon^2 X_0^1(\eta).\end{aligned} \tag{2.4}$$

Функцию $\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)$ выберем таким образом, чтобы члены порядка ε^2, зависящие явно от ψ правой части (2.3) взаимно уничтожились. Эти быстроколеблющиеся члены (кроме содержащихся в $-\varepsilon^2\dfrac{d}{dt}\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)$) представляют собой выражение

$$\begin{aligned}&\varepsilon^2\sum_{p\neq 0}\Big\{i\left(\sum_{p'\neq -p}X_{p'}(x)exp(i(p',\psi)),\frac{\partial}{\partial x}\right)_- \\ &\left[\frac{X_p(x)}{(p,\omega(x))}\right]exp(i(p,\psi))- \\ &-X_p(x)\frac{exp(i(p,\psi))}{(p,\omega(x))}\left(p,\sum_{r\neq -p}\Psi_r(x)\ \ exp(i(p,\psi))\right)\Big\}+ \\ &+\varepsilon^2\sum_{q\neq 0}X_q^1(x)exp(i(q,\psi))\end{aligned} \tag{2.5}$$

здесь p' пробегает те же значения, что и p в $\sum_p$. Полагая

$$\begin{aligned}&\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)=\sum_{p\neq 0}\Big\{i\left(\sum_{p'\neq -p}X_{p'}(x)\frac{exp(i(p+p',\psi))}{(p+p',\omega(x))},\frac{\partial}{\partial x}\right)_- \\ &\left[\frac{X_p(x)}{(p,\omega(x))}\right]-\frac{X_p(x)}{(p,\omega(x))}\Big(p,\sum_{r\neq -p}\Psi_r(x)\frac{exp(i(p+r,\psi))}{(p+r,\omega(x))}+ \\ &+\sum_{q\neq 0}X_q^1(x)\frac{exp(i(q,\psi))}{(q,\omega(x))}\Big)\Big\},\end{aligned} \tag{2.6}$$

мы видим, что в $\varepsilon^2\dfrac{d}{dt}\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)$ члены порядка ε^2 будут в точности равны выражению (2.5). Таким образом, для наших целей достаточно взять $\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)$ из (2.6).

В итоге, учитывая равенства (2.3), (2.4) и вышеуказанное свойство $\dfrac{d}{dt}\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)$,

получим следующее уравнение для γ:

$$\frac{d\gamma}{dt}=\varepsilon\bar{\bar{X}}(x,\varepsilon)-\varepsilon\bar{\bar{X}}(\eta,\varepsilon)+$$

$$+\varepsilon^3\sum_{p\neq 0}\left\{i\left(X^1(x,\psi,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\frac{X_p(x)}{(p,\omega(x))}\right]exp(i(p,\psi))-\right.$$

$$-X_p(x)\frac{exp(i(p,\psi))}{(p,\omega(x))}\left(p,\Psi^1(x,\psi,\varepsilon)\right)-$$

$$-\varepsilon^3\left(\Psi(x,\psi,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial\psi}\right)\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)- \qquad (2.7)$$

$$-\varepsilon^3\left(X(x,\psi,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial x}\right)\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)=\varepsilon\bar{\bar{X}}(x,\varepsilon)-$$

$$-\varepsilon\bar{\bar{X}}(\eta,\varepsilon)+\varepsilon^3E_1(x,\psi,\varepsilon).$$

Имея в виду равенства

$$\bar{\bar{X}}(x,\varepsilon)-\bar{\bar{X}}(\eta,\varepsilon)=\int_0^1\frac{\partial\bar{\bar{X}}(\varsigma,\varepsilon)}{\partial\varsigma}d\lambda(x-\eta)=$$

$$=D(x;\eta,\varepsilon)(x-\eta)=$$

$$=D(x;\eta,\varepsilon)\left(\gamma+\varepsilon\tilde{X}(\psi,x)+\varepsilon^2\tilde{\tilde{X}}(\psi,x)\right),$$

где $\varsigma=\lambda x+(1-\lambda)\eta$ и обозначая $D(x;\eta,\varepsilon)\tilde{\tilde{X}}(\psi,x)+E_1(x,\psi,\varepsilon)$ через $E(\psi,x;\eta,\varepsilon)$, получим

$$\frac{d\gamma}{dt}=\varepsilon D(x;\eta,\varepsilon)\gamma+\varepsilon^2D(x;\eta,\varepsilon)\tilde{X}(x,\psi)+ \qquad (2.8)$$

$$+\varepsilon^3E(\psi,x;\eta,\varepsilon).$$

Ввиду наличия в правой части (2.8) члена $\varepsilon^2D(x;\eta,\varepsilon)\tilde{X}(x,\psi)$, мы не можем получить оценку для $\|\gamma\|$ непосредственно способом, изложенным в пункте 1. Одним из возможных путей получения этой оценки является следующий.

Перепишем (2.8) в виде интегрального уравнения

$$\gamma(t)-\gamma(0)=\varepsilon\int_0^t D(x,\eta,\varepsilon)\gamma(t)dt+$$

$$+\varepsilon^2\int_0^t D(x,\eta,\varepsilon)i\sum_{p\neq 0}X_p(x)\frac{exp(i(p,\psi))}{(p,\omega(x))}dt+$$

$$+\varepsilon^3\int_0^t E(\psi,x,\eta,\varepsilon)dt\,. \qquad (2.9)$$

Учитывая равенство

$$\frac{d}{dt}exp(i(p,\psi))=i\left(p,\omega(x)+\varepsilon\Psi(x,\psi,\varepsilon)\right)exp(i(p,\psi))$$

и интегрируя по частям, получим

$$\int_0^t D(x,\eta,\varepsilon)i\sum_{p\neq 0}X_p(x)\frac{exp(i(p,\psi))}{(p,\omega(x))}dt=$$

$$=D(x,\eta,\varepsilon)\sum_{p\neq 0}\frac{X_p(x)exp(i(p,\psi))}{(p,\omega(x))(p,\omega(x)+\varepsilon\Psi(x,\psi,\varepsilon))}\Bigg|_0^t-$$

$$-\varepsilon\int_0^t\left\{\left[\left(X(x,\psi,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial x}\right)+\left(\bar{\bar{X}}(\eta,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right]\right._- \qquad (2.10)$$

$$\left.\left[D(x,\eta,\varepsilon)\sum_{p\neq 0}\frac{X_p(x)exp(i(p,\psi))}{(p,\omega(x))(p,\omega(x)+\varepsilon\Psi(x,\psi,\varepsilon))}\right]\right\}dt.$$

Примем, что

$$\eta\big|_{t=0}=x_0-\varepsilon\tilde{X}(x_0,\psi_0), \qquad (2.11)$$

тогда $\gamma(0)=x_0-\tilde{\tilde{x}}(0)=-\varepsilon^2\tilde{\tilde{X}}(x_0,\psi_0).$

Пусть теперь мы можем получить следующие оценки:

$$\|D(x,\eta,\varepsilon)\|\le K(t),$$

$$\Bigg\|-\tilde{\tilde{X}}(x_0,\psi_0)+D(x,\eta,\varepsilon)\times$$

$$\times\sum_{p\neq 0}\frac{X_p(x)\ \ exp(i(p,\psi))}{(p,\omega(x))(p,\omega(x)+\varepsilon\ \ \Psi(x,\psi,\varepsilon))}\Bigg|_0^t\Bigg\|\le C_0 \qquad (2.12)$$

$$\Bigg\|E(x,\eta,\psi,\varepsilon)-\left[\left(X(x,\psi,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial x}\right)+\left(\bar{\bar{X}}(\eta,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial\eta}\right)\right]_-$$

$$\left[D(x,\eta,\varepsilon)\sum_{p\neq 0}\frac{X_p(x)exp(i(p,\psi))}{(p,\omega(x))(p,\omega(x)+\varepsilon\Psi(x,\psi,\varepsilon))}\right]\Bigg\|\le M(t)$$

Тогда из (2.9) с учетом (2.10) и (2.11) следует неравенство

$$\|\gamma(t)\|\le\varepsilon^2C_0+\varepsilon\int_0^t K(t)\|\gamma(t)\|dt+\varepsilon^3\int_0^t M(t)dt \qquad (2.13)$$

Отсюда получаем следующую оценку для $\|\gamma(t)\|$:

$$\|\gamma(t)\|\le\varepsilon^2C_0\,exp(\varepsilon\int_0^t K(u)du)+$$

$$+\varepsilon^3\int_0^t M(s)exp(\varepsilon\int_s^t K(u)du)ds \qquad (2.14)$$

В качестве второго приближения метода усреднения оказывается естественным принять функции $\bar{\xi}$ и $\bar{\psi}$, причем

$$\bar{\xi}=\bar{\xi}(\eta,\bar{\psi})=\eta+\varepsilon\tilde{X}(\eta,\bar{\psi}), \qquad (2.15)$$

где η является решением уравнения (2.4) с начальными условиями (2.11), а $\bar{\psi}$ - решение уравнения

$$\frac{d\bar{\psi}}{dt}=\omega(\eta)+\varepsilon\Psi_0(\eta) \qquad (2.16)$$

с начальными условиями $\bar{\psi}\big|_{t=0}=\psi_0$.

Оценим вначале разность $\psi-\bar{\psi}$. Введя (аналогично пункту 1) вспомогательную функцию

$$\tilde{\psi}=\bar{\psi}+\varepsilon\sum_{r\neq 0}\Psi_r(x)\frac{exp(i(r,\psi))}{i(r,\omega(x))} \qquad (2.17)$$

будем иметь

$$\frac{d(\psi-\tilde{\psi})}{dt}=\omega(x)-\omega(\eta)+\varepsilon\left[\Psi_0(x)-\Psi_0(\eta)\right]+$$

$$+\varepsilon\sum_{r\neq 0}\{\Psi_r(x)exp(i(r,\psi))-$$

$$-\Psi_r(x)\frac{(r,\omega(x)+\varepsilon\Psi(x,\psi,\varepsilon))\exp(i(r,\psi))}{(r,\omega(x))}- \qquad (2.18)$$

$$-\left(\frac{dx}{dt},\frac{\partial}{\partial x}\right)\left[\Psi_r(x)\frac{1}{i(r,\omega(x))}\right]\exp(i(r,\psi)+\varepsilon^2\Psi^1(x,\psi,\varepsilon).$$

Полагая $v(x,\varepsilon)=\omega(x)+\varepsilon\Psi_0(x)$ и интегрируя, получим

$$\psi-\tilde{\psi}=[\psi-\tilde{\psi}]_{t=0}+\int_0^t[v(x,\varepsilon)-v(\eta,\varepsilon)]dt-$$

$$-\varepsilon^2\int_0^t\left\{\sum_{r\neq 0}\left[\Psi_r(x)\frac{exp(i(r,\psi))}{(r,\omega(x))}\times\right.\right. \qquad (2.19)$$

$$\times\big(r,\Psi(x,\psi,\varepsilon)\big)+\left(X(x,\psi,\varepsilon),\frac{\partial}{\partial x}\right)_-$$

$$\left.\left.\left[\frac{\Psi_r(x)}{i(r,\omega(x))}\right]exp(i(r,\psi))\right]+\varepsilon^2\Psi^1(x,\psi,\varepsilon)\right\}dt$$

Имеем далее

$$\int_0^t[v(x,\varepsilon)-v(\eta,\varepsilon)]dt=\int_0^t\int_0^1\frac{\partial v(\varsigma,\xi)}{\partial\varsigma}d\lambda(x-\eta)dt=$$

$$=\int_0^t E(x,\eta)\left[\gamma-\varepsilon\tilde{X}(x,\psi)+\varepsilon^2\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)\right]dt=$$

$$=\int_0^t E(x,\eta)\gamma dt-\varepsilon\int_0^t E(x,\eta)\tilde{X}(x,\psi)dt+ \qquad (2.20)$$

$$+\varepsilon^2\int_0^t E(x,\eta)\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)dt,$$

где $\varsigma=\lambda x+(1-\lambda)\eta,\ E(x,\eta)=\int_0^1\frac{\partial v(\varsigma,\varepsilon)}{\partial\varsigma}d\lambda.$

$\int_0^t E(x,\eta,\varepsilon)\tilde{X}(x,\psi)dt$ преобразуется по формуле (2.10) с заменой $D(x,\eta,\varepsilon)$ на $E(x,\eta,\varepsilon)$, откуда, с учетом (2.14) следует, что $\left\|\int_0^t[v(x,\varepsilon)-v(\eta,\varepsilon)]dt\right\|=O(\varepsilon)$ при $0<t<L/\varepsilon$.

В результате, учитывая, что $\|\psi-\tilde{\psi}\|_{t=0}=O(\varepsilon)$ мы получаем, что $\|\psi-\tilde{\psi}\|=O(\varepsilon)$ для $t\in(0,L/\varepsilon)$, следовательно и $\|\psi-\bar{\psi}\|=O(\varepsilon)$.

Обозначим $\tilde{\gamma}=x-\tilde{\tilde{\xi}}$ и оценим разность

$$\gamma-\tilde{\gamma}=\varepsilon\tilde{X}(x,\psi)-\varepsilon\tilde{X}(\eta,\bar{\psi})-\varepsilon^2\tilde{\tilde{X}}(x,\psi)=$$

$$=\varepsilon\tilde{X}(x,\psi)-\varepsilon\tilde{X}(x,\bar{\psi})+\varepsilon\tilde{X}(x,\bar{\psi})-$$

$$-\varepsilon\tilde{X}(\eta,\bar{\psi})-\varepsilon^2\tilde{\tilde{X}}(x,\psi).$$

Имеем

$$\left\|\tilde{X}(x,\psi)-\tilde{X}(x,\bar{\psi})\right\|\le$$

$$\le\sum_{p\neq 0}\left\|\frac{X_p(x)}{(p,\omega(x))}\right\|\ \left\|exp(i(p,\psi))-exp(i(p,\bar{\psi}))\right\|\le$$

$$\le\sum_{p\neq 0}\left\|\frac{X_p(x)}{(p,\omega(x))}\right\|\left\|p,\psi-\bar{\psi}\right\|\le\sum_{p\neq 0}\left\|\frac{X_p(x)}{(p,\omega(x))}\right\|\|p\|\left\|\psi-\bar{\psi}\right\|.$$

Учитывая, что $\|\psi-\bar{\psi}\|=O(\varepsilon)$, получим $\left\|\tilde{X}(x,\psi)-\tilde{X}(x,\bar{\psi})\right\|=O(\varepsilon)$.

Легко видеть также, что

$\left\|\tilde{X}(x,\bar{\psi})-\tilde{X}(\eta,\bar{\psi})\right\|=O(\varepsilon)$, так как $\|x-\eta\|=O(\varepsilon)$ (см. (2.14)). В итоге получаем, что $\|\gamma-\tilde{\gamma}\|=O(\varepsilon^2)$, следовательно, $\|\tilde{\gamma}\|\le\|\gamma\|+\|\gamma-\tilde{\gamma}\|=O(\varepsilon^2)$.

Отметим теперь, что величины

$(p,\omega(x)),\ (q,\omega(x)),\ (r,\omega(x)),\ (p+r,\omega(x))$ (2.21)

при $r\neq -p$ и $(p+p',\omega(x))$ при $p'\neq p$

стояли в знаменателях встречавшихся выражений; мы будем считать, что эти величины не малы. Далее, вместо равенств вида $\|\psi-\bar{\psi}\|=O(\varepsilon)$ и $\|\gamma-\tilde{\gamma}\|=O(\varepsilon^2)$, можно было выписать оценки, включающие нормы известных функций, как, например, в (2.14); мы не делаем этого в целях сокращения выкладок.

Основной результат пункта 2 нашей работы можно сформулировать следующим образом.

Вторым приближением метода усреднения для системы (2.1) в нерезонансном случае можно считать вектор-функции $\tilde{\tilde{\xi}}$ и $\bar{\psi}$, определяемые (2.15) и (2.16). При естественных предположениях об ограниченности функций, стоящих в правых частях (2.1), а также производных этих функций и при условии, что величины (2.21) не малы по модулю, можно утверждать, что $\|x-\tilde{\tilde{\xi}}\|=O(\varepsilon^2)$, а $\|\psi-\bar{\psi}\|=O(\varepsilon)$ при $t\in(0,\ L/\varepsilon)$.

<u>Замечание 2</u>. Так как $x(t)$ нам неизвестно, оценки вида (1.6)-(1.8) и (2.12) должны проводиться в предположении, что $x(t)$ принадлежит некоторой $\rho(t)$-окрестности $\xi(t)$ (или $\eta(t)$), причем, согласно проделанным выкладкам, $\rho(t)\sim\varepsilon$ при $t\sim 1/\varepsilon$.

Функции $K(t)$, $L(t)$, $M(t)$ можно считать кусочно-непрерывными.

В заключение отметим, что несколько иные подходы к численному интегрированию и усреднению систем, рассматриваемых в настоящей работе, изложены в других источниках, например, в [2, 3, 4].

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Н.Н. Боголюбов, Ю.А. Митропольский. Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. – М., 1974.
2. В.М. Волосов, Б.И. Моргунов. Метод осреднения в теории нелинейных колебательных систем. – М., 1971.
3. В.Г. Афонин. Об одном методе численного интегрирования обыкновенных дифференциальных уравнений с быстроколеблющимися решениями //Вестник Ленинградского университета, № 1, 1971, стр. 4-8.
4. В.Г. Афонин. Об одном методе получения "усредненных" уравнений для систем с быстровращающейся фазой //Тезисы докладов международной математической конференции «Еругинские чтения VIII», 20-23 мая 2002 г., Брест, БрГУ, 2002, с.9-10.