УДК 539.3

Босяков С.М., Хвисевич В.М.

ТРЕХМЕРНЫЕ ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКИЕ ПОВЕРХНОСТИ В МАГНИТНОЙ ГИДРОДИНАМИКЕ

ВВЕДЕНИЕ

Исследованиям закономерностей распространения поверхностей сильного разрыва в идеально проводящей жидкости при наличии магнитного поля посвящено достаточно большое количество публикаций, результаты которых отражены в фундаментальной монографии [1]. В частности, проведены исследования кривых фазовых скоростей и двумерных фронтов волн скоростей при различных соотношениях между скоростью звука и скоростью волны Альфвена. Настоящая работа дополняет эти результаты и посвящена моделированию трехмерных фронтов волн Альфвена, распространяющихся от точечного сосредоточенного источника, находящегося в сжимаемой ионизированной жидкости, на которую действуют электромагнитные силы.

ХАРАКТЕРИСТИЧЕСКОЕ УРАВНЕНИЕ

Систему уравнений движения, описывающую идеально проводящую жидкость при наличии магнитного поля, представим в следующем виде (в предположении малости движений) [1]:

$$\partial_t B_1 + u_3\partial_3 B_1 - B_3\partial_3 u_1 - u_1\left(\partial_2 B_2 + \partial_3 B_3\right) + u_2\partial_2 B_1 - B_2\partial_2 u_1 + B_1\left(\partial_2 u_2 + \partial_3 u_3\right) = 0,$$

$$\partial_t B_2 + u_3\partial_3 B_2 - B_3\partial_3 u_2 - u_2\left(\partial_1 B_1 + \partial_3 B_3\right) + u_1\partial_1 B_2 - B_1\partial_1 u_2 + B_2\left(\partial_1 u_1 + \partial_3 u_3\right) = 0,$$

$$\partial_t B_3 + u_2\partial_2 B_3 - B_2\partial_2 u_3 - u_3\left(\partial_1 B_1 + \partial_2 B_2\right) + u_1\partial_1 B_3 - B_1\partial_1 u_3 + B_1\left(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2\right) = 0,$$

$$\partial_t u_1 + \partial_1 p - \frac{1}{\mu}\left(B_3\left(\partial_3 B_1 - \partial_1 B_3\right) + B_2\left(\partial_2 B_1 - \partial_1 B_2\right)\right) = 0,$$

$$\partial_t u_2 + \partial_2 p - \frac{1}{\mu}\left(B_3\left(\partial_3 B_2 - \partial_2 B_3\right) + B_1\left(\partial_1 B_2 - \partial_2 B_1\right)\right) = 0,$$

$$\partial_t u_3 + \partial_3 p - \frac{1}{\mu}\left(B_2\left(\partial_2 B_2 - \partial_3 B_2\right) + B_1\left(\partial_1 B_3 - \partial_3 B_1\right)\right) = 0,$$

$$\partial_t \rho + \rho\left(\partial_1 u_1 + \partial_2 u_2 + \partial_3 u_3\right) + u_1\partial_1\rho + u_2\partial_2\rho + u_3\partial_3\rho = 0.$$

Здесь u_1, u_2, u_3 – компоненты вектора скорости, B_1, B_2, B_3 – компоненты вектора напряженности магнитного поля, $p = f(\rho)$ – давление, являющееся функцией плотности ρ, μ – магнитная проницаемость, $\partial_k = \partial/\partial x_k$, $k = \overline{1,3}$, $\partial_t = \partial/\partial t$.

Начальные данные к системе (1) зададим на поверхности $z(t, x_1, x_2, x_3) = 0$ и перейдем к новым переменным по схеме $g = z(t, x_1, x_2, x_3)$ и $g_i = z_i(t, x_1, x_2, x_3)$. Подставляя производные по переменным x_k и t, выраженные через производные по переменным g_k и g в (1), после стандартной процедуры получим следующее уравнение характеристик:

$$\det\left\|w_i\right\|_{7\times7} = 0, \tag{2}$$

где $w_{jk} = B_j p_k$, $w_{kk} = B_k p_k - \sum_{n=1}^{3} B_n p_n$, $w_{j+3,j} = \rho p_0$,

$w_{7k} = -\rho p_k$, $w_{j,j+3} = p_0 + \sum_{n=1}^{3} u_n p_n - u_j p_j$, $w_{j,k+3} = -u_j p_k$,

$w_{j+3,j+3} = -\dfrac{1}{\mu}\left(\sum_{n=1}^{3} B_n p_n - B_j p_j\right)$, $w_{j+3,k+3} = \dfrac{B_k p_j}{\mu}$,

$w_{j+3,7} = a^2 p_j$, $a = \sqrt{\dfrac{dp}{d\rho}}$ - скорость звука, $p_j = \dfrac{\partial z}{\partial x_j}$,

$p_0 = \dfrac{\partial z}{\partial t}$, $j \neq k = \overline{1,3}$; остальные компоненты равны нулю.

Раскрывая определитель, после несложных преобразований будем иметь (считаем, что система координат перемещается вместе с жидкостью, то есть $u_k = 0$ [1]):

$$p_0\left(\mu\rho p_0^2 - \left(B_1 p_1 + B_2 p_2 + B_3 p_3\right)^2\right)\left(Ap_0^4 + Bp_0^2 + C\right) = 0 \tag{3}$$

Здесь введены следующие обозначения

$$A = \mu\rho,\ B = -\left(B_1^2 + B_2^2 + B_3^2 + a^2\mu\rho\right)\tau,$$

$$C = a^2\left(B_1 p_1 + B_2 p_2 + B_3 p_3\right)^2\tau,\ \tau = p_1^2 + p_2^2 + p_3^2.$$

БИХАРАКТЕРИСТИКИ И КООРДИНАТЫ ТОЧЕК ВОЛНОВОГО ФРОНТА

Рассмотрим волны Альфвена, на скорость распространения которых влияет скорость звука. Для определения координат точек среды, до которых дошла энергия волнового возмущения, выразим из уравнения (3) p_0 (чтобы избежать громоздких выкладок будем считать, что $B = B_k$, $k = \overline{1,3}$):

$$p_0 = 0, \tag{4}$$

$$\frac{p_0}{a} = \pm b\left(p_1 + p_2 + p_3\right), \tag{5}$$

Босяков Сергей Михайлович, *доцент кафедры теоретической и прикладной механики Белорусского государственного университета.*
Беларусь, БГУ, 220050 Беларусь, Минск, пр. Независимости, 4.
Хвисевич Виталий Михайлович, *к.т.н., доцент, зав. кафедрой сопротивления материалов и теоретической механики Брестского государственного технического университета.*
Беларусь, БГТУ, 224017, г. Брест, ул. Московская, 267.

$$\frac{p_0^{(i)}}{a}=\sqrt{\frac{1}{2}\left(\left(1+3b^2\right)\tau-(-1)^i\sqrt{\tau\left(\left(1+3b^2\right)^2\tau-4b^2\left(p_1+p_2+p_3\right)^2\right)}\right)},\ i=1,2, \tag{6}$$

где $b=\dfrac{B}{a\sqrt{\mu\rho}}$ - безразмерная скорость распространения волны Альфвена.

Выражения (4) и (5) описывают стационарную поверхность разрыва (линию тока) и прямую (и обратную) волны Альфвена [1]. Далее рассмотрим волны Альфвена, скорость распространения которых зависит от скорости звука. Согласно [2] имеем

$$\frac{dx_k}{dt}=\frac{\partial p_0}{\partial p_k},\ k=\overline{1,3}. \tag{7}$$

Здесь x_k - пространственные координаты, определяющие положение точек волнового фронта в момент времени $t=0$, распространяющегося от точечного источника, в момент времени t. Тогда из выражения (6) получим:

$$\frac{dx_k^{(i)}}{dt}=\frac{1}{a}\frac{\partial p_0^{(i)}}{\partial p_k}=$$

$$=\frac{\left(1+3b^2\right)p_k-(-1)^i\dfrac{\tau\left(\left(1+3b^2\right)^2p_k-4b^2\left(p_1+p_2+p_3\right)\right)+p_kK}{2\sqrt{\tau K}}}{\sqrt{2\left(\left(1+3b^2\right)\tau-(-1)^i\sqrt{\tau K}\right)}},$$

$$K=\left(1+3b^2\right)^2\tau-4b^2\left(p_1+p_2+p_3\right)^2,\ i=1,2,\ k=\overline{1,3}. \tag{8}$$

Поскольку правая часть выражений (8) не зависит от времени t, после интегрирования будем иметь (считаем, что возмущение возникло в момент времени $t=0$ в начале координат)

$$x_k^{(i)}=\frac{\left(1+3b^2\right)p_k-(-1)^i\dfrac{\tau\left(\left(1+3b^2\right)^2p_k-4b^2\left(p_1+p_2+p_3\right)\right)+p_kK}{2\sqrt{\tau K}}}{\sqrt{2\left(\left(1+3b^2\right)\tau-(-1)^i\sqrt{\tau K}\right)}}at,$$

Отсюда, с учетом того, что $p_k=n_k\sqrt{\tau}$ ($n_k=\cos\alpha_k$ - направляющие косинусы нормали к волновой поверхности, α_k - угол между осью координат x_k и нормалью к волновой поверхности [2]) получим безразмерные координаты точек волновой поверхности:

$$\hat{x}_k^{(i)}=\frac{x_k^{(i)}}{at}=\frac{\left(1+3b^2\right)n_k-\dfrac{(-1)^i}{2\sqrt{\hat{K}}}\left(\left(\left(1+3b^2\right)^2n_k-4b^2\left(n_1+n_2+n_3\right)\right)+n_k\hat{K}\right)}{\sqrt{2\left(1+3b^2-(-1)^i\sqrt{\hat{K}}\right)}},$$

$$\hat{K}=\left(1+3b^2\right)^2-4b^2\left(n_1+n_2+n_3\right)^2,\ i=1,2,\ k=\overline{1,3}. \tag{9}$$

Скорости распространения волновых фронтов, направленные по нормали к волновой поверхности также найдем из характеристического уравнения (3):

$$v_i=\sqrt{\frac{1}{2}\left(3b^2+1\right)-(-1)^i\sqrt{\frac{1}{4}\left(3b^2+1\right)^2-b^2\left(n_1+n_2+n_3\right)^2}},\ i=1,2 \tag{10}$$

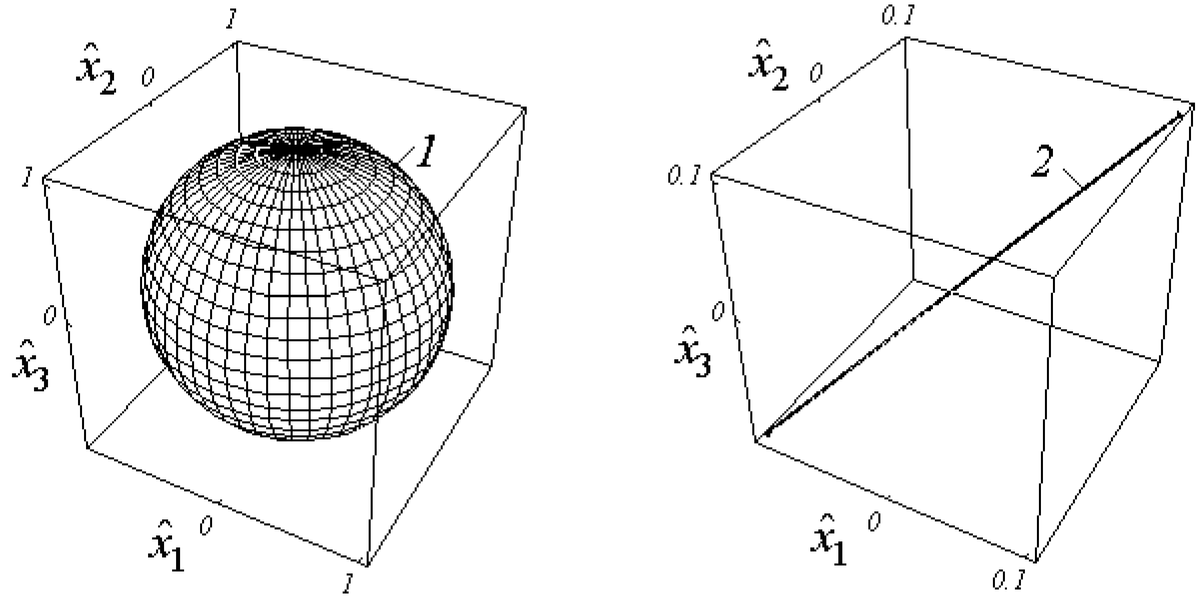

Рис. 1. Трехмерные фронты волн скоростей при $\boldsymbol{b} = 0{,}1$, определяемые координатами: *1* - $\hat{x}_{\boldsymbol{k}}^{(1)}$; *2* - $\hat{x}_{\boldsymbol{k}}^{(2)}$

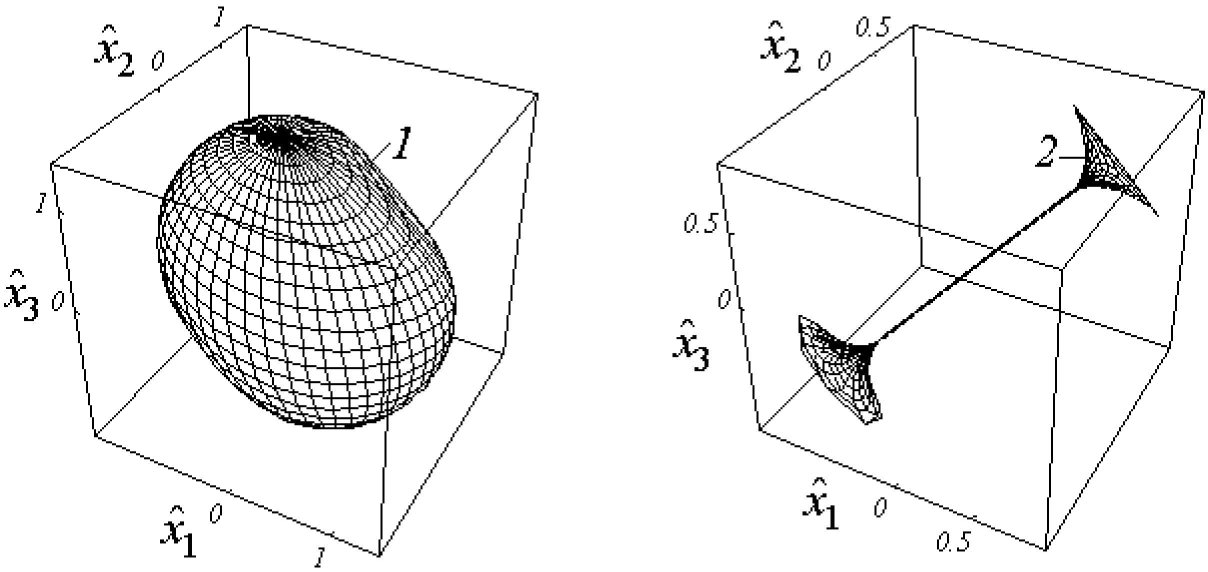

Рис. 2. Трехмерные фронты волн скоростей при $\boldsymbol{b} = 0{,}6$, определяемые координатами: *1* - $\hat{x}_{\boldsymbol{k}}^{(1)}$; *2* - $\hat{x}_{\boldsymbol{k}}^{(2)}$

где $\boldsymbol{v} = \boldsymbol{V}/\boldsymbol{a}$ - безразмерная скорость распространения поверхности разрыва, $\boldsymbol{V} = -\boldsymbol{p}_0/\sqrt{\tau}$ - скорость распространения поверхности разрыва [2].

ВОЛНОВЫЕ ПОВЕРХНОСТИ

Рассмотрим различные случаи волновых поверхностей, построенных с помощью выражений (9), соответствующие различным соотношениям между скоростью звука $\boldsymbol{a}$ и скоростью Альфвена $\boldsymbol{B}/\sqrt{\mu\rho}$. На рис. 1 представлены безразмерные трехмерные фронты, описываемые тройками координат $\hat{x}_{\boldsymbol{k}}^{(1)}$ и $\hat{x}_{\boldsymbol{k}}^{(2)}$, при $\boldsymbol{b} = 0{,}1$ (при построении здесь и далее принимаем $\boldsymbol{t} = 1$ с).

Из рис. 1 (*1*) видно, что при $\boldsymbol{b} = 0{,}1$ волновая поверхность, распространяющаяся со скоростью $\boldsymbol{v}_1$, представляет собой сферу (радиус сферы незначительно превышает 1). Трехмерный фронт для другой волны представляет собой прямую, расположенную под углом $\pi/4$ ко всем координатным осям. При уменьшении значения $\boldsymbol{b}$ длина луча (рис. 1, *2*) также уменьшается; радиус сферы, соответствующей волновой поверхности, распространяющейся со скоростью $\boldsymbol{v}_1$ (рис. 1, *1*), при неограниченном уменьшении $\boldsymbol{b}$ стремится к 1.

При увеличении значения безразмерной скорости $\boldsymbol{b}$ вид волновых поверхностей изменяется. Так, на рис. 2 показаны поверхности скоростей, построение которых выполнено при $\boldsymbol{b} = 0{,}6$. Отметим, что аналогичный вид имеют поверхности скоростей для значений безразмерной скорости волны Альфвена из диапазона $0{,}45 \div 0{,}85$.

Из рис. 2, *1* видно, что трехмерный фронт волны, распространяющейся со скоростью $\boldsymbol{v}_1$, вытягивается в направлении

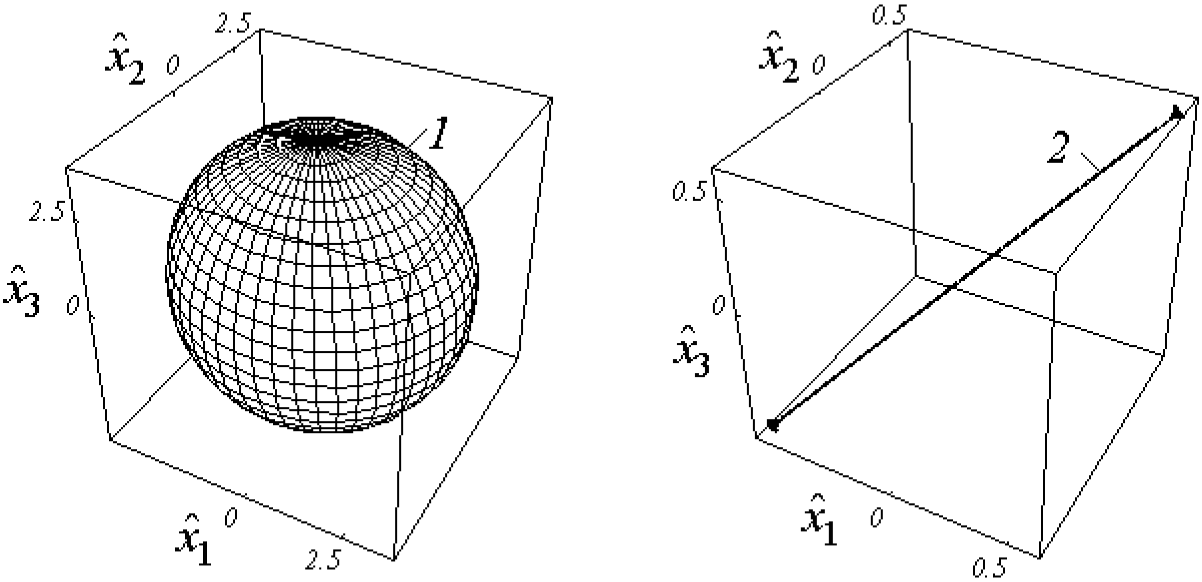

Рис. 3. Трехмерные фронты волн скоростей при $\boldsymbol{b} = 2{,}0$, определяемые координатами: *1* - $\hat{x}_k^{(1)}$; *2* - $\hat{x}_k^{(2)}$

луча, расположенного под углом $-\pi/4$ ко всем координатным осям. Распространение другой волны (рис. 2, *2*) сопровождается возникновением двух симметрично расположенных лакун в виде конусов, ось которых расположена под углом $\pi/4$ к осям координат.

При дальнейшем возрастании значений $\boldsymbol{b}$, волновые поверхности принимают вид сферы и прямой соответственно (рис. 3; при построении принимаем $\boldsymbol{b} = 2{,}0$).

Отличие от случая малых $\boldsymbol{b}$ (рис. 1) заключается в значении радиуса сферы и длине участка прямой. Так, радиус сферы, отражающей трехмерный фронт для волны, распространяющейся со скоростью v_1, возрастает с увеличением $\boldsymbol{b}$, радиус при этом приближенно равен $\boldsymbol{b}$. Значение длины участка прямой, соответствующей волновой поверхности для другой волны в момент времени $t = 1$ с при неограниченном возрастании $\boldsymbol{b}$ не изменяется и приближенно составляет $1{,}73$.

В заключение отметим, что сечения волновых поверхностей плоскостью, являющейся биссектрисой координатного угла $x_1 0 x_2$ и проходящей через ось координат x_3, соответствуют двумерным волновым фронтам, полученным в [1].

ВЫВОДЫ

- Получены бихарактеристики для системы уравнений движения идеально проводящей жидкости с учетом действия магнитного поля, а также выражения для координат точек среды, до которых дошла энергия волнового возмущения от сосредоточенного источника, к моменту времени $\boldsymbol{t}$.
- Выполнено построение трехмерных фронтов волн, распространяющейся в идеально проводящей магнитной жидкости и проведен анализ волновых поверхностей для различных значений безразмерной скорости распространения волны Альфвена.
- Показано, что в случае, если безразмерная скорость волны Альфвена принимает значения из диапазона $0{,}45 \div 0{,}85$, распространение одной из волн происходит с образованием двух конических лакун.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Курант Ф. Уравнения с частными производными. - М.: Мир, 1964. – 600 с.
2. Смирнов В. И. Курс высшей математики. Т. IV, ч. 2. – М.: Наука, 1981. – 552 с.

УДК 621. 81. 004

Кожуро Л.М., Мрочек Ж.А., Пашкевич М.Ф., Тризна В.В.

РАСЧЕТ НА ПРОЧНОСТЬ ПРЯМОУГОЛЬНЫХ СТЕРЖНЕЙ С НАПЛАВЛЕННЫМИ ПОВЕРХНОСТЯМИ

Стержни прямоугольного сечения обычно наплавляют с двух или с одной стороны. При двухсторонней наплавке симметрично расположенные грани параллелепипеда можно представить с покрытиями в два слоя (рис.1). Наружный слой 3 состоит из наплавленного материала с модулем упругости $\boldsymbol{E_3}$. При этом процессе наплавляемый материал диффундирует в основу, за счет чего формируется еще один слой 2 с модулем упругости, величину которого можно представить в виде

$$E_2(y) = E_1 + \left(2\,|\,y\,| - h_1\right)\frac{E_3 - E_1}{h_2 - h_1}. \qquad (1)$$

В пределах размера $\boldsymbol{h_1}$ сохраняется материал основы детали с модулем упругости $\boldsymbol{E_1}$.

Рассмотрим расчет напряжений при растяжении прямоугольного стержня с двухсторонней наплавкой. После наплавки в стержне имеют место остаточные напряжения [1].

Кожуро Л.М., Мрочек Ж.А., Пашкевич М.Ф., Тризна В.В.
УО "Белорусский национальный технический университет", пр.-т. Независимости, 65, 220050, г. Минск, Беларусь.
УО "Белорусский государственный аграрный технический университет", пр.-т. Независимости, 99, 220013, г. Минск, Беларусь.