УДК 539.3

Босяков С.М.

РАСПРОСТРАНЕНИЕ ПОВЕРХНОСТЕЙ РАЗРЫВА В ТЕРМОУПРУГОМ ИЗОТРОПНОМ ТЕЛЕ С УЧЕТОМ ВРЕМЕНИ РЕЛАКСАЦИИ ТЕПЛОВОГО ПОТОКА

Изучение термоупругих явлений в твердых телах в некоторых случаях, например при воздействии лазерного излучения, требует учета конечной скорости распространения тепла в связи с весьма быстрым характером тепловыделения. Теория теплопроводности, учитывающая время релаксации теплового потока, носит название обобщенной и устраняет парадокс бесконечной скорости распространения тепла [1-3]. В контексте обобщенной теории термоупругости рассмотрены ряд важных проблем, среди которых выделим исследования распространения плоских волн в изотропных и анизотропных средах с конечной скоростью распространения тепла [4, 5]. В последнее время появились работы [6, 7], где обсуждается применение других методов для решения задачи распространения термоупругих волн в изотропных средах. Ниже предлагается реализация метода характеристик применительно к исследованию нестационарных процессов в двумерной изотропной среде с учетом релаксации теплового потока.

Запишем уравнения движения в компонентах тензора напряжений в случае двумерной задачи $(x_3=0)$. Будем иметь [8]:

$$
\begin{aligned}
&A_4(A_1(\Delta\sigma_{11}-\Delta\sigma_{22})+2A_4\Delta\sigma_{22})+\\
&+2A_4(A_1-A_4)\frac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}}(\sigma_{11}+\sigma_{22})+\\
&+4A_4(A_1-A_4)\frac{\partial X_1}{\partial x_1}=\rho\left(A_1\ddot{\sigma}_{11}-(A_1-2A_4)\ddot{\sigma}_{22}\right)+\\
&+2A_4\beta\left(\ddot{T}\rho-A_4\Delta T\right),\\
&A_4\Delta\sigma_{12}+A_4\frac{\partial^2}{\partial x_1\partial x_2}(\sigma_{11}+\sigma_{22})+A_4\left(\frac{\partial X_2}{\partial x_1}+\frac{\partial X_1}{\partial x_2}\right)=\\
&=\rho\ddot{\sigma}_{12},\\
&A_4(A_1(\Delta\sigma_{22}-\Delta\sigma_{11})+2A_4\Delta\sigma_{11})+\\
&+2A_4(A_1-A_4)\frac{\partial^2}{\partial x_2^{\,2}}(\sigma_{11}+\sigma_{22})+\\
&+4A_4(A_1-A_4)\frac{\partial X_2}{\partial x_2}=\rho\left(A_1\ddot{\sigma}_{22}-(A_1-2A_4)\ddot{\sigma}_{11}\right)+\\
&+2A_4\beta\left(\ddot{T}\rho-A_4\Delta T\right).
\end{aligned}
\tag{1}
$$

Здесь A_1, A_4 - упругие постоянные, которые выражаются через постоянные Ламе следующим образом: $\lambda=A_1-2A_4, \mu=A_4$, β - константа, связывающая тепловые и механические напряжения, $\beta=(3A_1-4A_4)\alpha_T$, α_T - коэффициент линейного теплового расширения, T - абсолютная температура, ρ -плотность среды, X_i -массовые силы, $i,j=1,2$, $\Delta=\dfrac{\partial^2}{\partial x_1^{\,2}}+\dfrac{\partial^2}{\partial x_2^2}$.

Обобщенный закон термоупругости запишем в следующем виде[2, 3]:

$$\lambda\Delta T-c_v\left(\dot{T}-\tau\ddot{T}\right)=\beta T_0\left(\dot{e}_{11}+\dot{e}_{22}+\tau\left(\ddot{e}_{11}+\ddot{e}_{22}\right)\right),$$

или

$$
\begin{aligned}
&\lambda\Delta T-\left(\dot{T}+\tau\ddot{T}\right)\left(c_v+\frac{2\beta^2T_0}{2(A_1-A_4)}\right)-\\
&-\frac{\beta T}{2(A_1-A_4)_0}\left(\dot{\sigma}_{11}+\dot{\sigma}_{22}+\tau\left(\ddot{\sigma}_{11}+\ddot{\sigma}_{22}\right)\right)=0,
\end{aligned}
\tag{2}
$$

где λ - коэффициент теплопроводности, T_0 - начальная температура, τ - время релаксации теплового потока, c_v - удельная теплоемкость при постоянном объеме. Уравнения (1), (2) образуют замкнутую систему уравнений для исследования волновых процессов в изотропной термоупругой среде с конечной скоростью распространения тепла. В общем случае начальные данные к этой системе зададим на поверхности

$$Z(t,x_1,x_2)=const$$

и перейдем к новым переменным по следующей схеме [9]

$$Z=Z(t,x_1,x_2),\ Z_k=Z_k(t,x_1,x_2), k=1,2\,. \tag{3}$$

Выражая производные по старым переменным через производные по новым переменным, получим

$$
\begin{gathered}
\frac{\partial y_j(t,X)}{\partial x_k}=\sum_{l=0}^{2}\frac{\partial y_j}{\partial Z_l}\frac{\partial Z_l}{\partial x_k},\\
\frac{\partial^2 y_j}{\partial x_k\partial x_n}=\sum_{l,m=0}^{2}\frac{\partial^2 y_j}{\partial Z_l\partial Z_m}\frac{\partial Z_l}{\partial x_k}\frac{\partial Z_m}{\partial x_n}+\sum_{i=0}^{2}\frac{\partial y_j}{\partial Z_l}\frac{\partial^2 Z_l}{\partial x_n\partial x_k},\\
Z\equiv Z_0, t\equiv x_0.
\end{gathered}
\tag{4}
$$

Подставим (4) в систему (1), (2) и выпишем только те члены, которые содержат производные второго порядка по Z, так как только они будут важны для последующего изложения [9]. В результате получим

$$
\begin{aligned}
&\left(A_1\Omega+2A_4(A_1-A_4)p_1^2\right)\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial Z^2}+\left(2A_4(A_1-A_4)p_1^2-\right.\\
&\left.-(A_1-2A_4)\Omega\right)\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial Z^2}+2A_4\beta\Omega\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}+\ldots=0,\\
&\Omega\frac{\partial^2\sigma_{12}}{\partial Z^2}+A_4\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial Z^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial Z^2}\right)p_1p_2+\ldots=0,\\
&\left(A_1\Omega+2A_4(A_1-A_4)p_2^2\right)\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial Z^2}+\left(2A_4(A_1-A_4)p_2^2-\right.\\
&\left.-(A_1-2A_4)\Omega\right)\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial Z^2}+2A_4\beta\Omega\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}+\ldots=0,\\
&\left(\lambda g^2-\tau(c_v+a)p_0^2\right)\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}-b\tau p_0^2\left(\frac{\partial^2\sigma_{11}}{\partial Z^2}+\frac{\partial^2\sigma_{22}}{\partial Z^2}\right)+\ldots=0.
\end{aligned}
$$

Здесь

$$p_0 = \frac{\partial Z}{\partial t},\ p_k = \frac{\partial Z}{\partial x_k},\ g^2 = p_1^2 + p_2^2,\ a = \frac{\beta^2 T_0}{A_1 - A_4},$$

$$b = \frac{\beta T_0}{2(A_1 - A_4)},\ k = 1.2,\ \Omega = A_4 g^2 - \rho p_0^2$$

Уравнение характеристической поверхности найдем из условия неразрешимости последней системы уравнений относительно производных $\frac{\partial^2 T}{\partial Z^2}, \frac{\partial^2 \sigma_{ij}}{\partial Z^2}, i, j = 1,2$, то есть из условия равенства нулю определителя, составленного из коэффициентов при этих производных [9]:

$$det\|\omega_{ij}\| = 0, \tag{5}$$

где

$$\begin{gathered}\omega_{ii} = A_1\left(A_4 g^2 - \rho p_0^2\right) + 2A_4(A_1 - A_4)p_i^2,\\ \omega_{ij} = -(A_1 - A_4)\left(A_4 g^2 - \rho p_0^2\right) + 2A_4(A_1 - A_4)p_i^2,\\ \omega_{33} = A_4 g^2 - \rho p_0^2,\ \omega_{i3} = \omega_{43} = \omega_{34} = 0,\ \omega_{3i} = A_4 p_1 p_2,\\ \omega_{i4} = 2A_4\beta\left(A_4 g^2 - \rho p_0^2\right),\ \omega_{4i} = -b\tau p_0^2,\\ \omega_{44} = \lambda g^2 - \tau(c_v + a)p_0^2,\ i = 1,2.\end{gathered} \tag{6}$$

Отметим, что постоянная a определяет сопряжение теплового поля и поля деформаций и имеет порядок $10^4 \div 10^5$ Н/м^2·град. Постоянная b позволяет учитывать влияние механического поля на поле температур и является величиной порядка $10^{-2} \div 10^{-3}$, поэтому в (6) компонентами $\omega_{4i} = -b\tau p_0^2$ можно пренебречь. Действительно, коэффициент b является малым и в произведении с τ (для металлов принимаем $\tau \approx 10^{-11}$ с) имеет порядок $10^{-13} \div 10^{-14}$ с (таблица 1, [10, 11]).

Заметим, что в таблице 1 упругие постоянные A_1 и A_4 рассмотренных изотропных сред являются усредненными модулями упругости c_{11}, c_{12}, c_{44} соответствующих анизотропных тел [12]:

$$\begin{gathered}A_4 = c_{44} + 0.2(c_{11} - c_{12} - 2c_{44}),\\ A_1 = c_{12} + 2c_{44} + 0.6(c_{11} - c_{12} - 2c_{44}).\end{gathered}$$

Раскрывая определитель (5) и отбрасывая при этом $\omega_{4i}, i = 1,2$, получим

$$\left(A_4 g^2 - \rho p_0^2\right)^2\left(A_1 g^2 - \rho p_0^2\right)\left(\lambda g^2 - \tau(c_v + a)p_0^2\right) = 0. \tag{7}$$

Отсюда

$$A_4 g^2 - \rho p_0^2 = 0,\ A_1 g^2 - \rho p_0^2 = 0,\ \lambda g^2 - \tau(c_v + a)p_0^2 = 0. \tag{8}$$

Уравнения (8) позволяют найти скорости распространения поверхностей разрыва $V = -\frac{p_0}{g}$ [9]:

$$V_1 = \sqrt{\frac{A_4}{\rho}},\ V_2 = \sqrt{\frac{A_1}{\rho}},\ V_3 = \sqrt{\frac{\lambda}{\tau(c_v + a)}}. \tag{9}$$

Здесь V_1, V_2 - скорости распространения упругих волн, V_3 - скорость распространения тепловой волны, сопровождающейся полем деформаций (термоупругой волны).

Рассмотрим распространение поверхностей разрыва в термоупругой среде с учетом влияния механического поля на тепловое. Раскрывая определитель (5) со всеми компонентами $\omega_{kl}, k, l = \overline{1,4}$, получим

$$\begin{gathered}\left(A_4 g^2 - \rho p_0^2\right)^2 \cdot \left(2b\tau\beta p_0^2\left(A_4 g^2 - \rho p_0^2\right) + \right.\\ \left. + \left(\lambda g^2 - \tau(c_v + a)p_0^2\right)\left(A_1 g^2 - \rho p_0^2\right)\right) = 0.\end{gathered} \tag{10}$$

Из уравнения (10) для скоростей распространения поверхностей разрыва будем иметь

$$P_1 = \sqrt{\frac{A_4}{\rho}},\ P_{2,3} = \sqrt{\frac{1}{2}\left(A \mp \sqrt{A^2 - 4B}\right)}, \tag{11}$$

где $A = \frac{\rho k - \tau(2\beta b A_4 - A_1(c_v + a))}{\rho\tau c_v}, B = \frac{\lambda A_1}{\rho\tau c_v}$.

В формулах (11) скорость $P_1 = V_1$ - скорость распространения упругой волны, P_2 - скорость упругой волны, сопровождающейся тепловым полем, P_3 - тепловой волны, сопровождающейся полем деформаций. Используя уравнения (7) и (10), легко получить уравнения для бихарактеристик, которые образуют характеристическую поверхность и являются составляющими групповой скорости G распространения волны. Для этого, например из (12), выразим p_0 следующим образом:

$$p_0 = g\sqrt{\frac{A_1}{\rho}}. \tag{12}$$

Отсюда вытекают следующие уравнения бихарактеристик [9]:

Таблица 1 – Коэффициенты связности a,b для некоторых изотропных сред.

Материал	Упругие постоянные, $\times 10^{10}$ Н/м^2		Термоупругая постоянная, β, $\times 10^3$ Н/м^2·град	Коэффициенты связности,	
	A_1	A_4		a, Н/м^2·град	b
серебро	14.864	3.378	5905.2	88955	0.0075
свинец	6.0296	1.012	3980.6	92527	0.012
молибден	43.44	12.280	4060.0	15500	0.00191

Таблица 2 – Значения скоростей распространения упругих и термоупругих волн.

Материал	ρ, кг/м^3	λ, Вт/м·град	c_v, ×10^3 Дж/м^3·град	Скорости упругих и термоупругих волн, м/с				
				V_1	V_2	P_2	V_3	P_3
серебро	10505	418	2454	1793	3762	3593	4054	4321
свинец	11342	34.89	1458	945	2306	1482	1500	2407
молибден	9010	162	2188	1167	3691	1367	2712	7348

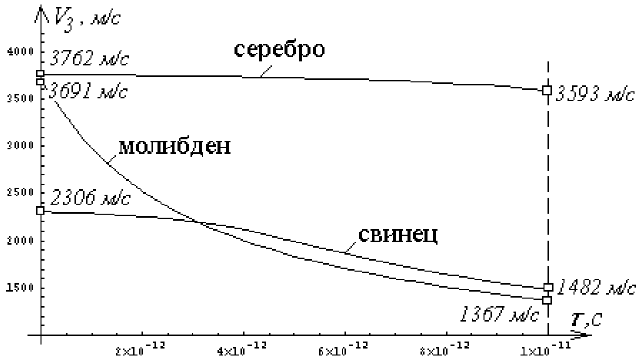

Рисунок 1 – Зависимости скорости термоупругой волны $P_3(\tau)$ от времени релаксации теплового потока τ.

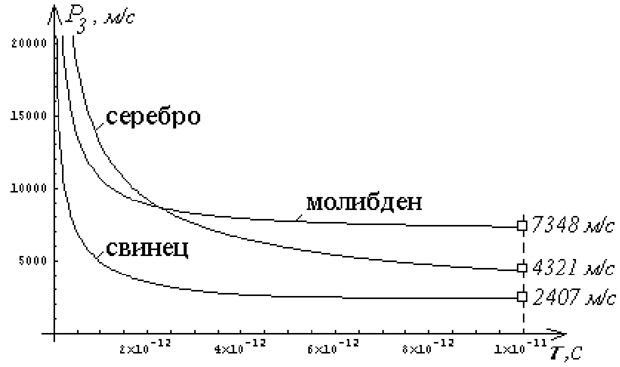

Рисунок 2 – Зависимости скорости термоупругой волны $P_4(\tau)$ от времени релаксации теплового потока τ.

$$\frac{dx_k}{dt} = \frac{\partial p_0}{\partial p_k} = \frac{p_k}{g}\sqrt{\frac{A_1}{\rho}} = \cos\alpha_k\sqrt{\frac{A_1}{\rho}},$$

или, при $t=1$

$$x_k = \cos\alpha_k\sqrt{\frac{A_1}{\rho}}, k = 1,2. \qquad (13)$$

Из (13) следует уравнение окружности для кривой, которая представляет собой фронт волны, распространяющейся со скоростью V_2

$$x_1^2 + x_2^2 = A_1/\rho.$$

Групповую скорость G_2 найдем следующим образом [9]

$$G_2 = \sqrt{\left(\frac{\partial p_0}{\partial p_1}\right)^2 + \left(\frac{\partial p_0}{\partial p_2}\right)^2} = \sqrt{\frac{A_1}{\rho}}.$$

Аналогично можно показать, что фазовые скорости V_k и $P_k, k = \overline{1,3}$ совпадают с соответствующими групповыми скоростями.

Произведем расчет скоростей V_k и P_k распространения упругих и термоупругих волн в серебре, свинце и молибдене при температуре $T_0 = 293$ *К* (выбор этих металлов обусловлен различным характером распространения волн). Значения скоростей приведены в таблице 2.

Как следует из таблицы 2, во всех рассмотренных материалах эффекты связности полей деформаций и температур в значительной степени влияют на распространение поверхностей разрыва, поэтому при расчете скоростей термоупругих волн необходимо учитывать как постоянную a, так и константу b.

Отметим, что в приведенных выше расчетах время релаксации теплового потока τ принималось равным $1 \cdot 10^{-11}$ *с*, тогда как точные значения τ для металлов не определены и иногда в расчетах принимают $\tau = 0.5 \cdot 10^{-11}$ *с*. Формулы (9) и (11) для $V_3, P_k, k = 2.3$ позволяют исследовать влияние времени релаксации теплового потока на скорость распространения термоупругих волн с помощью графиков зависимостей $P_2(\tau)$ и $P_3(\tau)$ (рисунки 1, 2).

Как следует из рисунка 1, в серебре и свинце скорость P_2 практически не изменяется на всем промежутке изменения времени τ от 0 до $1 \cdot 10^{-11}$ *с*, тогда как в молибдене P_2 возрастает. При $\tau \to 0$ скорость P_2 в рассматриваемых материалах стремится к конечному пределу, причем этот предел в точности совпадает со значением скорости V_2 (рисунок 1, таблица 2). Функции скоростей распространения термоупругих волн $V_3(\tau)$ аналогичны для всех материалов и представляют собой зависимости $V_3 = K \cdot f(\tau)$, где $f(\tau) = \sqrt{\frac{1}{\tau}}$, K – коэффициент, зависящий от механических и тепловых свойств материала, причем при $\tau \to 0$ имеем $f(\tau) >> K$, поэтому при уменьшении времени релаксации теплового потока скорость V_3 стремится в бесконечность. С учетом эффекта связности теплового и деформационного полей зависимость скорости термоупругой волны $P_3(\tau)$ может существенно отличаться от $V_3(\tau)$ (см. таблицу 2), однако при уменьшении промежутка времени релаксации теплового потока скорость P_3 также устремляется в бесконечность (рисунок 2). С учетом выше сказанного, предельный переход от конечной скорости распространения теплового потока к бесконечной в случае микрополярной термоупругой изотропной среды можно интерпретировать как переход от обобщенной взаимосвязанной теории теплопроводности к несвязанной.

СПИСОК ИСПОЛЬЗОВАННЫХ ИСТОЧНИКОВ

1. Лыков А.В. Теория теплопроводности. М. - 1967.
2. Lord H. W., Shulman Y.// J. Mech. And Phys. Solids, 1967. - Vol. 15. - No. 5. - P. 299-309.
3. Подстригач Я.С., Коляно Ю.М. Обобщеная термомеханика. Киев. - 1975.
4. Sharma J.N., Singh H.// J. Acoust. Soc. Am. – 1989. - Vol. 85. - No. 4. - P. 1407-1413.
5. Шашков А.Г., Бубнов В.А., Яновский С.Ю. Волновые явления теплопроводности: системно-структурный подход. Мн. - 1993.
6. Haddow J.B., Wegner J.L.// Math. And Mech. Solids. – 1996. - Vol. 1. - No. 1. - P. 11-127.
7. Liu Kaishin, Xie Suming // Acta mech. solida sin. – 1996. - Vol. 17. - No. 3. - P. 221-228.
8. Новацкий В. Теория упругости. М. - 1975.
9. Смирнов В.И. Курс высшей математики. Т. IV. - Ч. 2. - М. 1981.
10. Современная кристаллография. Т. IV. Физические свойства кристаллов. М. - 1984.
11. Таблицы физических величин. Справочник. Под ред. И.К. Кикоина. М. - 1976.
12. Федоров Ф.И. Упругие волны в кристаллах. М. - 1965.

УДК 621.891

Басинюк Я.В., Ишин Н.Н., Басинюк В.Л, Мардосевич Е.И.

ВИБРОМОНИТОРИНГ ВНУТРЕННЕЙ ДИНАМИЧЕСКОЙ НАГРУЖЕННОСТИ, ТОЧНОСТНЫХ ПАРАМЕТРОВ И ИЗНОСОВ ОТДЕЛЬНЫХ ПАР ЗУБЬЕВ ПЕРЕДАЧ ЗАЦЕПЛЕНИЕМ

Интенсивное развитие расчетных методов оценки параметров надежности механических систем в ряде случаев позволяет уже на стадии проектирования не только оценить ресурс их работоспособности, но и провести сертификацию изделий практически без проведения испытаний натурных образцов. Вместе с тем, постоянно растущие требования к безопасности изделий, в том числе к снижению уровня их виброакустической активности, обусловливают создание и использование новых конструкционных и технологических решений, расчетная оценка эффективности использования которых традиционными методами затруднена. Поэтому и сегодня ведущими производителями приводных систем проводятся их исследования, которые до настоящего времени остаются наиболее дорогостоящим, трудоемким и длительным этапом создания нового изделия.

При испытаниях приводов зацеплением оценка их реальной внутренней динамической нагруженности позволяет уточнить принятые при проектировании расчетные нагрузочные данные. Кроме того, в ряде случаев, наличие достоверной информации о нагруженности отдельных пар зубьев позволяет рассматривать каждый зуб как отдельный объект исследований, что обеспечивает значительное уменьшение длительности и стоимости испытаний, а также существенное сокращение объема испытуемых объектов.

Целью настоящей работы является исследование возможностей эффективной оценки внутренней динамической нагруженности, точностных характеристик в реальных условиях нагружения и степени износа отдельных пар зубьев и прямозубых зубчатых передач в целом путем их вибромониторинга со съемом измерительной информации в режиме «осциллографа» с фиксацией в реальном масштабе времени и анализом по амплитудным значениям сигнала с использованием методов математической статистики. Ее реализация в ряде случаев позволяет обеспечить существенное ускорение испытаний, снижение трудоемкости и длительности их проведения на основе создания и использования алгоритмов съема и обработки диагностических данных с использованием современных микропроцессорных программно-аппаратных средств контроля в реальном масштабе времени параметров взаимодействия и зацепления в целом.

Вибромониторинг приводных систем - одно из самых распространенных и перспективных направлений в создании средств оценки нагруженности и технического состояния приводных систем. Вместе с тем, его использование, как правило, позволяет определить лишь ориентировочные, усредненные для зацепления в целом, значения динамической нагруженности и далеко не всегда обеспечивает достоверность получаемой информации. Это связано прежде всего со сложностью учета влияния взаимосвязанных между собой инерционных и нелинейно зависящих от скоростных и нагрузочных факторов жесткостных параметров и передаточных функций динамической системы, искажающих вибросигнал при его передаче от источника колебаний к первичному преобразователю.

При выполнении настоящей работы определялась связь внутренней динамической нагруженности отдельных пар зубьев испытуемой зубчатой передачи с виброускорениями, зафиксированными на ее подшипниковых опорах, и оценивались возможности построения на основе полученных результатов эффективной системы вибромониторинга с использованием информационных технологий съема, обработки и представления диагностических данных.

Экспериментальные исследования проводились на стенде с открытым силовым контуром (рисунок 1) на примере некоррегированной прямозубой зубчатой передачи с модулем $m = 3$мм и числами зубьев $Z_1 = Z_2 = 40$. Перед проведением испытаний на торцевые поверхности зубьев одного из колес по мостовой схеме наклеивались тензорезисторы. Их тарировка осуществлялась при частоте вращения ведущего вала диагностируемой передачи $n = 18$ рад/с и нагружающих моментах, соответствующих режимам последующих исследований – $T = 60,80,100,120,140,160,180$ и 200 Нм. Виб-

Басинюк Ярослав Владимирович. *Инженер - систематехник, соискатель ИНДМАШ НАН Беларуси.*
Ишин Николай Николаевич. *К.т.н., доцент, заведующий лабораторией ИНДМАШ НАН Беларуси.*
Басинюк Владимирович Леонидович. *К.т.н., доцент, заместитель директора по НИР ИНДМАШ НАН Беларуси.*
Мардосевич Елена Ивановна. *Инженер - механик, аспирант-очник, и.о. Ученого секретаря ИНДМАШ НАН Беларуси.*
Беларусь, 220072, г. Минск, ул. Академическая 12.